

L'Équilibre Social Idéal dans un Jeu Multicritère non Coopératif avec Contraintes

Karima FAHEM et Mohammed Said RADJEF

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé L'objectif de ce travail est d'introduire le concept d'équilibre idéal dans les jeux multicritères avec contraintes. Ce concept a été défini pour les jeux multicritères sans contraintes par Voorneveld *et al* en 2000. Quelques propriétés seront données ainsi qu'une caractérisation de l'équilibre, ce qui nous permettra par la suite d'étudier son existence.

Mots clés : Jeu Multicritère, Équilibre Idéal, Jeu avec contraintes, Équilibre Social.

3.1 Introduction

L'objectif de ce travail est d'introduire le concept d'équilibre idéal dans les jeux multicritères avec contraintes. Ce concept a été défini pour les jeux multicritères par Voorneveld *et al* en 2000. Quelques propriétés seront données ainsi qu'une caractérisation de l'équilibre, ce qui nous permettra par la suite d'étudier son existence.

Mots clé : Multicriteria games, Ideal equilibria, Constrained games, social equilibria.

3.2 Notations et préliminaires

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note par $\mathbb{R}_+^m$ l'ordant non négatif de $\mathbb{R}^m$ et par $int\mathbb{R}_+^m$ son intérieur, ainsi $\mathbb{R}_+^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$, $int\mathbb{R}_+^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, x_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$. Notons par Δ_m et $int\Delta_m$ le simplexe unité de $\mathbb{R}^m$ et son intérieur respectivement $\Delta_m = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{i=1}^m \mu_i = 1\}$, $int\Delta_m = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in int\mathbb{R}_+^m : \sum_{i=1}^m \mu_i = 1\}$. Pour un ensemble B , on note 2^B l'ensemble de toutes les parties de B et coB son enveloppe convexe. Soit $I = \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices. Pour tout $i \in I$, soit X_i un ensemble d'un espace vectoriel topologique, $X = \prod_{i \in I} X_i$ et $X_{-i} = \prod_{j \in I, j \neq i} X_j$. Pour tout $x \in X$, $x_i \in X_i$ est la i^{eme} coordonnée de x ou

la projection de x sur X_i , $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i}$ est la projection de x sur X_{-i} et on écrit $x = (x_i, x_{-i})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}^m$, alors on note : $a = b$ si $a_j = b_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$;

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$, on désigne par $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ le produit scalaire des vecteurs x et y ; on note e_k le k^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $e(m) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur unité. Considérons le jeu multicritère avec contraintes sous sa forme normale

$$G = (I, X_i, C_i, f_i) \quad (3.1)$$

où $I = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des joueurs, et pour tout joueur $i \in I$, X_i est l'ensemble de ses stratégies pures, $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ir(i)}) : X \rightarrow \mathbb{R}^{r(i)}$ sa fonction multicritère avec $r(i)$ critères et $r(i) \in \mathbb{N}$, $C_i : X_{-i} \rightarrow 2^{X_i}$ sa correspondance des contraintes qui restreint les stratégies du joueur i au sous ensemble $C_i(x_{-i}) \subset X_i$ lorsque le reste des joueurs choisissent leurs stratégies dans X_{-i} .

3.3 Concepts d'équilibres

Ding [2], en 2000, a introduit l'équilibre Pareto fort et Pareto faible dans les jeux multiobjectifs avec contraintes et étudia leurs existences dans un H -espace moyennant des vecteurs poids, voir aussi [1, 3].

Définition 3.1 [2] *Une multistratégie $\bar{x}$ est dite équilibre Pareto efficace (resp. Pareto faiblement efficace) pour le jeu multicritère avec contraintes (3.1) si*

- a) *Pour tout $i \in I$, $\bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$; et*
- b) *Il n'existe pas de stratégie $y_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$ telle que $f_i(y_i, \bar{x}_{-i}) \geq f_i(\bar{x})$ (resp. $f_i(y_i, \bar{x}_{-i}) > f_i(\bar{x})$).*

Dans ce présent papier, nous introduisons le concept d'équilibre idéal pour les jeux multicritères avec contraintes. Rappelons que cet équilibre a été défini dans les jeux multicritères non coopératifs sous forme normale par Voorneveld *et al* [6], dont l'existence a été établie par Radjef et Fahem [4]. C'est un équilibre qui maximise tous les critères de tous les joueurs simultanément.

Définition 3.2 *Une multistratégie $\bar{x}$ est dite équilibre social idéal pour le jeu (3.1) si :*

- 1. *Pour tout $i \in I$, $\bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$ et*
- 2. *$f_i(\bar{x}) \geq f_i(y_i, \bar{x}_{-i}) \quad \forall y_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$.*

3.4 Caractérisation de l'équilibre social idéal

Dans cette section, nous suivrons le travail de Voorneveld *et al* pour caractériser l'équilibre social idéal. Soit

$$J_\lambda = (I, (X_i)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I}) \quad (3.2)$$

le jeu pondéré associé au jeu multicritère défini par (3.1), où chaque joueur a le même ensemble de stratégies que dans G et $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x) = \langle \lambda_i, f_i(x) \rangle, \quad \lambda_i \in \Delta_{r(i)}.$$

Définition 3.3 [6] Une collection $\Lambda \subset \prod_{i \in I} \Delta_{r(i)}$ de vecteurs poids est dite représentative du jeu (3.1) si pour toute organisation $i \in I$ et chacun de ses membres $k \in \{1, 2, \dots, r(i)\}$, il existe un vecteur poids qui attribue le poids unité à ce membre de l'organisation, autrement dit :

$$\forall i \in I, \forall k \in \{1, 2, \dots, r(i)\}, \exists \lambda = (\lambda_j)_{j \in I} \in \Lambda, \text{ avec } \lambda_i = e_k \in \Delta_{r(i)}.$$

Le théorème suivant nous donne une caractérisation de l'équilibre social idéal.

Théorème 3.1 Soient J_m le jeu multicritère (3.1), une multistratégie $x \in X$ et Λ une collection de vecteurs poids représentative pour J_m .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) $x \in X^{IS}(G)$
- c) $x \in \bigcap_{\lambda \in \prod_{i \in I} \Delta_{r(i)}} X^S(J_\lambda)$
- d) $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X^S(J_\lambda)$

Où $X^{IS}(G)$ est l'ensemble des équilibres sociaux idéaux du jeu G et $X^S(J_\lambda)$ est l'ensemble des équilibres sociaux du jeu scalarisé J_λ

3.5 Existence de l'équilibre social idéal

Posons dans le jeu (3.1), $C_i : X \rightarrow 2^{X_i}$ et définissons les correspondances $A_i : X \rightarrow 2^{X_i}$ par

$$A_i(x) = \{x_i \in X_i, \exists \lambda \in \Lambda : \langle \lambda_i, f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i, f_i(y_i, x_{-i}) \rangle < 0\}.$$

On a la proposition suivante :

Proposition 7 $\bar{x} \in X$ est un équilibre social idéal si et ssi

$$\begin{cases} \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}) \quad \forall i \in I, \text{ et;} \\ C_i(\bar{x}) \cap A_i(\bar{x}) = \emptyset \quad \forall i \in I. \end{cases}$$

Pour l'existence d'un équilibre social idéal nous obtenons le théorème suivant

Théorème 3.2 *Supposons que pour tout $i \in I$, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. X_i est un sous ensemble non vide convexe et compact de $\mathbb{R}^{l_i}$;
2. La correspondance C_i est continue ; et
3. Pour tout $x \in X$, $C_i(x)$ est non vide et convexe ;
4. Les fonctions f_i sont continues ; et
5. La fonction $y_i \mapsto f_i(y_i, x_{-i})$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$ -quasi-concave-like.

Alors le jeu multicritère (3.1) admet un équilibre social idéal.

Références

1. Ansari Q.H and Zubair Khan, *On existence of Pareto equilibria for constrained multiobjective games*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 273-982 (2004)
2. Ding X.P, *Existence of Pareto equilibria for constrained multiobjective games in H-spaces* Comp. Math. Appl. 39, 125-134 (2000).
3. Ding X.P, Park J.Y and Jung I.H, *Pareto equilibria for constrained multiobjective games in L-convex spaces* Comp. Math. Appl. 46, 1589-1599 (2003).
4. Radjef M.S and Fahem K, *A note on ideal Nash equilibrium in multicriteria games*. Appl. Math. Lett. 2, 1105-1111 (2008).
5. Shafer W and Sonnenschein H, *Equilibrium in Abstract economies without ordered preferences*. Journal of Mathematical Economics 2, 345-348 (1975).
6. Voorneveld M and Grahn S and Dufwenberg M, *Ideal Equilibria in Non cooperative Multicriteria Games*, Mathematical Methods of Operations Research 52, 65-77 (2000).