

Les solutions ϵ —efficaces dans un problème linéaire multicritère

Taous MERNACHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa 06000, Algérie.
email : `mernache.t@yahoo.fr`

Résumé On considère un problème de programmation linéaire multicritère sur un polyèdre, où les variables de décision sont bornées inférieurement et supérieurement. Après avoir donné certaines propriétés du cône polyédrique des poids optimaux et défini les solutions ϵ —efficaces de Pareto, où ϵ est un nombre positif ou nul donné à l'avance, on arrive à formuler un théorème de caractérisation de ces solutions ϵ —efficaces.

Mots clés : Programmation linéaire multi-objectifs, méthode adaptée de programmation linéaire, estimation de sub-efficacité.

3.1 Introduction et position du problème

A l'heure actuelle, la plupart des problèmes de recherche opérationnelle qui se posent dans la pratique, comportent plusieurs critères devant être optimisés simultanément. Alors que pour les problèmes monocritère, l'optimum recherché est clairement défini, il n'en est pas de même pour les problèmes multicritères, à cause de situations conflictuelles et contradictoires existant entre les objectifs à atteindre. Pour arriver à de meilleurs compromis, il est alors vital de définir des relations de dominance entre ces différents critères. Parmi ces dernières, on utilise dans cet article l'optimalité au sens de Pareto qui nous donne les solutions dites efficaces. Sur la base de la notion d' ϵ —optimalité utilisée en programmation linéaire et des résultats de Dimkov obtenus pour le cas multicritère sur un ensemble réalisable dont les variables sont seulement bornées inférieurement ($x \geq 0$), on généralise ces résultats au cas de variables bornées.

Ainsi, considérons le problème, de Programmation Linéaire Multi-Objectif (P.L.M.O) à variables bornées, s'écrivant sous la forme canonique suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} Cx = Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \quad (3.1)$$

où A est une $(m \times n)$ -matrice, $\text{rang} A = m < n$; b est un m -vecteur; c, x, d^- et d^+ sont des n -vecteurs; C est une $(k \times n)$ -matrice dont les lignes sont des n -vecteurs $C_i, i = \overline{1, k}$.

Notons

$I = \{1, 2, \dots, m\}$: l'ensemble d'indices des lignes de A ,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$: l'ensemble d'indices des colonnes de A ou de C ,

$K = \{1, 2, \dots, k\}$: l'ensemble d'indices des lignes de C .

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur x vérifiant les contraintes $Ax = b, d^- \leq x \leq d^+$, est une *solution réalisable* (ou *plan*) du problème (3.1). L'ensemble des solutions réalisables est alors donné par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}.$$

- Soit un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $J = J_B \cup J_N, J_B \cap J_N = \emptyset, |J_B| = m$. L'ensemble J_B est alors appelé *support* si :

$$\det(A_B) = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

- Le couple $\{x, J_B\}$ formé du plan x et du support J_B est appelé *plan de support*.
- Le plan de support $\{x, J_B\}$ est *non dégénéré* si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_B.$$

- En vertu de la partition de $J = J_B \cup J_N$, on peut alors écrire et fractionner les vecteurs et les matrices de la manière suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = (x_j, j \in J_B), \quad x_N = (x_j, j \in J_N);$$

$$A = A(I, J) = (A_B | A_N), \quad A_B = A(I, J_B), \quad A_N = A(I, J_N);$$

$$C = C(K, J) = (C_B | C_N), \quad C_B = C(K, J_B), \quad C_N = C(K, J_N).$$

- La matrice $E = C_B A_B^{-1} A - C$ d'ordre $(k \times n)$ est alors appelée *matrice des estimations* du plan de support $\{x, J_B\}$, où E est représentée par ses vecteurs colonnes E_j :

$$E = E(K, J) = (E_j, j \in J) = (E_B | E_N), \quad E_B = E(K, J_B), \quad E_N = E(K, J_N).$$

Dans cet article, on ne traite que les problèmes non dégénérés, c'est à dire, toutes les solutions réalisables basiques sont non dégénérées. Rappelons qu'une *solution réalisable basique* $\{x, J_B\}$ est telle que :

$$x_j = d_j^- \vee d_j^+, \quad j \in J_N.$$

3.2 Les solutions efficaces et leurs propriétés

Définition 3.1 *Un point $x^0 \in X$ est dit solution efficace du problème (3.1) s'il n'existe pas d'autre point $x \in X$, tel que $Cx \geq Cx^0$, $Cx \neq Cx^0$.*

Une solution efficace x^0 est aussi appelée solution optimale de Pareto pour le problème (3.1).

Soit X^E l'ensemble des solutions efficaces du problème (3.1) et X_B^E celui de ses solutions efficaces basiques.

On a alors le théorème classique suivant :

Théorème 3.1 [4]

Une solution réalisable x^0 est efficace si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^k, \quad \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx.$$

Soit $\{x^0, J_B\}$ une solution optimale basique du problème monocritère (P_λ) suivant :

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} c_\lambda x \longrightarrow \max, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+\}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $c^\lambda = \lambda^T C$.

Puisque $\{x^0, J_B\}$ est supposée non dégénérée, alors les relations d'optimalité suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} E_j^\lambda = \lambda^T E_j \geq 0, & \text{pour } x_j^0 = d_j^-, \\ E_j^\lambda = \lambda^T E_j \leq 0, & \text{pour } x_j^0 = d_j^+, \end{cases} \quad j \in J_N. \quad (3.3)$$

On définit alors les ensembles :

$$J_N^+ = \{j \in J_N : \lambda^T E_j \geq 0, \quad x_j^0 = d_j^-\},$$

$$J_N^- = \{j \in J_N : \lambda^T E_j \leq 0, \quad x_j^0 = d_j^+\}.$$

On a bien

$$J_N^+ \cup J_N^- = J_N.$$

Il s'ensuit que

$$E_N = E(K, J_N) = (E_N^+, E_N^-); \quad E_N^+ = E(K, J_N^+), \quad E_N^- = E(K, J_N^-).$$

On a donc les inégalités suivantes :

$$\lambda^T E_N^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^T E_N^- \leq 0.$$

Soit maintenant $\{x^0, J_B\}$ une solution basique efficace du problème (3.1). On définit alors l'ensemble des poids $\Lambda(x^0)$:

$$\Lambda(x^0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda^T (E_N^+, -E_N^-) \geq 0, \quad \lambda > 0\}. \quad (3.4)$$

L'ensemble $\Lambda(x^0)$ représente un cône polyédrique convexe (en général non fermé). Soit $\overline{\Lambda(x^0)}$ sa fermeture.

Relevons certaines propriétés de l'ensemble $\Lambda(x^0)$, où x^0 est une solution réalisable basique efficace.

Proposition 4 Soient $\{x^0, J_B\}$ une solution réalisable basique efficace et $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$. On a alors l'équivalence suivante :

$$\lambda \in \Lambda(x^0) \iff \lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x. \quad (3.5)$$

preuve 3.1 Condition nécessaire

Soit $\lambda \in \Lambda(x^0)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda^T E_N^+ \geq 0 & \iff & \lambda^T E_j \geq 0 & x_j^0 = d_j^-, & j \in J_N^+; \\ \lambda^T E_N^- \leq 0 & \iff & \lambda^T E_j \leq 0 & x_j^0 = d_j^+, & j \in J_N^-. \end{cases} \quad (3.6)$$

Il s'ensuit que $\{x^0, J_B\}$ est une solution basique optimale du problème (P_λ) . Donc

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x.$$

Condition Suffisante

Inversement, soit $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$ tel que :

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x.$$

Donc $\{x^0, J_B\}$ est une solution réalisable basique optimale du problème (P_λ) . Les relations d'optimalité (3.3) sont alors vérifiées :

$$\lambda^T E_N^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^T E_N^- \leq 0.$$

D'où $\lambda \in \Lambda(x^0)$. $\square$

En vertu de (3.5), le cône $\Lambda(x^0)$ est appelé cône des poids optimaux du plan basique efficace x^0 .

Avant d'énoncer la deuxième propriété, donnons la définition et le lemme suivants ;

Définition 3.2 On dit que X^E est extérieurement stable , si :

$$\forall x \in X, \quad \exists x^0 \in X^E / \quad C_i x \leq C_i x^0, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Lemme 3.1. [5, 6] Si $X \neq \emptyset$ est compact et la fonction objective $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ continue, alors X^E est non vide et extérieurement stable .

Proposition 5 Pour que le plan basique x^0 soit une solution efficace unique dans X , il est nécessaire et aussi suffisant dans le cas où $\text{rang } C = n$ que l'on ait $\Lambda(x^0) = \mathbb{R}_+^k$, où $\mathbb{R}_+^k$ est le quadrant positif de $\mathbb{R}^k$.

preuve 3.2 Condition nécessaire

Supposons que x^0 est une solution réalisable basique efficace unique ; il est facile de voir que les conditions du lemme (3.1) sont vérifiées pour notre problème. Donc

$$\forall x \in X, \quad C_i x \leq C_i x^0, \quad i = \overline{1, k}.$$

D'où

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^k.$$

D'après la propriété 4, on conclut que $\lambda \in \Lambda(x^0)$. Ainsi, on obtient $\mathbb{R}_+^k \subset \Lambda(x^0)$.

L'inclusion inverse étant évidente, il s'ensuit que $\Lambda(x^0) = \mathbb{R}_+^k$.

La nécessité est ainsi démontrée.

Condition suffisante

Soit $\mathbb{R}_+^k = \Lambda(x^0)$, et $\text{rang } C = n$. Dans $\Lambda(x^0)$, considérons la suite des vecteurs :

$$\{\lambda_j^n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \right\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

où la j^{eme} composante est égale à 1. Quand n tend vers l'infini on aura

$\{\lambda_j^n\} \longrightarrow \{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}, \quad 1 \leq j \leq k$. D'après la propriété (4), on a :

$$(\lambda_j^n)^T C x^0 = \max_{x \in X} (\lambda_j^n)^T C x, \quad j = \overline{1, k}.$$

Le passage à la limite dans ces égalités donne :

$$C_j x^0 = \max_{x \in X} C_j x, \quad j = \overline{1, k}. \tag{3.7}$$

Si $\bar{x} \in X$ était une autre solution efficace, elle aurait satisfait en vertu de (3.7) les relations :

$$C_j \bar{x} \leq C_j x^0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Supposons qu'il existe un indice j_1 , avec $C_{j_1}\bar{x} < C_{j_1}x^0$. Alors le point x^0 est tel que

$$Cx^0 \geq C\bar{x}, \quad Cx^0 \neq C\bar{x}.$$

Ceci contredit le fait que $\bar{x}$ est une solution efficace. Donc

$$Cx^0 = C\bar{x} \quad \text{et} \quad C(\bar{x} - x^0) = 0.$$

Comme $\text{rang } C = n$, alors les vecteurs-colonnes de C sont linéairement indépendants et donc $\bar{x} = x^0$. D'où la suffisance est démontrée. $\square$

Proposition 6 Soit $X_B^E = \{x^1, x^2, \dots, x^r\}$ l'ensemble des solutions réalisables basiques efficaces du problème (3.1). Alors

$$\bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i) = \mathbb{R}_+^k,$$

où $\Lambda(x^i)$ est le cône des poids optimaux du plan basique efficace x^i .

preuve 3.3 L'inclusion $\bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i) \subset \mathbb{R}_+^k$ est évidente. Démontrons l'inclusion inverse :

Soit $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}_+^k$ et considérons le problème $(P_{\hat{\lambda}})$ suivant :

$$(\hat{\lambda})^T Cx \longrightarrow \max, \quad x \in X.$$

Comme X est un ensemble compact, alors ce problème est soluble et il possède au moins une solution réalisable basique optimale $\hat{x}$. Du théorème (3.1), on conclut que $\hat{x} \in X_B^E$. En vertu de la propriété (4) on a $\hat{\lambda} \in \Lambda(\hat{x})$ et donc :

$$\mathbb{R}_+^k \subset \bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i).$$

Par conséquent, la propriété est démontrée. $\square$

3.3 Les Solutions ϵ —efficaces d'un problème de P.L.M.O

Définition 3.3 Un point x^ϵ est appelé ϵ —efficace dans le problème (3.1), s'il existe un point efficace x^0 tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

où ϵ est un nombre réel positif ou nul arbitraire.

Dorénavant, l'ensemble des solutions ϵ —efficaces sera désigné par X_ϵ^E .

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition des solutions ϵ -efficaces :

1. $X^E \subset X_\epsilon^E$, $\forall \epsilon > 0$ et $X^E = X_\epsilon^E$, pour $\epsilon = 0$.
2. Si $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$, alors $X_{\epsilon_2}^E \subset X_{\epsilon_1}^E$.

Lemme 3.2. Le point $x^\epsilon \in X$ est ϵ -efficace dans le problème (3.1) si et seulement s'il existe un point efficace $x^0 \in X$ tel que pour tout vecteur $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, satisfaisant la condition $\lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx$, l'inégalité suivante a lieu :

$$\lambda^T (Cx^0 - Cx^\epsilon) \leq \epsilon. \quad (3.8)$$

preuve 3.4 Condition nécessaire

Soit x^ϵ un point ϵ -efficace dans X . Alors il existe un point efficace $x^0 \in X$ tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

En vertu du théorème (3.1), $\exists \lambda > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ tel que $\lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx$. D'où

$$\lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \lambda_i \epsilon, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon \implies \lambda^T (Cx^0 - Cx^\epsilon) \leq \epsilon.$$

Condition suffisante

Supposons que pour une certaine solution efficace x^0 , un vecteur λ^0 tel que,

$\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i^0 = 1$ et un certain point $x^\epsilon \in X$, les conditions du lemme sont remplies.

Soit

$$X^0 = \{\tilde{x} \in X : (\lambda^0)^T C\tilde{x} = \max_{x \in X} (\lambda^0)^T Cx\}.$$

D'après le théorème (3.1), tout point $\tilde{x}$ de X^0 est un point efficace. Considérons alors le problème :

$$\tilde{\epsilon} \longrightarrow \max, \quad C_i \tilde{x} = C_i x^\epsilon + \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{x} \in X^0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (3.9)$$

Soit $(\hat{x}, \hat{\epsilon})$ une solution optimale du problème (3.9). Puisque $\hat{x} \in X^0$, alors $\hat{x}$ est une solution efficace. Montrons que $\hat{\epsilon} \leq \epsilon$. En supposant le contraire, on aura :

$$C_i \hat{x} = C_i x^\epsilon + \hat{\epsilon} > C_i x^\epsilon + \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

Donc

$$\lambda_i^0 C_i \hat{x} > \lambda_i^0 C_i x^\epsilon + \lambda_i^0 \epsilon, \quad i = \overline{1, k} \implies (\lambda^0)^T C \hat{x} > (\lambda^0)^T C x^\epsilon + \epsilon.$$

Comme x^0 et $\hat{x}$ sont dans X^0 , alors $(\lambda^0)^T C \hat{x} = (\lambda^0)^T C x^0$; par suite on obtient :

$$(\lambda^0)^T C x^0 > (\lambda^0)^T C x^\epsilon + \epsilon.$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse du lemme, c'est-à-dire, la relation (3.8) supposée vraie. Par conséquent, il existe un point efficace $\hat{x} \in X$ tel que $C_i \hat{x} \leq C_i x^\epsilon + \epsilon$, $i = \overline{1, k}$.

Donc x^ϵ est un point ϵ -efficace. Le lemme est démontré. $\square$

Théorème 3.2 (Théorème de sub-efficacité)

Le point $x^\epsilon \in X$ est ϵ -efficace si et seulement si il existe un support J_B et un vecteur

$\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, tels que :

$$\sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon,$$

où $E^\lambda = u^T A - \lambda^T C = (E_j^\lambda, j \in J)$, le m -vecteur u vérifiant l'équation $u^T A_B - \lambda^T C_B = 0$, c'est-à-dire, $u^T = c_B^\lambda A_B^{-1}$.

preuve 3.5 Condition nécessaire :

Soit x^ϵ un point ϵ -efficace dans X , alors il existe un point efficace $x^0 \in X^E$ tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

En vertu du théorème (3.1), $\exists \lambda > 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, tel que : $\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x$.

On a alors

$$\lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \lambda_i \epsilon, \quad i = \overline{1, k},$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon.$$

D'où

$$\lambda^T (C x^0 - C x^\epsilon) \leq \epsilon \implies \lambda^T C x^0 - \lambda^T C x^\epsilon \leq \epsilon \implies c^\lambda (x^0 - x^\epsilon) \leq \epsilon.$$

Par conséquent, le point x^ϵ est une solution ϵ -optimale du problème monocritère (P_λ) :

$$c^\lambda x \longrightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+.$$

D'après [2], il existe un support J_B tel que l'estimation de sub-optimalité $\beta(x^\epsilon, J_B)$ du plan de support $\{x^\epsilon, J_B\}$ soit inférieure ou égale à ϵ , où

$$\beta(x^\epsilon, J_B) = \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

La nécessité est ainsi démontrée.

Condition suffisante :

Supposons que pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^k, \lambda > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ et pour un certain plan de support $\{x^\epsilon, J_B\}$, les conditions du théorème sont remplies, c'est à dire :

$$\sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

Considérons le problème monocritère (P_λ) suivant :

$$\begin{cases} c^\lambda x = \lambda^T Cx \longrightarrow \max, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Soit x^0 une solution optimale de ce problème. D'après le théorème 3.1, c'est une solution efficace du problème (3.1).

Développons alors l'expression :

$$c^\lambda(x^0 - x^\epsilon) = c^\lambda \Delta x = c_B^\lambda \Delta x_B + c_N^\lambda \Delta x_N.$$

Puisque x^0 et $x^\epsilon \in X$ alors on aura $A\Delta x = 0$ et $\Delta x_B = -A_B^{-1}A_N\Delta x_N$. En remplaçant, on obtient

$$c^\lambda(x^0 - x^\epsilon) = c^\lambda \Delta x = (-c_B^\lambda A_B^{-1}A_N + c_N^\lambda)\Delta x_N = -E_N^\lambda(x_N^0 - x_N^\epsilon).$$

Donc

$$c^\lambda \Delta x = c^\lambda(x^0 - x^\epsilon) = \lambda^T(Cx^0 - Cx^\epsilon) = \sum_{j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0).$$

Comme $d^- \leq x^0 \leq d^+$, on aura :

$$\begin{cases} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0) \leq E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-), & \text{si } E_j^\lambda > 0, \\ E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0) \leq E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+), & \text{si } E_j^\lambda < 0. \end{cases}$$

De là, on tire

$$\lambda^T(Cx^0 - Cx^\epsilon) = \sum_{j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - x_j^0) \leq \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda(x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

En vertu du lemme (3.2), on déduit que x^ϵ est une solution ϵ -efficace du problème (3.1).

□

Ainsi, à partir du théorème 3.2, on peut inclure dans les méthodes de recherche des solutions efficaces, une procédure qui permet d'arrêter le processus lorsque une solution ϵ -efficace est obtenue.

Références

1. Dimkov, M. P. : Recherche sur les problèmes de programmation linéaire multicritère., In Les problèmes de commande optimale, sous la direction de R. Gabassov et F.M. Kirillova.- Edition Nauka i Technika (1981) 25-42
2. Gabassov, R., Kirillova F.M. : Méthodes de programmation linéaire, T1 et T2.- Edition de l'Université, Minsk (1977 et 1978)
3. Ehrgott, M. : Multicriteria optimization. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2005)
4. Steuer, R. E. : Multiple criteria optimization : Theory, Computation and Application., New York (1986)
5. Polinovsky, V. V, Noguine, V.D. : Solutions optimales de Pareto dans les problèmes multicritères, Nauka, Moscou, (1982)(en russe)
6. Radjef, M. S. : Décisions optimales dans les problèmes multicritères avec indétermination, Laboratoire LAMOS, Université de Béjaia, (1995)
7. Bibi, M. O. : Méthodes adaptées de programmation linéaire, Cours de post-graduation en Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia (2005)
8. Radjef, M. S. : Cours de post-graduation sur les notions d'optimalité en optimisation multicritère, Université de Béjaia, (2005)
9. Radjef, S. : Sur la programmation linéaire multiobjectifs, Mémoire de Magistère, Université de Béjaia ,(2001)