

## Approximation des Systèmes de Files d'Attente

Mohamed BOUALEM<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : robertt15dz@yahoo.fr

**Résumé** Nous présentons une revue unifiée des principaux résultats obtenus dans la littérature par l'utilisation de la formulation par interpolation, lorsque la seule information disponible est celle concernant les deux premiers moments. Cette approche permet d'une part, de retrouver la méthode des deux moments en tant que cas particuliers et, d'autre part, de justifier plus rigoureusement les arguments heuristiques à l'origine de leur usage.

**Mots clés :** Système d'attente G/G/., interpolation linéaire, approximation, méthodes heuristiques.

### 7.1 Introduction

L'évaluation des performance des systèmes d'attente (temps moyen d'attente, nombre moyen de clients, ...) se fait suivant différentes techniques. Parmi les mieux adaptées, on distingue trois sortes de méthodes :

Les techniques *analytiques* qui visent à traduire le système à étudier en équations mathématiques, dont la résolution fournira des informations statistiques sur des variables représentant la qualité de service (taux d'occupation des ressources, temps de réponse, ...).

Les techniques de *simulation* qui permettent d'imiter artificiellement sur ordinateur les système à étudier et de prévoir leurs comportements avec plus ou moins de précision.

Les techniques d'*approximation des deux moments* qui se satisfont bien de la seule information concernant les deux premiers moments. Celles-ci se basent sur l'interpolation linéaire ou harmonique d'un paramètre de performance à partir de paramètre de performance calculés pour des systèmes connus.

L'avantage de ce type d'approximation réside dans le fait que des résultats assez explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative.

## 7.2 Approximations des deux moments des systèmes classiques GI/GI/1

Des efforts considérables ont été fournis dans le but d'obtenir des approximations et des inégalités rendant compte, dans la mesure du possible, des paramètres de performance des systèmes GI/GI/1. Au delà de l'intérêt que présentait ce système dans la pratique, ces études avaient aussi pour objectif de constituer une base solide à l'approximation de systèmes encore plus complexes tels les réseaux de files d'attente.

### 7.2.1 Méthodes d'approximation des deux moments des files classiques GI/GI/1

Dans sa revue des principales approximations obtenus pour les files d'attente de type GI/GI/1, Shanthikumer [10], a présenté les approximations de diffusion, pour le nombre moyen de clients dans le système (proposé par Heyman, Kobayashi, Gelenbe et Yu) ainsi que les approximations heuristiques (Obtenues par Marchal, Kramer et Langenbach-Belz, Page et Sakasegawa) avec une comparaison numérique dans le but de faire apparaître leurs domaines de validité.

#### Méthodes de diffusion

En utilisant l'approximation de diffusion, Heyman [2], a montré que le nombre moyen de clients dans le système pouvait être approximé par l'expression :

$$\overline{N}_s(HEY) = \frac{\rho Ca^2 + Cs^2}{2(1 - \rho)}. \quad (7.1)$$

Où  $Ca^2$  et  $Cs^2$  sont les coefficients de variation au carré pour les processus d'arrivée et de service respectivement (variance divisée par la moyenne au carré), et  $\rho$  l'intensité du trafic.

#### Approximation de Kobayashi

En utilisant l'approximation de diffusion avec une limite de réflexion et une normalisation appropriée, Kobayashi [5] a suggéré l'approximation suivante pour le nombre moyen de clients dans le système :

$$\overline{N}_s(KOB) = \frac{\rho}{1 - \hat{\rho}}; \quad (7.2)$$

avec

$$\hat{\rho} = \exp\left\{\frac{-2(1 - \rho)}{\rho Ca^2 + Cs^2}\right\}.$$

### Approximation de Gelenbe

Avec une limite de retour instantanée dans le cadre du processus de diffusion, Gelenbe [1] a montré que :

$$\overline{N}_s(GEL) = \rho + \frac{\rho^2 C a^2 + \rho C s^2}{2(1 - \rho)}. \quad (7.3)$$

### Approximation de Yu

Dans sa comparaison assez limité de l'approximation de Gelenbe avec les résultats de la simulation, Yu [11] remarqua que l'approximation de Kobayashi était de loin meilleure et plus performante que celle de Gelenbe. Il se proposa de modifier les paramètres de diffusion proposés par celui-ci et aboutit à :

$$\overline{N}_s(GEL) = \rho + \frac{\rho^2 C a^2 + \rho^2 C s^2}{2(1 - \rho)}. \quad (7.4)$$

## 7.2.2 Méthodes Heuristiques

### Approximation de Marchal

En proposant de diminuer la borne supérieure donnée par Kingman [4] de sorte quelle soit exacte pour le système M/G/1, Marchal [7], dans son approximation heuristique du nombre moyen de clients dans le système, arrive à l'approximation suivante :

$$\overline{N}_s(MAR) = \rho + \frac{\rho^2(1 + C s^2)}{1 + \rho^2 C s^2} \left\{ \frac{C a^2 + \rho^2 C s^2}{2(1 - \rho)} \right\}. \quad (7.5)$$

### Approximation de Kramer et Lagenbach-Belz

En utilisant les résultats numériques, Kramer et Lagenbach-Belz [6], ont étendu de manière heuristique l'approximation de Heyman. L'approximation équivalente pour le nombre moyen de clients dans le système devient :

$$\overline{N}_s(KL) = \rho + \frac{\rho^2(C a^2 + C s^2)}{2(1 - \rho)} g(C a^2, C s^2, \rho); \quad (7.6)$$

Où

$$g(C a^2, C s^2, \rho) = \begin{cases} \exp\left[\frac{-2(1-\rho)(1-C a^2)^2}{3\rho(C a^2 + C s^2)}\right], & C a^2 \leq 1; \\ \exp\left[-(1-\rho)\frac{(C a^2 - 1)}{C a^2 + 4C s^2}\right], & C a^2 \geq 1. \end{cases} \quad (7.7)$$

### Approximation de Page

Une formule d'approximation pour le temps moyen d'attente dans le système a été proposé par Page [8] :

$$\overline{N}_s(PAG) = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \left\{ Ca^2(1 + Cs^2) + Cs^2(1 - Ca^2) \exp\left(\frac{-2(1-\rho)}{3\rho}\right) \right\}. \quad (7.8)$$

### Approximation de Sakasegawa

En se basant sur l'approximation de Page et une approximation pour le système M/M/1, Sakasegawa [9] a proposé une approximation équivalente pour le nombre moyen de clients dans le système :

$$\overline{N}_s(SAK) = \rho + \frac{\rho^2(Ca^2 + Cs^2)}{2(1-\rho)}. \quad (7.9)$$

Le résultat ci-dessus est exactement le même que celui proposé par Yu (7.4).

### 7.2.3 Comparaison numérique

Pour tester la validité et l'applicabilité des différentes approximations citées précédemment, nous donnons dans ce paragraphe quelques résultats numériques. Shanthikumar [10] a entrepris de comparer ces différentes approximations avec les valeurs numériques du temps moyen d'attente obtenus dans le système  $E_k/E_l/1$  pour différentes valeurs de  $k$  ( $Ca^2$ ) et  $l$  ( $Cs^2$ ) par Page [8].

On notera qu'aucune analyse de précision n'a été effectuée pour le cas  $Ca^2 \geq 1$ .

## 7.3 Approximation par interpolation des systèmes GI/GI/s

La formulation par interpolation des systèmes présente un grand intérêt pratique dans les problèmes de conception et de décision, d'abord en raison de sa simplicité, mais surtout parce que dans les situations réelles, la seule information disponible est celle concernant les deux premiers moments.

L'interpolation peut-être linéaire ou harmonique, mais peut également mettre en oeuvre une base d'approximation pouvant contenir plusieurs systèmes connus. Cette approche permet d'une part, de retrouver la méthode des deux moments en tant que cas particuliers et, d'autre part, de justifier plus rigoureusement les arguments heuristiques à l'origine de leur usage. La méthode d'approximation par interpolation des deux moments a fait l'objet de diverses extensions. Nous présentons dans ce qui suit les principaux résultats obtenus par Kimura [3] qui donna une revue unifiée de la méthode d'interpolation des deux moments pour les systèmes GI/GI/s en commençant par présenter la méthodologie utilisée qui sera appliquée au cas particulier M/G/s avant d'être étendue au système GI/GI/s.

### 7.3.1 Méthodologie de l'interpolation

Soit à considérer  $\xi$  et  $\tau$  les variables aléatoires des temps d'inter arrivées et de service respectivement, et  $F$  et  $B$  les lois de distribution correspondantes.

Kimura propose une approche unifiée en considérant le quotient :

$$Q(GI/GI/s) = \frac{\overline{W}(GI/GI/s)}{\overline{W}(GI/GI/1)}. \quad (7.10)$$

Où le temps moyen d'attente est normalisé à celui d'une file à un seul serveur GI/GI/1 ayant la même distribution du temps de service, la même intensité de trafic et une distribution des temps inter-arrivées  $F_s(t) \equiv F(t/s)$  ( $t \geq 0$ )

La quantité  $Q(GI/GI/s)$  est approximée par une fonction des quantités correspondantes pour des systèmes analysables connus tels M/M/s, GI/M/s, ... :

$$Q(GI/GI/s) \approx f(Q(\beta_1), \dots, Q(\beta_n)). \quad (7.11)$$

où l'ensemble des systèmes simples  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  constitue la base de l'approximation.

Il y a différentes façons de définir la fonction  $f$  mais deux d'entre elles seront utilisées dans le cadre de cette approche :

$$Q(GI/GI/s) \approx \sum_{i=1}^n l_i Q(\beta_i). \quad (7.12)$$

$$Q(GI/GI/s) \approx \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{Q(\beta_i)} \right\}^{-1}. \quad (7.13)$$

Où  $l_i \equiv l_i(GI/GI/s)$  et  $h_i \equiv h_i(GI/GI/s)$  sont les coefficients de poids du  $i^{\text{ème}}$  système ( $i = 1, \dots, n$ ).

Les approximations (7.12) et (7.13) sont les combinaisons linéaires (de type L) et harmonique (de type H) de la quantité  $Q(GI/GI/s)$  et sont l'extension des travaux de [Cosmetatos 1974, 1976, 1977, 1980] qui a développé la combinaison de type L pour l'approximation des temps moyens d'attente dans les systèmes  $GI/M/s$ ,  $M/G/s$ ,  $E_m/E_k/s$  et  $H_2/M/s$ .

## 7.4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'approximation pour l'estimation des principaux paramètres de performance dans le système  $GI/GI/1$  et  $GI/GI/s$ .

La méthode d'approximation des deux moments est établie selon le principe d'interpolation en combinant (de manière linéaire et harmonique) des solutions analytiques de systèmes simples que sont les files  $M/M/1$ ,  $M/D/1$  et  $D/M/1$ . Plusieurs approximations du temps moyen d'attente des systèmes  $GI/GI/1$ ,  $GI/GI/s$  sont présentées.

Ces résultats peuvent être étendus pour les systèmes d'attente avec rappels et vacances.

## Références

1. E. Gelenbe. A non-markovian process and its application to the approximation of queueing and computer system behavior. TR-158 (IRIA), 1966.
2. D. P. Heyman. A diffusion model approximation for the  $GI/G/1$  queues in heavy trafic. *Bell Syst. Tech. J.*, 54(1637), 1975.
3. T. Kimura. Approximations for multi-server queues : system interpolations. *Queueing Systems*, 17 :347–382, 1994.
4. J. F. C. Kingman. Some inequalities for the  $GI/G/1$  queue. *Biometrika* 49(315), 1962.
5. M. Reisesr and H. Kobayachi. Accuracy of the diffion approximation for some queueing systems. IBM JL. Res. Dev, 18(110), 1974.
6. W. Kramer and M. Langeberch-Belz. Approximate formula for the delay in the queueing system  $GI/G/1$ . Congressbook, 8<sup>th</sup> International Tele Congress, Melbourne, 8(235) : 1–235, 1976.
7. W. G. Marchal. An approximate formula for waiting time in single queues. A.I.I.E. Trans. 8(473), 1976.
8. E. Page. Queueing theory in OR. Opnl Res. Series, ED : K. B. Haley, 1972.
9. H. Sakasegawa. An approximation formula  $L_q \simeq \alpha \rho^\beta / (1 - \rho)$ . *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo 29 A(67), 1977.
10. J. G. Shanthikumar and J. A. Buzacott. On the approximations to the single server queue. *Int. J. Prod. Res.*, 18(6) :761–773, 1980.
11. T. S. Yu. On accuracy improvement and applicability conditions of diffusion approximation with applications to modelling of computer systems. TR-129 (Digital systems laboratory, Saintford University), 1977.