

2

Inégalité de Ky Fan sous des conditions de g —invexité

O. MEZINE¹

Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, Algérie.

Résumé C'est grâce à l'inégalité de Ky Fan, établi par Ky Fan [1] en 1968, que la théorie des jeux a connu un nouveau essor ; il s'est avéré que c'est à partir de l'inégalité de Ky Fan que l'on peut démontrer plusieurs résultats de la théorie des jeux, contrôle optimal, analyse non linéaire.

Dans cet exposé, nous assignons un objectif de définir sur l'espace topologique X une combinaison invexe à qui nous associons l'application φ^A et une structure d'invexité que nous appelons la g —invexité sur laquelle la condition (2.1) est vérifiée.

Mots clés : Théorie des jeux, Inégalité de Ky Fan, convexité, invexité.

2.1 Introduction

C'est grâce à l'inégalité de Ky Fan, établi par Ky Fan [1] en 1968, que la théorie des jeux a connu un nouveau essor ; il s'est avéré que c'est à partir de l'inégalité de Ky Fan que l'on peut démontrer plusieurs résultats de la théorie des jeux, contrôle optimal, analyse non linéaire. Différentes approches ont été utilisées pour montrer cette inégalité : l'approche du théorème KKM, l'approche du théorème de sélecteur continu et de point fixe, l'approche du théorème de l'élément maximal. Et plusieurs auteurs ont proposé de généraliser ces derniers théorèmes cités ci-dessus.

Toutes ces généralisations portaient sur la généralisation de la notion de convexité. Ainsi plusieurs structures algébriques ont été définies sur l'espace topologique X , on peut citer : "G-convexité" [6], "mc-structure" [4], "Convexité au sens de Komiya" [2], "Convexité au sens de Lassonde" [3], "Convexité au sens de Michael" [5]... Et toutes ces structures ont un point commun qui à chaque ensemble fini $A \subset X$, $|A| = n + 1$, il existe une application $\varphi^A : \Delta_n \rightarrow X$ qui est bien définie et continue. Et de plus, toute partie convexe $Y \subset X$ (une partie est convexe au sens de la structure qui est définie sur l'espace X) vérifie : pour toute partie finie

$$A \subset X, |A| = n + 1, A \cap Y \neq \emptyset, \implies \varphi^A(\Delta_J) \subset Y, \quad (2.1)$$

où Δ_J dénote la face de Δ_n correspondant aux éléments appartenant à $J = A \cap Y$. Par exemple, dans le cas de la convexité, l'application φ^A est associée à la combinaison convexe des éléments $a_i \in A$, $i = 0 \dots n$. Et cette application φ^A joue un rôle très important dans la démonstration des théorèmes "de sélecteur continu et de point fixe", "de l'élément maximal" et "de KKM".

Ainsi dans cet exposé, nous assignons un objectif de définir sur l'espace topologique X une combinaison invexe à qui nous associons l'application φ^A et une structure d'invexité que nous appelons la g -invexité sur laquelle la condition (2.1) est vérifiée. A la fin, nous généralisons les théorèmes de sélecteur et de point fixe, de l'élément maximal et du KKM sous la condition de g -invexité, et nous appliquons ces mêmes théorèmes pour montrer l'inégalités de Ky Fan sous la même condition de g -invexité.

Définition 2.1 [T.Antczak][2001] *Un ensemble non vide $X \subseteq \mathbb{E}$ est dit invexe par rapport à η , où $\eta : X \times X \longrightarrow \mathbb{E}$ si $\forall \lambda \in [0, 1]$ et $\forall x', x \in X$, on a :*

$$x' + \lambda\eta(x, x') \in X. \quad (2.2)$$

Définition 2.2 *On appelle combinaison invexe des éléments $x_0, \dots, x_n \in X$ la combinaison suivante :*

$$x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta(x_i, z_{i-1}), \quad (2.3)$$

où $z_0 = x_0, z_i = z_{i-1} + \lambda_i \eta(x_i, z_{i-1}), \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$.

Remarque 2.1 *Géométriquement, la combinaison invexe des éléments $\{x_0, \dots, x_n\}$ représente un chemin qui démarre du point x_0 , passant par les points : $z_1 \in [x_0, x_0 + \eta(x_1, x_0)]$, $z_2 \in [z_1, z_1 + \eta(x_2, z_1)]$, $z_3 \in [z_2, z_2 + \eta(x_3, z_2)]$, ..., $z_n \in [z_{n-1}, z_{n-1} + \eta(x_n, z_{n-1})]$.*

La g -invexité

Dans toute cette section, $\mathbb{E}$ désigne un espace vectoriel topologique de Hausdorff. X un ensemble non vide de $\mathbb{E}$ invexe par rapport à la fonction η qui est définie sur $X \times X$ dans $\mathbb{E}$.

Définition 2.3 *On dit que la fonction $\eta : X \times X \longrightarrow \mathbb{E}$, vérifie la condition de g -invexité si :*

$$\text{pour tout } (x, y) \in X \times X : \eta(y, x) = g(y) - x$$

où g est une application définie de X dans $\mathbb{E}$.

Définition 2.4 *Soit X un ensemble non vide de $\mathbb{E}$, on dit que X est g -invexe si :*

1. X est invexe par rapport à la fonction η ;
2. η vérifie la condition de g -invexité.

2.2 Construction de l'application φ^A

Posons $A = \{y_0, \dots, y_n\}$, et considérons les deux applications suivantes :

$$\varphi : [0, 1]^n \longrightarrow Y, \quad \varphi(\lambda) = y_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta(y_i, z_{i-1}), \quad (2.4)$$

où $z_0 = y_0$, $z_i = z_{i-1} + \lambda_i \eta(y_i, z_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$;

$$\psi : \Delta_n \longrightarrow [0, 1]^n, \quad \psi_i(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma_i = 0 \\ \frac{\sigma_i}{\sum_{j=0}^n \sigma_j}, & \sigma_i \neq 0. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Théorème 2.1 *Soit X une partie g -invexe de l'espace vectoriel topologique de Hausdorff $\mathbb{E}$. Alors l'application définie comme suit :*

$$\varphi^A(\lambda) = \varphi \circ \psi(\lambda) = y_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i(\lambda) \eta(y_i, z_{i-1}), \quad (2.6)$$

pour tout $\lambda \in \Delta_n$, où φ et ψ sont définies par (2.4) et (2.5) respectivement, vérifie :

1. Pour toute partie g -invexe $Z \subset X$ telle que $A \cap Z \neq \emptyset$, $\varphi^A(\Delta_J) \subset Z$,
où J correspond aux indices des $y_i \in A \cap Z$;
2. φ^A est continue sur Δ_n .

Théorème de sélecteur continu et de point fixe

Définition 2.5 *Soit $F : X \longrightarrow Y$ une correspondance à valeurs non vides. On dit que F admet un sélecteur continu, s'il existe une application continue $f : X \longrightarrow Y$ telle que :*

$$\text{pour tout } x \in X, f(x) \in F(x).$$

Définition 2.6 *Soit $F : X \longrightarrow X$ une correspondance . On dit que F admet un point fixe, s'il existe un $x^* \in X$ tel que :*

$$x^* \in F(x^*).$$

Théorème 2.2 *Soit X une partie compact et g -invexe de l'espace vectoriel topologique de Hausdorff $\mathbb{E}$.*

$F : X \longrightarrow X$ une correspondance telle que :

1. $\forall x \in X, F(x)$ est g -invexe ;
2. $X = \bigcup \{ \text{int} F^{-1}(y), y \in X \}$.

Alors F a un sélecteur continu et un point fixe.

Existence de l'élément maximal

Définition 2.7 *Soit $F : X \longrightarrow X$ une correspondance définie sur un ensemble non vide X dans lui même. Un élément x^* est dit élément maximal de la correspondance F si :*

$$F(x^*) = \emptyset.$$

Théorème 2.3 *Soit X une partie compact et g -invexe de l'espace vectoriel topologique de Hausdorff $\mathbb{E}$. $F : X \longrightarrow X$ une correspondance à valeurs g -invexes telle que :*

1. Pour tout $x \in X, x \in F(x)$;
2. Si $y \in F^{-1}(x)$, alors il existe un $x' \in X$ tel que $y \in \text{int} F^{-1}(x')$.

Alors, l'ensemble des éléments maximaux $\{x^*, F(x^*) = \emptyset\}$ est non vide et compact.

Théorème de l'inégalité de Ky Fan

Théorème 2.4 *Soit X une partie compact et g -invexe d'un'espace vectoriel topologique de Hausdorff $\mathbb{E}$. $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :*

1. pour tout $y \in X, x \longmapsto f(x, y)$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) ;
2. pour tout $x \in X, y \longmapsto f(x, y)$ est préincave par rapport à la fonction η ;
3. pour tout $y \in X, f(y, y) \leq 0$.

Alors il existe un $\bar{x} \in X$ tel que : $\sup_{y \in X} f(\bar{x}, y) \leq 0$.

Conclusion

Dans cet exposé, nous avons rappelé quelques résultats relatifs à la notion d'invexité et nous avons introduit de nouvelles notions : combinaison invexe et la g -invexité. Et à l'aide de ces deux notions, nous avons proposé des généralisations pour : le théorème de sélecteur continu et de point fixe, théorème Fan-KKM et le théorème de l'élément maximal. Par la suite, en utilisant ces théorèmes, nous avons démontré l'inégalité de Ky Fan sous la condition de g -invexité. Et grâce à cette généralisation, on peut faire l'étude d'existence des équilibres de jeux dans des ensembles g -invexe .

Références

1. Ky Fan. Minimax Inequality and Application, in "Inequalities, III". *Academic Press, New York, o.shishia edition*, (1972).
2. H. Komiya. Convexity on a Topological Space. *Fundamental Mathematics* , **111** :107–113, (1981).
3. M. Lassonde. On the use of KKM maps in fixed point theory and relation topics. *J. Math. Anal. Appl.*, **97** :151–201, (1983).
4. J. Llinares. Unified treatment of the problem of existence of maximal elements in binary relations : a characterisation. *Journal of Mathematical Economics*, **29** :285–302, (1998).
5. E. Michael. Convex Structure and Continuous Selections. *Canadian Journal of Mathematics*, **11** :556–575, (1959).
6. S. Park and H. Kim. Admissible classes of multifunctions on generalized convex spaces. *Proc. Coll. Natur. Sci. Seoul Nat. U.*, **18** :1–21, (1993).