

2

Couplages et allocations stables

M. BAIYOU¹

Université Blaise Pascal, CUST, 63174 Aubière Cedex, Ecole Polytechnique Laboratoire d'Econométrie
email :baiou@univ-bpcler.fr

Résumé Il existe deux ensembles finis d'agents, les *agents-lignes* I ("employés") et les *agents-colonnes* J ("employeurs"). Chaque agent a un ordre de préférence strict sur les agents opposés.

A la présence de plusieurs solutions stables il est important de déterminer un mécanisme permettant de choisir une solution spécifique. Un mécanisme est dit *I-monotone* si lorsqu'un agent $i \in I$ monte dans l'estime d'un ou de plusieurs agents de J alors i ne peut recevoir une allocation moins bonne. Un mécanisme est dit *I-strategy-proof* si aucun sous-ensemble d'agents I ne peut obtenir de meilleures allocations, tout en annonçant de fausses préférences. Exactement un seul et le même mécanisme est à la fois *I-monotone* et *I-strategy-proof* [2]. Ces caractérisations ont des applications pratiques dans les problèmes d'admissions stables [1].

Mots clés : Couplages, allocations stables, problèmes d'admissions stables.

Il existe deux ensembles finis d'agents, les *agents-lignes* I ("employés") et les *agents-colonnes* J ("employeurs"). Chaque agent a un ordre de préférence strict sur les agents opposés. Les préférences sont appelées Γ . Chaque employé $i \in I$ possède $s(i)$ unités de travail à offrir, chaque employeur $j \in J$ possède $d(j)$ unités de travail à accorder, et $\pi(i, j) \geq 0$ est le nombre maximum d'unités que i et j peuvent négocier. Un *problème d'allocations stables* [3] est spécifié par (Γ, s, d, π) où Γ est un ensemble de préférences, $s > 0$ un vecteur de $|I|$ réels, $d > 0$ un vecteur de $|J|$ réels, et $\pi \geq 0$ une $|I| \times |J|$ matrice de réels.

Notation. $i' >_j i$ signifie que l'agent $j \in J$ préfère i' à i , et $j' >_i j$ signifie que l'agent $i \in I$ préfère j' à j . Si l'un des agents $i \in I$ ou $j \in J$ refuse de travailler avec l'autre, alors $\pi(i, j) = 0$. L'ensemble $(i, j^>) \stackrel{def}{=} \{(i, l) : l >_i j\}$ et $(i, j^\geq) \stackrel{def}{=} \{(i, l) : l \geq_i j\} = (i, j^>) \cup \{j\}$. Les ensembles $(i^>, j)$ et $(i^\geq, j)$ sont définis de façon similaire. En général, si S est un ensemble, $(r, S) \stackrel{def}{=} \{(r, s) : s \in S\}$, et de manière identique (S, r) est défini ; de plus, si $y(s)$, $s \in S$, est un nombre réel, alors $y(S) \stackrel{def}{=} \sum_{s \in S} y(s)$.

Une *allocation* $x = (x(i, j))$ d'un problème (Γ, s, d, π) est un ensemble de valeurs vérifiant :

$$\begin{aligned}
x(i, J) &\leq s(i), \text{ pour tout } i \in I, \\
x(I, j) &\leq d(j), \text{ pour tout } j \in J, \\
0 &\leq x(i, j) \leq \pi(i, j), \text{ pour tout } (i, j) \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Une allocation x est dite *stable* si pour chaque $(i, j) \in \Gamma$, :

$$x(i, j) < \pi(i, j) \text{ implique } x(i, j^{\geq}) = s(i) \text{ ou } x(i^{\geq}, j) = d(j).$$

Le *problème des admissions stables* ("one-to-many") est un problème d'allocations stables où $\pi(i, j) = 0$ ou 1 , les $s(i)$ sont des entiers, et $d(j) = 1$; et le *problème de mariage stable* ("one-to-one") est un problème d'admissions où $s(i) = 1$ pour tout $i \in I$. Il existe une vaste littérature pour ces problèmes (voir en particulier la référence [4]).

En général l'ensemble des allocations stables forme un treillis distributif non vide, et sa cardinalité peut être exponentielle. Cependant, de façon générique, si les réels s , d , et π sont aléatoirement choisis, alors il existe une seule allocation stable.

A la présence de plusieurs solutions stables il est important de déterminer un mécanisme permettant de choisir une solution spécifique. Un mécanisme est dit *I-monotone* si lorsqu'un agent $i \in I$ monte dans l'estime d'un ou de plusieurs agents de J alors i ne peut recevoir une allocation moins bonne. Un mécanisme est dit *I-strategy-proof* si aucun sous-ensemble d'agents I ne peut obtenir de meilleures allocations, tout en annonçant de fausses préférences. Exactement un seul et le même mécanisme est à la fois *I-monotone* et *I-strategy-proof* [2]. Ces caractérisations ont des applications pratiques dans les problèmes d'admissions stables [1].

Références

1. Baiou, M. and Balinski M., Admissions and recruitment. *American Mathematical Monthly*, 110 :386-399, 2003.
2. Baiou, M. and Balinski M., Stable allocations mechanisms, Cahier du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 2002-9.
3. Baiou, M. and Balinski M., The stable allocation (or ordinal transportation) problem, *Mathematics of Operations Research* 27 :485-503, 2002. Corrected version : 27 : 662-680, 2002.
4. Roth, A. E. and Sotomayor M., *Two-Sided Matching : A study in Game Theoretic Modeling and Analysis*, Cambridge University Press, London/ New York, 1990.