

Stabilité Forte de Modèle $MMPP/M/1$

L. IKHLEF^a, O. LEKADIR^b et D. AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : iklefilyes@gmail.com ^b email : ouizalekadir@gmail.com

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, on applique la méthode de stabilité forte aux Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés ($RdPSG$). En effet, nous avons approché les caractéristiques du $RdPSG$ qui modélise le système d'attente $MMPP/M/1$ par celles du $RdPSG$ qui modélise le système d'attente $M/M/1$ après la perturbation du flux des arrivées. Sous certaines hypothèses, la borne explicite pour l'erreur de l'approximation est obtenue.

Mots clés : Réseaux de Petri stochastiques généralisés ; Stabilité forte ; Distribution Stationnaire ; Files d'attente, Matrice de transition.

13.1 Introduction

Le système $MMPP/M/1$ apparaît dans plusieurs applications réelles : télécommunications, réseaux informatiques, système de production, etc. Malheureusement, ce système n'a pas de solution analytique ; ainsi, pour l'analyser on fait appels aux méthodes approximatives (troncation, méthode de la matrice géométrique, etc.) et à la simulation. Dans ce papier, on discutera la possibilité d'approximer le modèle $RdPSG - MMPP/M/1$ par le modèle $RdPSG - M/M/1$ après la perturbation du flux des arrivées.

13.2 Le $RdPSG$ associé au système $MMPP/M/1$

Le $RdPSG$ associé au système $MMPP/M/1$ est illustré dans la figure suivante :

Après la construction du graphe des marquages accessibles de ce $RdPSG$ on a obtenu la chaîne de Markov à temps continue ($CMTC$), qui lui est associée, suivante :

Le processus associé au modèle $RdPSG - MMPP/M/1$ est un processus de quasi naissance et de mort, et sa matrice de transition est donnée par :

On approxime le modèle $RdPSG - MMPP/M/1$ par le modèle $RdPSG - M/M/1$ illustré dans la figure ci-dessous :

Le processus associé au modèle $RdPSG - M/M/1$ est un processus de naissance et de mort. Sa $CTMC$ et sa matrice de transition sont données par :

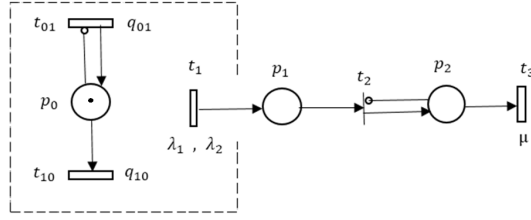


Figure 13.1. Le modèle $RdPSG - MMPP/M/1$.

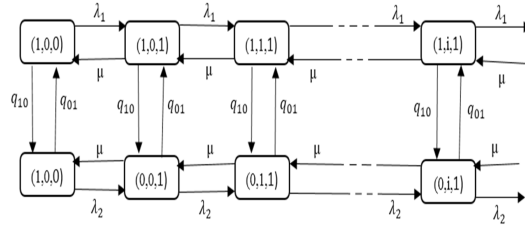


Figure 13.2. Le diagramme de transition de modèle $RdPSG - MMPP/M/1$.

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda_1 + q_{01}}{M} & \frac{q_{01}}{M} & \frac{\lambda_1}{M} & & \\ \frac{q_{10}}{M} & 1 - \frac{q_{10} + \lambda_2}{M} & 0 & \frac{\lambda_2}{M} & \\ \frac{\mu}{M} & 0 & 1 - \frac{q_{01} + \mu + \lambda_1}{M} & \frac{q_{01}}{M} & \frac{\lambda_1}{M} \\ & \frac{\mu}{M} & \frac{q_{10}}{M} & 1 - \frac{q_{10} + \mu + \lambda_2}{M} & 0 & \frac{\lambda_2}{M} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Figure 13.3. la matrice de transition du modèle $RdPSG - MMPP/M/1$.

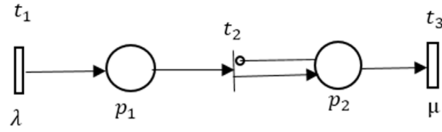


Figure 13.4. Le modèle $RdPSG - M/M/1$.

13.3 Stabilité

13.3.1 v -stabilité

Pour la mesure : $\alpha = (\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, 0, 0, \dots)$

La fonction mesurable : $h = (1, 0, 0, \dots)$

et la fonction test : $v(k) = \beta^k$

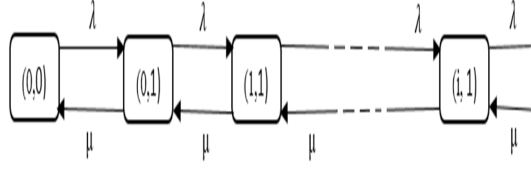


Figure 13.5. Le diagramme de transition du modèle $RdPSG - MMPP/M/1$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & & \\ & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \\ & & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Figure 13.6. la mtrice de transition du modèle $RdPSG - M/M/1$.

les critères de v-stabilité sont vérifiés :

- $\alpha h = \frac{\mu}{\lambda+\mu} > 0$, $\pi h = \pi_{00} > 0$, $\alpha 1 = 1$;
- $T \geq 0$;
- il existe $\psi = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)\beta} + \frac{\lambda\beta}{\lambda+\mu}$ tel que $Tv(k) < \psi v(k)$;
- $\|p\| < \infty$.

Donc le modèle $RdPSG - M/M/1$ est v -stable pour $1 < \beta < \frac{\mu}{\lambda}$.

13.3.2 Inégalités de stabilité

La déviation des operateurs de transition P et $\bar{P}$ est donnée par :

$$\|\Delta\|_v = \text{Max}\{\Delta_1, \Delta_2\}$$

13.3.3 Deviation

La déviation des distributions stationnaires π et $\bar{\pi}$ est donnée par :

$$\|\pi - \bar{\pi}\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v c(1 - \psi - c\|\Delta\|_v)$$

13.4 Conclusion

Notre future travail serait l'obtention des résultats numériques sur la mesure de performance de la méthode de stabilité forte du modèle $RdPSG - MMPP/M/1$ et l'étude de la stabilité forte du réseau : $RdPSG - MMPP/M/1 \longrightarrow M/M/1$.

Références

1. M.K.Molloy, Performance analysis using stochastic Petri nets, IEEE, (1982).
2. W.Fisher and K.Meir-Hellstem, The Markov modulated poisson process (MMPP) cookbook, Performance Evaluation, (1993)
3. S.Kishor, C.Oliver, Stochastic Petri net analysis of finite population vacation queuing systems, Queuing Systems, (1990)
4. Z.Retchkiman, Modeling and stability analysis for a class of queuing systems by means of timed Petri nets, Lyapunov Methods and Max-Plus Algebra, International Mathematical Forum, (2011).
5. O.Lekadir, D.Aïssani, Error bounds on practical approximation for two tandem queues with blocking and non preemptive priority, Computer mathematics with applications (2011).