

Evaluation des Performances de Réseaux de Files d'Attente via les GSPN

L. IKHLEF^a, O. LEKADIR^b et D. AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : iklefilyes@gmail.com ^b email : ouizalekadir@gmail.com

^c email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail il sera question de modélisation et d'évaluation des performances de réseaux de files d'attente en utilisant les réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG). Ainsi, comme exemple illustratif on prend le réseau $[M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1]$.

Mots clés : Réseaux de files d'attente, Réseaux de Petri, GSPN, Evaluation de Performances, Forme produit, Chaîne de Markov.

11.1 Introduction

L'évolution technologique de ces dernières années a induit une complexité des systèmes dans différents domaines, qui devient de plus en plus difficile à gérer. Cette évolution s'est accompagnée d'un développement et d'une diversification d'outils permettant de faire une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes. Parmi ces outils on peut citer : les réseaux de files d'attente (RFA) [5], les algèbres de processus, les réseaux de Petri (Petri nets (PN)) avec leurs différents formalismes (PN, GSPN, DSPN, ...), etc. Nos travaux de recherches consistent à utiliser l'outil des RdP pour la modélisation et l'évaluation des performances de RFA complexes.

11.2 Les réseaux de PETRI

Les PN sont des outils graphiques et mathématiques permettant de modéliser le comportement dynamique de systèmes à événements discrets et continus comme : les systèmes manufacturiers, les systèmes de télécommunication, les réseaux de transport, ... Ces outils sont introduits par C. A. Petri en 1962 dans sa thèse "Communication avec des Automates".

Un PN classique est un graphe bi-partie orienté constitué de places, de transitions et d'arcs qui relient les transitions aux places (input arcs) et les places aux transitions

(output arcs). Les transitions notées par des rectangles, les places par des cercles et les arcs par des flèches, des jetons (marques) associés aux places notés par des points ou des nombres à l'intérieur d'une place, des entiers positifs appelés poids associés aux arcs. L'état d'un PN est défini par le nombre de marques dans chaque places, représenté par le vecteur $M = (m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_N))$ appelé marquage d'un PN. Une transition t est sensibilisée si le nombre de jetons dans chaque place d'entrée à t est supérieur ou égal au poids de l'arc joignant cette place à t , le franchissement (le tir) de consiste à retirer dans les places d'entrée de t , le nombre de jetons indiqué sur les arcs entrants de t et en déposant ensuite, à chaque place de sortie le nombre de jetons correspond au poids indiqué sur l'arc sortant de t . Il est possible d'obtenir l'ensemble des suites finies ou infinies dévolution du système à partir du marquage initial M_0 , cette suite d'ensemble définit l'ensemble des marquages accessibles. Le graphe des marquages d'un PN noté $R(PN, M_0)$ est un graphe dont ses nœuds sont les marquages accessibles reliant par des arcs orientés définis par la relation d'accessibilité directe et étiquetés par les transitions de réseau correspondant, Les ouvrages [1, 2, 3] constituent de bons outils pour un état de l'art sur la théorie des PN.

11.3 Les SPN

Les réseaux de Petri stochastiques (Stochastique Petri Nets (SPN)) ont été suggérés par Molloy, Florin, Natkin 1985 [4]. Ces derniers ont introduit la notion de temps pour répondre aux exigences de certain type des systèmes. Un SPN est obtenu à partir du PN classique, en associant une fonction de distribution de probabilité pour le délai de franchissement de chaque transition. Depuis ce travail plusieurs extensions ont été apparues comme (GSPN, DSPN, ...).

11.4 Les GSPN

Pour l'étude de notre réseau via les SPN, nous avons opté pour le formalisme GSPN (generalized stochastic Petri nets) proposés par Balbo et al [5]. Ce formalisme est une extension des SPN autorisant deux classes de transitions : Des transitions instantanées à temporisation nulle (transition immédiate) et des transitions temporisées à qui correspondent des variables aléatoires déterminant la durée de franchissement.

Notre choix pour le formalisme GSPN est dicté par le fait que les systèmes de files d'attente sont modélisés par des processus aléatoires, ainsi que pour l'existence d'événements immédiats à caractériser. D'ailleurs, ce formalisme a été déjà exploité pour l'étude de systèmes de files d'attente. A titre d'exemple, on peut citer le travail de C. Oliver et S.

Kishor [6] ou un système $M/M/1/K$ avec vacance a été étudié via les GSPN ainsi que les travaux de N. Gharbi [7, 8] qui ont porté sur l'analyse de systèmes de files d'attente avec rappels. La propriété d'absence de mémoire des distributions exponentielles des délais de franchissement a permis à Molloy de montrer que les SPN sont isomorphes aux processus de Markov à temps continu et à espace d'états discret, qui sont le substrat fondamental des analyses faites avec les SPN, donc les techniques des processus markoviens sont alors exploitées pour calculer les mesures de performances d'un SPN.

11.4.1 Le processus associé au GSPN

Le processus stochastique engendré par un GSPN est un processus semi-markovien. Ce processus comprend deux types de marquages :

- Marquages tangibles ("tangible markings") générés suite au franchissement des transitions temporisées.
- Marquages évanescents ("vanishing markings") générés lors du franchissement des transitions immédiates.

L'analyse quantitative d'un GSPN consiste à calculer les probabilités stationnaires et les indices de performance. Elle est basée sur la chaîne de Markov à temps continu (CTMC) associée au GSPN. Cette chaîne peut être construite à partir du graphe des marquages accessibles, les états de la chaîne de Markov sont les marquages tangibles. Les marquages évanescents sont fusionnés avec leurs successeurs (marquages tangibles). Les taux de transitions de la CTMC sont les taux de tir des transitions du GSPN. On obtient le générateur infinitésimal de cette CTMC qui est alors une matrice carrée de dimension $(r \times r)$ (r est le nombre fini de marquages tangibles du GSPN) qui regroupe l'ensemble des taux de transition d'un marquage vers un autre. La distribution de probabilité $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ à l'état stationnaire sur les marquages tangibles peut alors être obtenue par la résolution du système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \pi Q &= 0; \\ \sum_{i=1}^r \pi &= 1. \end{cases} \quad (11.1)$$

En utilisant la distribution des probabilités stationnaires, on peut calculer les indices de performances parmi les quels on peut citer :

- Fréquence moyenne de franchissement d'une transition :

$$\bar{\lambda}(t_i) = \sum_{M_j \in E(t_i)} \lambda_i(m_j) \pi_j. \quad (11.2)$$

- Nombre moyen de marques dans une place :

$$n(p) = \sum_{(i: M_i \in E)} m_i(p) \pi_i. \quad (11.3)$$

11.5 Le réseau $[M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1]$

Considérons un QN (queueing network) à deux stations en tandem avec blocage après service, illustré dans la figure suivante :

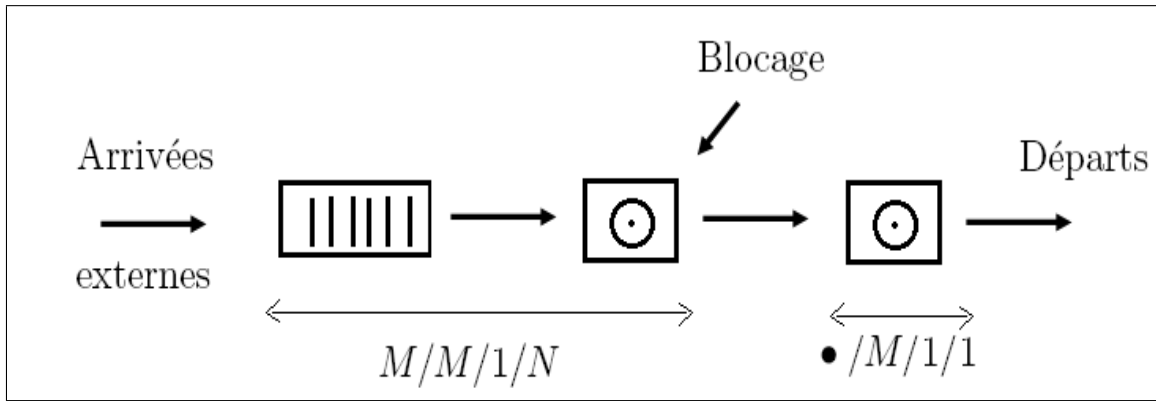


Figure 11.1. Le réseau $M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1$.

Les clients arrivent à la première station selon un processus poissonnien de paramètre λ , si le service est libre le client est servi sinon il attend dans la file. Chaque client reçoit une partie de son service à la première station et puis accède à la seconde station pour poursuivre son service. Il n'y a aucune file d'attente intermédiaire, un client dont le service dans la station 1 est accompli ne peut accéder à la station 2 si cette dernière est occupée, au lieu de cela, le client reste dans le service 1 et le système sera bloqué jusqu'à ce que la station 2 se libère. On associe au réseau précédent le GSPN illustré dans la figure suivante :

Dans le modèle proposé, les transitions immédiates sont représentées par des rectangles noir coloré, les transitions temporisées par des rectangles blanc et l'arc inhibiteur par l'arc auquel est ajouté un petit cercle vide et qui lie un arc et une transition.

Le marquage initial de ce réseau est :

$$M_0 = (M_{p.file}; M_{p.serv1}; M_{p.bloc}; M_{p.serv2}) = (0; 0; 0; 0);$$

ce qui signifie qu'aucun des clients n'est arrivé au service (la file et les deux serveurs sont vides).

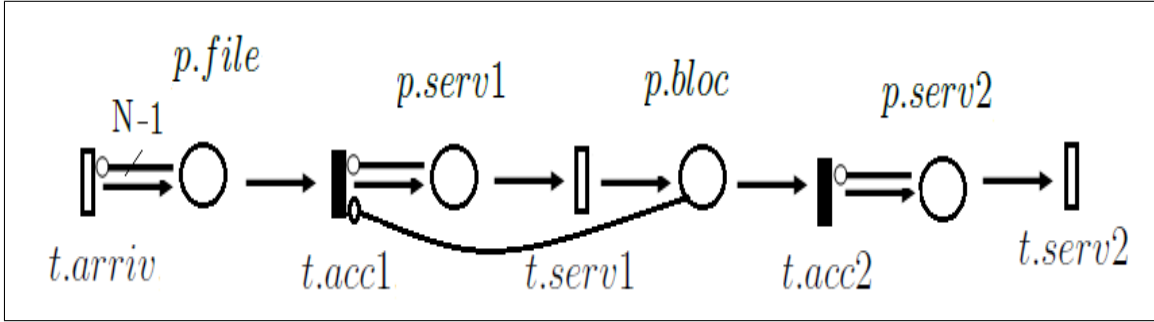


Figure 11.2. Le GSPN associé au $M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1$.

- Le tir de la transition temporisée $t.arriv$ indique l'arrivée d'un client de l'extérieur. Ainsi la place $p.file$ reçoit un jeton, ce qui représente la condition qu'un client est prêt pour le service. Dans le cas où le nombre de jetons dans $p.file$ est supérieur à $(N - 1)$ le client qui arrive sera rejeté, ce qui est modélisé par l'arc inhibiteur (arc1).
- La transition immédiate $t.acc1$ est franchissable quand la place $p.file$ contient au moins un jeton et le serveur 1 est libre (non bloqué), i.e. ($p.serv1$ contient pas de jeton, $p.bloc$ ne contient pas de jetons), le tir instantanément de $t.acc1$ consiste à supprimer un jeton de la place $p.file$ et à déposer un jeton dans la place $p.serv1$, ceci représente le fait que le client a commencé son service et que le serveur 1 est passé de l'état oisif à l'état occupé.
- Le tir de la transition temporisée $t.serv1$ consiste à supprimer un jeton de la place $p.serv1$ et le déposer dans la place $p.bloc$, donc le premier serveur passe de l'état occupé à l'état libre.
- La présence de jeton dans la place $p.bloc$ signifie que la place $p.serv2$ contient un jeton (deuxième serveur est occupé) donc le premier serveur sera bloqué, le tir de la transition $t.serv1$ est impossible jusqu'à ce que la place $p.bloc$ soit vide.

Après la construction du graphe des marquages accessibles du GSPN précédent, on obtient la CTMC suivante dans le cas ($N=2$) :

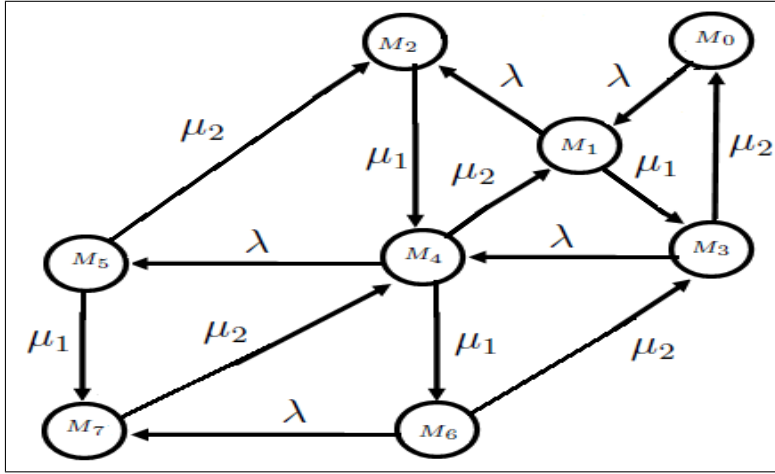


Figure 11.3. CTMC associé au GSPN (cas où $N=2$).

Le générateur infinitésimal associé à cette chaîne est :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & \lambda & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\mu_1 + \mu_2) & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Après la résolution du système (11.1) et l'application des formules (11.2) et (11.3), on a obtenu les mesures suivantes :

$\bar{\lambda}(t_{\text{arriv}})$	n_i : nombre moyen de client dans le système
0,8274934436	1,000485207

Pour tout N on obtient la CTMC suivante :

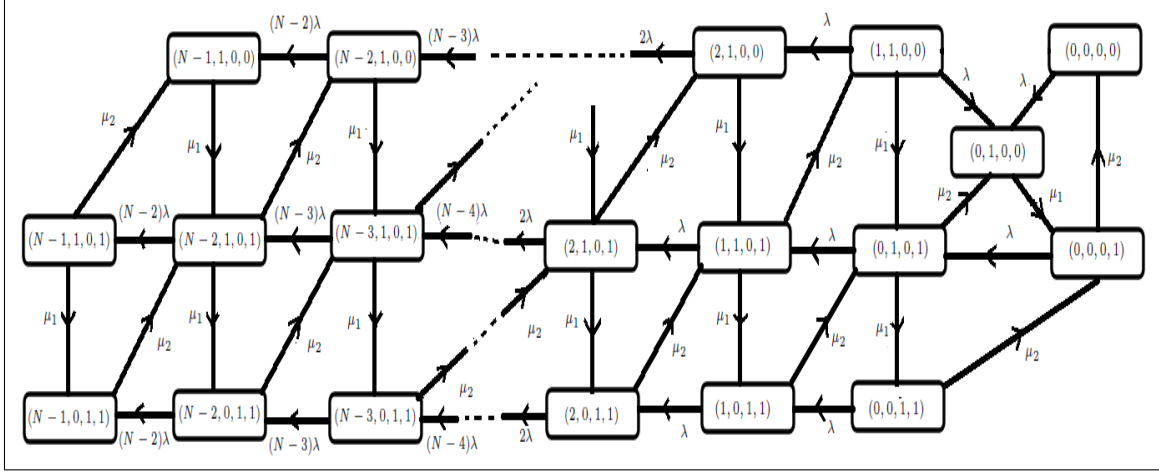


Figure 11.4. CTMC associé au GSPN (cas où N est quelconque).

L'analyse d'un GSPN associé à un système implique l'énumération de tous les états possibles et de toutes les possibilités de transition entre états, ceci est d'autant très pénalisant, quand la taille du graphe des marquages est grand.

11.6 Les RdPSG à forme produit

L'analyse d'une CTMC associée à un GSPN peut être très dure en raison du problème d'explosion de l'espace d'état (explosion combinatoire), la taille de graphe de marquage d'un SPN (ou GSPN) augmente de façon exponentielle avec à la fois le nombre de jetons dans le marquage initial et avec le nombre de places dans le réseau. Récemment certaines classes de SPN et GSPN à forme produit ont été découverts. Ces classes sont caractérisées par leurs distributions de probabilité à l'état stationnaire de leurs marquages qui peut être factorisé en forme produit. Plusieurs efforts de recherche ont été consacrés pour identifier les conditions d'existence de la forme produit des SPN et GSPN, nous pouvons récapituler les résultats obtenus à nos jours, en identifiant les trois principales classes à forme produit suivantes :

- **Boucherie's class** : La forme produit est donnée en termes des "sous réseaux", elle généralise les résultats obtenus par A. Lazar et Robertazzi 1991 [9].
- **Coleman et Henderson et al** : Elle est basée sur les propriétés structurales d'un SPN, la forme produit est exprimée en fonction du nombre de marques dans chaque place [10].

- **Balbo et al** : les auteurs ont considéré les GSPN (la présence des transitions immédiates) ils ont introduit un algorithme qui permet de transformer un GSPN à un SPN [11].

11.7 Nos perspectives de travail

Notre futur travail inclue l'application de la technique décrite par Coleman et al pour dériver d'autres nouveaux résultats de la forme produit des GSPN associés au QN. Une autre direction de recherche pourrait être la dérivation d'autres méthodes qui permettent de transformer un GSPN associé à un QN non à forme produit à un GSPN à forme produit.

Références

1. T. Maruta, "Petri Nets : Properties, analysis and applications" IEEE 77(1989)541-580.
2. J. Peterson, "Petri Net theory and the modeling of systems" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
3. F. Bause and P.S. Kritzinger "Stochastic Petri nets : An introduction to the theory" 2002.
4. M. K. Molloy "Performance analysis using stochastic petri nets ". IEEE September 1982.
5. M. A. Marsan et al "Modeling with generalized stochastic Petri Net". John Wiley, New York, 1995.
6. S. Kishor and C. Oliver, " Stochastic Petri net analysis of finite population vacation queueing systems" Queueing systems 8(1991)111-118.
7. N. Gharbi and M. Ioualalen, "Performance analysis of retrial queueing systems using generalized stochastic petri net". In theory and Practice of Timed systems, Grenoble, France, 2002. Electronic Notes in theoretical Computer Science, 65(5), 2002.
8. N. Gharbi and M. Ioualalen, "Performance evaluation of multi-server queues with station and server vacations. In International Industrial Simulation Conference 397-401, Malaga, Spain, June 2004.
9. A. A. Lazar and G. Robertazzi, "Markovian Petri net protocols with product form solution" Performance Evaluation 12(1991) 67-77.
10. J. L. Coleman, W. Henderson and P. G. Taylor "Product form equilibrium distributions and convolution algorithm for stochastic petri nets" Performance Evaluation 26(1996) 159-180.
11. G. Balbo, S. C. Bruell and M. Sereno, "Product form solution for Generalized Stochastic Petri Nets" IEEE Transactions on software engineering, Vol.28, NO. 10, October 2002.