

Sur la stabilité et la stabilisation des modèles stochastiques : RFA et RdP.

O. LEKADIR^a et D. AÏSSANI^b

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : ouizalekadir@gmail.com

^b email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé In this paper, we have given a brief review in applications of the strong stability method on stochastic systems (queueing systems and queueing networks as well as on the Petri nets associated with them), we have also addressed the notion of stabilization of Petri nets via the Lyapunov method, to finally consider the possibility of their stabilization via the strong stability method.

Key words : Modèles stochastiques, réseaux de files d'attente, réseaux de petri, stabilité, stabilisation.

Le thème général de nos activités de recherche concerne l'étude de la stabilité des réseaux de files d'attente (RFA). L'analyse de la stabilité des RFA a reçue un grand intérêt récemment, ceci est dû particulièrement aux exemples démontrant que la condition usuelle d'ergodicité stipulant que "l'intensité du trafic se doit d'être inférieure à un dans chaque file du réseau" est non suffisante pour établir la stabilité du réseau même sous la discipline de service la plus évidente qui est FIFO. Différentes méthodes de stabilité des réseaux de files d'attente ont ainsi vu le jour [4].

La méthode de stabilité forte ou "méthode des opérateurs" est une méthode quantitative de stabilité qui peut être appliquée à tous les modèles de la Recherche Opérationnelle gouvernés par des chaînes de Markov homogènes [1]. L'applicabilité de cette méthode aux systèmes de files d'attente a fait l'objet d'un cycle complet de recherche, en considérant la perturbation de différents paramètres. Dans nos travaux de recherche, il a été question d'élargir le champ d'applicabilité de cette méthode aux RFA.

Dans un premier temps, nous avons posé les problématiques liées à l'évaluation des performances des RFA, particulièrement ceux non à forme " produit ". Nous avons constaté qu'outre la solution qui consiste à trouver des solutions analytiques de plus en plus complexes à des modèles de RFA de plus en plus élaborés, il est possible de chercher à approcher les réseaux compliqués par des réseaux plus simples, donc complètement analysables. Le point capital est alors d'évaluer l'erreur commise. L'évaluation de cette marge d'erreur est

intimement liée à la théorie de stabilité des modèles stochastiques. C'est pourquoi nous avons réalisé une synthèse de la recherche dans le domaine, analysant ainsi les différentes approches de stabilité utilisées pour les RFA.

Dans un deuxième temps, nous avons prouvé pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux réseaux de files d'attente. Vu la simplicité du réseau de Jackson $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$, nous l'avons pris comme exemple illustratif. La v -stabilité forte de ce réseau de Jackson (réseau idéal) a été établie après perturbation de la durée de service de la première station du réseau $[M/G/1 \rightarrow \cdot/M/1]$ (réseau réel) [6]. Cependant, nous n'avons pas pu obtenir les inégalités de stabilité en raison de la problématique du flot intermédiaire du réseau réel $[M/G/1 \rightarrow \cdot/M/1]$. En effet, n'ayant pas pu déterminer la nature de ce flot, l'évaluation de la déviation des opérateurs de transition associés aux deux réseaux (réel et idéal) n'a pas pu être réalisée. Par conséquent, la déviation des distributions stationnaires des deux réseaux n'a pas pu être évaluée. Cependant, nous avons pu effectuer une étude comparative des caractéristiques des deux réseaux via la simulation. Cette comparaison montre que les caractéristiques des deux réseaux sont relativement proches, ce qui n'est pas une preuve de l'efficacité de la méthode de stabilité forte. Pour contourner le problème du flot intermédiaire rencontré dans notre première application de la stabilité forte aux RFA, nous avons réalisé cette fois-ci la stabilité forte de deux réseaux à deux stations en tandem sans file intermédiaire $[M/G/1 \rightarrow \cdot/G/1/1]$ [7, 9] et $[M/G/1/1 \rightarrow \cdot/M/1/1]$ [8]. En effet, la stabilité forte du premier réseau a été établie après perturbation du flot des arrivées prioritaires dans un réseau avec priorité relative $[M_2/G_2/1 \rightarrow \cdot/G/1/1]$. Celle du second réseau a été prouvée après perturbation du flot des rappels dans un réseau $[M/G/1/1 \rightarrow \cdot/M/1/1]$ avec rappels constants. Le choix des paramètres perturbés est motivé par l'étude de l'impact de ces paramètres sur la stabilité de ces réseaux. D'ailleurs, l'obtention des inégalités de stabilité dans le cadre de cette étude, nous a permis de réaliser des applications pour tester numériquement la performance des résultats théoriques en les comparant à ceux obtenus par simulation. Les résultats que nous avons obtenus jusque là ouvrent la voie à l'application de la méthode de stabilité forte à l'étude d'autres réseaux de files d'attente. Actuellement, la stabilité forte de deux réseaux à deux stations en tandem, le premier avec priorité absolue et le second avec arrivées et services par groupes est établie (la finalisation du travail est en cours).

Par ailleurs, depuis 2009, s'est constitué au LaMOS, un thème émergent "Evaluation des performances des systèmes de files d'attente à l'aide des (RdP) (réseaux de Petri)" (voir les thèses soutenues dans ce cadre [3, 5]). D'un point de vue structurel, il s'agit d'un sous-ensemble de l'équipe "Systèmes avec Rappels et réseaux", presque tous les membres du thème étant également membres à part entière de "Systèmes avec Rappels et réseaux".

D'un point de vue thématique, les liens avec l'équipe "Systèmes avec Rappels et réseaux" sont naturels et évidents, avec néanmoins une orientation propre et une certaine autonomie due à la spécificité de l'objet étudié. Enfin, de par son fonctionnement, ce thème est à mi-chemin entre un groupe de travail et une équipe en cours de constitution.

Il existe une similitude entre la stabilité des systèmes dynamiques et la bornitude des RdP [2]. La condition de bornitude est nécessaire et suffisante dans le cas de RdP continus. Elle est une condition nécessaire pour les RdP discrets.

La théorie de la stabilité de Lyapounov fournit les outils nécessaires pour aborder le problème de stabilité pour les systèmes à événements discrets modélisés par les RdP temporisés, dont le modèle mathématique est donné en termes d'équations différentielles [10]. Une fois la stabilité pratique prouvée, ceci nous permet de définir les bornes des performances de ces systèmes à événements discrets dynamiques. De plus, en utilisant les méthodes de Lyapounov une condition suffisante pour le problème de stabilisation est obtenue [11]. Il a été démontré qu'il est possible de restreindre l'espace des systèmes à événements discrets de telle sorte à ce que la bornitude soit garantie. Cependant, cette restriction est vague donc reste non satisfaisante. Cet inconvénient peut être vaincu en considérant une équation récurrente spécifique, dans l'algèbre max-plus, qui est associée au modèle graphique du RdP temporisé. La solution du problème de stabilité des systèmes à événements discrets dont les modèles sont obtenus en utilisant les RdP temporisés, est due à la théorie du vecteur des fonctions de Lyapounov et les principes de comparaison. La méthodologie montre qu'il est possible de restreindre l'espace des systèmes de telle sorte que la bornitude soit garantie. Ainsi, la combinaison de la théorie de Lyapounov avec l'algèbre max-plus permet de donner une solution précise et complète pour le problème de stabilité des systèmes à événements discrets modélisés via les RdP temporisés. Cette méthodologie est nouvelle et prometteuse et ses résultats sont innovants.

Ceci étant un bref aperçu sur notre nouveau axe de recherche "Evaluation des performances des systèmes de files d'attente à l'aide des RdP", comme perspectives de recherche, il serait judicieux de :

- Essayer de mieux comprendre comment exploiter la méthode de lyapounov pour les RdP dans l'algèbre max-plus ;
- Exploiter cette nouvelle méthodologie d'étude de la stabilité des RdP à l'étude de la stabilité des systèmes et des réseaux dont la modélisation via les RdPSG a été réalisée.
- Comparer les différentes approches de stabilité des réseaux de files d'attente. Il serait intéressant que cette comparaison aboutisse à établir un lien entre ces différentes méthodes et arriver à unifier les notions de stabilité stochastiques ou du moins à justifier la divergence entre les différentes notions existantes.

- Essayer d'appliquer les autres méthodes de stabilité des RFA aux RdP, particulièrement la méthode de stabilité forte.

Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and Stability of Markov Chains with Respect to the Topology in the Space of Transition Kernels. Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR seriya A, 11 :1-5, 1983.
2. C. Amer-Yahia and N. Zerhouni and A. El Moudni, and M. Ferney (1999). Some subclasses of Petri nets and the analysis of their structural properties : A new approach. IEEE Trans. On System, Man, and Cybernetics, vol. 29, pp. 164-172.
3. S. Bouanani et L. Ikhlef, Evaluation des Performances du réseau $[M/M/1/2 \rightarrow ./M/1/1]$ via les réseaux de Petri, Mémoire de Master 2 en Recherche Opérationnelle, Juin 2011.
4. S. G. Foss and T. Konstantopoulos. An Overview of Some Stochastic Stability Methods. J. of the Operations Research Society of Japon, 47(4) :275-303, 2004.
5. S. Hakmi, Evaluation des performances des systèmes prioritaires à l'aide des Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG). Mémoire de Magister en mathématiques appliquées. Département Recherche Opérationnelle, Juin 2011.
6. O. Lekadir and D. Aïssani. Strong Stability in a Jackson Network. J. Theory of Probab. and Math. Stat., 77 :86-98, 2007.
7. O. Lekadir and D. Aïssani. Approximation de Deux Files d'Attente en Série avec Blocage et Priorité Relative. In Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine, Algérie, pages 67-70, Octobre 2008.
8. O. Lekadir and D. Aïssani. Stability of Two-Stage Queues with Blocking. In the Book "Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences", H.A. Le Thi, P. Bouvry and T. Pham Dinh (Eds), series CCIS 14 (Communications in Computer and Information Sciences), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pages 526-535, September 2008.
9. O. Lekadir and D. Aïssani. Error Bounds on Practical Approximation for Two Tandem Queues with Non-Preemptive Priority. Computers and Mathematics with Applications, 61 :1810-1822, 2011.
10. Z. Retchkiman (2005). Stability theory for a class of dynamical systems modeled with Petri nets. International Journal of Hybrid Systems, Vol 4, No 1.
11. Z. Retchkiman (1999). From Stability to the Stabilization problem of Discrete event Systems modeled by Petri Nets, American Control Conference'99, San Diego, Cal..