الحل الإجمالي و سلوكه اللانهائي لجملة معادلات تفاضلية لنموذج المنافسة مع الانتشار والتنقل

Globa solution to the equation system of competition with transport and diffusion and its asymptotic behavior

قريشي فرحوح[1]، هيساو فوجيتا ياشيما [2]، درويش بشرى [3]

[1] المدرسة العليا للأساتذة القبة (الجزائر)، farhouh.korichi@g.ens-kouba.dz

[2] المدرسة الوطنية العليا للرياضيات سيدي عبد الله (متقاعد من جامعة تورينو إيطاليا)، hisao.yashima@yandex.com

المدرسة العليا للأساتذة القبة (الجزائر)، droueche.bouchra96@g.ens-kouba.dz

تاريخ الإرسال: 2026/03/19 تاريخ القبول:2026/05/21 تاريخ النشر: جويلية/2026

ملخص:

نعتبر نموذج فصيلتين متنافستين في ميدان توري $\mathbb{T}$ذو بعد 2 او 3 ، أي في الفضاء$\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ مع الدورية بالنسبة لكل اتجاهات الفضاء، مع وجود ظاهرة الانتشار والتنقل للفصيلتين أين سوف نبرهن تحت شرط عام كفاية على معاملات المسألة، نظرية وجود ووحدانية الحلالإجمالي. بشكل أدق سوف نبرهن أنه في كل لحظة $t \geq 0$ الحل ينتمي إلى الفضاء $H^2(\mathbb{T})$.وتحت شرط كون الشروط الابتدائية موجبة تماما عند كل نقطة من الميدان التوري$\mathbb{T}$فإن الحلول موجبة تماما عند كل نقطة من $\mathbb{T}$، بالإضافة إلى كونها محدودة بانتظام.من وجهة النظر التقنية، من كوننا نعتبر جملة المعادلات على ميدان $\mathbb{T}$ ، فإننا نستعمل سلاسل فورييه الشيء الذي سوف يسمح لنا بكتابة برهاننا بشكل أنيق بمافيه الكفاية.علاوة على ذلك، لإثبات المحدودية بانتظام للحل وكذا كونها موجبة نستعمل فكرة مبدأ الحد الأعلى.

الكلمات مفتاحية: الحل الإجمالي، جملة التنافس، ديناميكية السكان، الانتشار -التنقل

المؤلف المرسل: قريشي فرحوح، الإيميل المهني: farhouh.korichi@g.ens-kouba.dz

Résumé :

Dans le présent travail nous considérons le modèle de compétition de deux espècesdans le tore $\mathbb{T}$ de dimension 2 ou 3, c'est-à-dire dans l'espace $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$avec la périodicitépar rapport à toutes les directions d'espace, avec diffusion et déplacement et démontrons le théorème d'existence et unicité de la solution globale sous une condition suffisamment générale sur les coefficients. Plus précisément nous montrons qu'à chaque instant $t \geq 0$la solution appartient à $H^2(\mathbb{T})$et que, sous l'hypothèse de la positivité stricte `a tous lespoints de $\mathbb{T}$ de la donnéeinitiale, la solution est strictement positive en tous les points de$\mathbb{T}$. En outre, on montre qu'elle est uniformémentbornée. Du point de vue technique, vu que nous considérons les équations dans le domaine$\mathbb{T}$, nous utilisons la série deFourier, ce qui nous permet d'écrire notre raisonnementd'une manièresuffisammentélégante. En outre,pour montrer la bornitude uniforme et lapositivité de la solution, nous utilisons l'idée du principe du maximum.

Mots clés : solution globale, Système de compétition, dynamique de population, diffusion-transport.

مدخل:

كما هو معروف (انظر [6]), فإن النموذج الأساسي لتغير عدد كان فصيلتين متنافستين يتم صياغته من خلال جملة المعادلات

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N_1(t) = \alpha N_1(t) - \beta N_1(t)N_2(t) - \mu(N_1(t))^2 \\ \frac{d}{dt}N_2(t) = \gamma N_2(t) - \delta N_1(t)N_2(t) - \nu(N_2(t))^2 \end{cases}$$

حيث $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\mu.\nu$ثوابت موجبة تماما. في حالة ما

$$\alpha\nu > \beta\gamma, \qquad \gamma\mu > \alpha\delta$$

فإنه يوجد نقطة توازن مستقرة $(\overline{N_1^*}.\overline{N_2^*}) = \left(\frac{\alpha\nu-\beta\gamma}{\mu\nu-\beta\delta}; \frac{\gamma\mu-\alpha\delta}{\mu\nu-\beta\delta}\right)$حيث $\overline{N_1^*} > 0$ و $\overline{N_2^*} > 0$وجميع الحلول$(N_1(t).N_2(t))$ لجملة المعادلات تحت الشرط الابتدائي

$$N_1(0) = N_{1,0}, \quad N_2(0) = N_{2,0}, \quad N_{1,0} > 0, \quad N_{2,0} > 0,$$

متقاربة نحو نقطة التوازن $(\overline{N_1^*}.\overline{N_2^*})$.يمكن تعميم هذا المخطط دون صعوبة كبيرة في حالة جملة معادلات لتنافس n نوع من الفصائل من اجل n عدد طبيعي .

في هذا النموذج يمثل $N_2(t)$و$N_1(t)$ العدد الكلي لأفرادفصيلة ما في منطقة ما. إذا لم يكن عدد أفراد فصيلة معينة موزعا بشكل متجانس في منطقة معينة وإذا كنا مهتمين بالتغير في عدد السكان في كل جزء من المنطقة مع إمكانية ظاهرة الانتشار فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار المسائل من الشكل

$$\begin{cases} \partial_t N_1(t,x) = \kappa_1 \Delta N_1(t,x) + \alpha N_1(t,x) - \beta N_1(t,x) N_2(t,x) - \mu (N_1(t,x))^2 \\ \partial_t N_2(t,x) = \kappa_2 \Delta N_2(t,x) + \gamma N_2(t,x) - \delta N_1(t,x) N_2(t,x) - \nu (N_2(t,x))^2 \end{cases}.$$

تمت دراسة هذا النموذج في [2] كما يمكن الاطلاع على [1] بينما تم في المرجع [5] دراسة هذه المسألة مزودة باضطراب عشوائي، أين تم إثبات وجود ووحدانية الحلول كما تم في [3]إثبات وجود القياس الغير متغير.

من جهة أخرى جذبت نماذج ديناميكيات السكان مع التنقلات (الهجرات) انتباه الباحثين خاصة في السنوات الأخيرة كما هو الحال في [8]، [4]كما تم تحديدا في [7] دراسة نموذج المنافسة بين نوعين في بيئة متجانسة أحادية البعد ذات تدفق أحادي الاتجاه.

في هذا العمل نعتبر نموذج فصيلتين متنافستين في ميدان توري $\mathbb{T}$ذو بعد 2 او 3 ، أي في الفضاء$\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ مع الدورية بالنسبة لكل اتجاهات الفضاء، مع وجود ظاهرة الانتشار والتنقل للفصيلتين أين سوف نبرهن تحت شرط عام كفاية على معاملات المسألة، نظرية وجود ووحدانية الحل الإجمالي . بشكل أدق سوف نبرهن أنه في كل لحظة $t \geq 0$ الحل ينتمي إلى الفضاء $H^1(\mathbb{T})$،وتحت شرط كون الشروط الابتدائية موجبة تماما عند كل نقطة من الميدان التوري$\mathbb{T}$فإن الحلول موجبة تماما عند كل نقطة من $\mathbb{T}$، بالإضافة إلى كونها محدودة بانتظام.

من وجهة النظر التقنية، من كوننا نعتبر جملة المعادلات على ميدان $\mathbb{T}$, فإننا نستعمل سلاسل فوريه الشيء الذي سوف يسمح لنا بكتابة برهاننا بشكل أنيق بمافيه الكفاية.علاوة على ذلك، لإثبات المحدودية بانتظام للحل وكذا كونها موجبة نستعمل فكرة مبدأ الحد الاعلى.هذا العمل سيتبع بإذن الله بمقال ثان الذي سنثبت من خلاله أنه في حالة ما كانت توابع التنقل ν_2,ν_1 صغيرة نسبيا وحتى مع الاضطرابات الناتجة عن التنقل فإن المعاملات $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu$تحقق شرط مماثل لشرط وجود نقطة التوازن المستقرة المذكورة في الأعلى، فإنه يوجد حل مستقر. وفي حالة ما كانت الشروط الابتدائية موجودة في جوار الحل المستقر فإن الحل متقارب نحو الحل المستقر لما $t \to \infty$.

2 نتيجة أساسية:

نعتبر جملة المعادلات

$$\begin{cases} \partial_t N_1(t,x) = -\nabla \cdot (N_1 v_1) + \kappa_1 \Delta N_1 + \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 - \mu N_1^2 \\ \partial_t N_2(t,x) = -\nabla \cdot (N_2 v_2) + \kappa_2 \Delta N_2 + \gamma N_2 - \delta N_1 N_2 - \nu N_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

من أجل $t \geq 0$ على التور ثنائي أو ثلاثي البعد $\mathbb{T} = (\mathbb{R}/2\pi)^d$ ، $d=2$ أو 3 ، مع الشرط الابتدائي

$$N_1(0,x) = N_{1,0}(x), \quad N_2(0,x) = N_{2,0}(x) x \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

إن اعتبار المشكل (1) و (2) على التور $\mathbb{T}$ يعني أننا نفترض أن التوابع $v_1(t,x)$، $v_2(t,x)$، $N_{1,0}(x)$ و $N_{2,0}(x)$ تحقق الشروط

$$v_1(t, x + 2\pi\vec{e}_i) = v_1(t,x), v_2(t, x + 2\pi\vec{e}_i) = v_2(t,x), \quad N_{1,0}(x) = N_{1,0}(x + 2\pi\vec{e}_i), \quad (3)$$

$$N_{2,0}(x) = N_{2,0}(x + 2\pi\vec{e}_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, d$$

ونبحث عن الحل $N_1(t,x)$ و $N_2(t,x)$ بحيث

$$N_1(t,x) = N_1(t, x + 2\pi\vec{e}_j), \quad N_2(t,x) = N_2(t, x + 2\pi\vec{e}_j)$$

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, d.$$

حيث $\vec{e}_i$ هو الشعاع الذي تكون فيه المركبة i تساوي 1 ومركباته الأخرى صفرا.

نفرض أن β و δ ثوابت موجبة و $\kappa_2, \kappa_1, \nu, \mu, \gamma, \alpha$ هي ثوابت موجبة تماما، و $v_1(t,x)$ و $v_2(t,x)$ توابع ل t و x.

لدينا النظرية التالية:

نظرية 1

نفرض أن β و δ ثوابت موجبة و $\kappa_2, \kappa_1, \nu, \mu, \gamma, \alpha$ ثوابت موجبة تماما و

$$N_{1,0}, N_{2,0} \in H^2(\mathbb{T}), \quad \min_{x \in \mathbb{T}} N_{1,0}(x) > 0, \quad \min_{x \in \mathbb{T}} N_{2,0} > 0, \quad (4)$$

$$v_1, v_2 \in L^\infty\left(0, \infty; W_p^1(\mathbb{T})\right), \quad (5)$$

حيث $p > 2$ إذا كان $d = 2$ و $p \geq 3$ إذا كان $d = 3$. إذًا المشكل (1)_(2) يقبل حلا إجماليا

$$(N_1(t,x), N_2(t,x)) \in L^\infty_{loc}(0, \infty; H^2(\mathbb{T})) \times L^\infty_{loc}(0, \infty; H^2(\mathbb{T}))$$ ووحيد بحيث

$$N_1(t,x) > 0, \quad N_2(t,x) > 0 \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{T} \quad (6)$$

$$\sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{T}} N_1(t,x) < \infty, \quad \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{T}} N_2(t,x) < \infty \quad (7)$$

في هذه النظرية يمكننا تخفيف الشرط على $(N_{1,0}, N_{2,0})$. ومع ذلك، بما أننا في هذا العمل نهتم بالسلوك اللانهائي للحل عندما

$t \to \infty$، ومن أجل تبسيط الحساب نفرض $N_{1,0}, N_{2,0} \in H^2(\mathbb{T})$.

3الحل المحلي

نبرهن أولا نظرية وجود ووحدانية الحل المحلي .

توطئة1

نفرض أن فرضيات النظرية1 محققة . إذن يوجد $\bar{t} > 0$ بحيث جملة المعادلات (1) مع الشرط الابتدائي (2) تقبل حل وحيد في الفضاء $L^\infty\left(0, \bar{t}; H^2(\mathbb{T})\right)$.

إثبات

نضع

$$\begin{cases} F_1(N_1, N_2) = -\nabla \cdot (N_1 v_1) - \beta N_1 N_2 - \mu N_1^2 \\ F_2(N_1, N_2) = -\nabla \cdot (N_2 v_2) - \delta N_1 N_2 - \nu N_2^2 \end{cases} \quad (8)$$

ونعتبر جملة المعادلات الخطية

$$\begin{cases} \partial_t N_1 = \alpha N_1 + \kappa_1 \Delta N_1 + F_1(N_1, N_2) \\ \partial_t N_2 = \gamma N_2 + \kappa_2 \Delta N_2 + F_2(\bar{N_1}, \bar{N_2}) \end{cases} \quad (9)$$

مع الشرط الابتدائي (2)، حيث $(\bar{N_1}, \bar{N_2})$ ثنائية معطات من عناصر $L^\infty_{loc}(0,\infty; H^2(\mathbb{T}))$. من أجل تبسيط الحساب، ندخل نظيم فضاء سوبولاف$H^m(\mathbb{T})$، $m = 0,1,2$،

$$\|\varphi\|_{H^m(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + |k|^{2m}) |C_k(\varphi)|^2 \right)^{1/2}, \quad (10)$$

حيث

$$|k|^2 = \sum_{j=1}^{d} k_j^2 , \quad k = (k_1 \dots . k_d) \in \mathbb{Z}^d,$$

$$C_k(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) e^{-ik \cdot x} dx.$$

نذكر أن النظيم المعطى من (10) يكافئ النظيم الاعتيادي لـ $H^m(\mathbb{T})$.

علاوة على ذلك، نرى بوضوح أن مجموعة التوابع المعرفة على $\mathbb{T}$ بقيم حقيقيةالتي لها النظيم $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{T})}$ المنتهي تشكل فضاء جزئي من فضاء هلبرت المركب $H^m(\mathbb{T})$ للتوابع ذات القيم العقدية .

ولهذا نتفق على كتابة $H^m(\mathbb{T})$ كفضاء جزئي المكون من توابع ذات قيم حقيقية ($H^0(\mathbb{T})$تكتب$L^2(\mathbb{T})$) ، حتى لو كانت معاملات فوريه $C_k(\varphi)$ لعناصرها φ أعدادًا مركبة؛

نلاحظ أنه بالنسبة للتوابع φ ذات القيم الحقيقية ، لدينا:

$$C_k(\varphi)+C_{-k}(\varphi)\in\mathbb{R},\qquad i\big(C_k(\varphi)-C_{-k}(\varphi)\big)\in\mathbb{R}; \tag{11}$$

هذه العلاقات تميز معاملات فوريه للتوابع ذات القيم الحقيقية .

نلاحظ من قواعد ضرب عناصر فضاءات سوبولاف والشرط (5) ، يوجد ثابت C بحيث

$$\begin{cases}\|F_1(\bar N_1,\bar N_2)\|_{H^2(\mathbb{T})}\le C\|\bar N_1\|_{H^2(\mathbb{T})}\big(1+\|\bar N_1\|_{H^2(\mathbb{T})}+\|\bar N_2\|_{H^2(\mathbb{T})}\big),\\ \|F_2(\bar N_1,\bar N_2)\|_{H^2(\mathbb{T})}\le C\|\bar N_2\|_{H^2(\mathbb{T})}\big(1+\|\bar N_1\|_{H^2(\mathbb{T})}+\|\bar N_2\|_{H^2(\mathbb{T})}\big).\end{cases} \tag{12}$$

نفرض أن$\bar N_1,\bar N_2\in L^\infty_{loc}\big(0,\infty;H^2(\mathbb{T})\big)$. إذًا بالنظر إلى (12) ، يمكن تفكيك $F_1(\bar N_1,\bar N_2)$ و$F_2(\bar N_1,\bar N_2)$ إلى سلسلة فوريه، بحيث يتم تفكيك المعادلتين في (9) إلى عائلة من المعادلات التفاضلية الخطية لمعاملات فوريه

$$\begin{aligned}&C_k^{[i]}(t)=C_k\big(N_i(t,\cdot)\big),\qquad k\in\mathbb{Z},\qquad i=1,2.\\ &\begin{cases}\frac{d}{dt}C_k^{[1]}(t)=(\alpha-|k|^2\kappa_1)C_k^{[1]}(t)+C_k\big(F_1(t)\big),\\ \frac{d}{dt}C_k^{[2]}(t)=(\delta-|k|^2\kappa_2)C_k^{[2]}(t)+C_k\big(F_2(t)\big)\end{cases}\end{aligned} \tag{13}$$

مع الشروط الابتدائية

$$\begin{cases}C_k^{[1]}(0)=C_k(N_{1,0}),\\ C_k^{[2]}(0)=C_k(N_{2,0}).\end{cases} \tag{14}$$

نلاحظ أن حل مسألة كوشي (13)_(14) معطى بـ

$$\begin{cases}C_k^{[1]}(t)=C_k(N_{1,0})e^{(\alpha-\kappa_1|k|^2)t}+\int_0^t C_k\big(F_1(s)\big)e^{(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds,\\ C_k^{[2]}(t)=C_k(N_{2,0})e^{(\gamma-\kappa_2|k|^2)t}+\int_0^t C_k\big(F_2(s)\big)e^{(\gamma-\kappa_2|k|^2)(t-s)}ds.\end{cases} \tag{15}$$

ومنه انطلاقا من معاملات فوريه $C_k^{[1]}(t)$ و $C_k^{[2]}(t)$ المحددة بهذا الشكل يمكن تعريف التوابع

$$N_1(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}C_k^{[1]}(t)\,e^{ik\cdot x},\quad N_2(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}C_k^{[2]}(t)\,e^{ik\cdot x}, \tag{16}$$

التي تحقق المعادلات(9) والشرط الابتدائي (2).

من (15) نستنتج أولا أن

$$\begin{aligned}\big|C_k^{[1]}(t)\big|^2&\le 2\big|C_k(N_{1,0})\big|^2e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)t}+2\left|\int_0^t C_k\big(F_1(s)\big)e^{(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds\right|^2\\ &\le 2\big|C_k(N_{1,0})\big|^2e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)t}+2\int_0^t\big|C_k\big(F_1(s)\big)\big|^2ds\int_0^t e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds\end{aligned}$$

من كون

$$\int_0^t e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds\le\frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha t}-1)\equiv\bar M^{(0)}(t)\qquad\forall k\in\mathbb{Z}^d,$$

عند حساب المجموع من أجل $k \in \mathbb{Z}^d$ ، نجد

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left|C_k^{[1]}(t)\right|^2 \le 2e^{2\alpha t}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left|C_k(N_{1,0})\right|^2 + 2\,\bar{M}^{(0)}(t)\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left|C_k(F_1(s))\right|^2 ds. \qquad (17)$$

من (15) نستنتج أيضا أن

$$|k|^4\left|C_k^{[1]}(t)\right|^2 \le 2|k|^4\left|C_k(N_{1,0})\right|^2 e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)t} + 2|k|^4\left|\int_0^t C_k(F_1(s))e^{(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds\right|^2 \le$$

$$\le 2|k|^4\left|C_k(N_{1,0})\right|^2 e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)t} + 2\int_0^t |k|^2\left|C_k(F_1(s))\right|^2 ds\int_0^t |k|^2 e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds.$$

نلاحظ أنه يوجد تابع مستمر ومتزايد $M_1(t)$ حيث من أجل $|k|^2 \le \frac{\alpha}{\kappa_1}+1$ لدينا

$$\int_0^t |k|^2 e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds \le M_1(t).$$

من جهة أخرى ، يوجد ثابت M_2 حيث من أجل $|k|^2 > \frac{\alpha}{\kappa_1}+1$ لدينا

$$\int_0^t |k|^2 e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)(t-s)}ds = \frac{|k|^2}{\kappa_1|k|^2-\alpha}\left(1-e^{2(\alpha-\kappa_1|k|^2)t}\right) \le M_2.$$

إذًا، بوضع $\bar{M}^{(1)}(t) = \max\{M_1(t), M_2\}$ وحساب المجموع من أجل $k \in \mathbb{Z}^d$، نجد

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^4\left|C_k^{[1]}(t)\right|^2 \le 2e^{2\alpha t}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^4\left|C_k(N_{1,0})\right|^2 + 2\bar{M}^{(1)}(t)\int_0^t\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^2\left|C_k(F_1(s))\right|^2 ds. \qquad (18)$$

من (10) ، (17) و (18) نحصل على

$$\|N_1(t)\|^2_{H^2(\mathbb{T})} \le 2e^{2\alpha t}\|N_{1,0}\|^2_{H^2(\mathbb{T})} + 2\,\bar{M}(t)\int_0^t \|F_1(s)\|^2_{H^2(\mathbb{T})}\,ds \qquad (19)$$

مع $\bar{M}(t) = \{\bar{M}^{(0)}(t), \bar{M}^{(1)}(t)\}$. وبنفس الطريقة نحصل على

$$\|N_2(t)\|^2_{H^2(\mathbb{T})} \le 2e^{2\gamma t}\|N_{2,0}\|^2_{H^2(\mathbb{T})} + 2\,\bar{M}(t)\int_0^t \|F_2(s)\|^2_{H^2(\mathbb{T})}\,ds; \qquad (20)$$

في (20)، $\bar{M}(t)$ ليست بالضرورة متطابقة مع الوارد في (19) ، لكنها من نفس الطبيعة.

من (19)_(20) ، ينتجأن الحل (N_1, N_2) للمشكل (9)،(2) موجود وينتمي إلى $L^\infty_{loc}(0,\infty; H^2(\mathbb{T}))$.

لنثبت الآن أنه يوجد $\bar{t} > 0$ بحيث المؤثر اللذي يرفق بكل $(\bar{N}_1.\bar{N}_2) \in L^\infty(0,\bar{t}; H^2(\mathbb{T})) \times L^\infty(0,\bar{t}; H^2(\mathbb{T}))$ ، الحل (N_1, N_2)للمسألة (9)،(2) يقبل نقطة صامدة .

لتبسيط الكتابة ذ ُدخل الترميز

$$\|(\varphi_1,\varphi_2)\|_{H^m(\mathbb{T})} = \left(\|\varphi_1\|^2_{H^m(\mathbb{T})} + \|\varphi_2\|^2_{H^m(\mathbb{T})}\right)^{1/2}. \qquad (21)$$

إذًا من (19)_(20) نستنتج أنه يوجد $\bar{t}_1 > 0$ بحيث مهما يكن $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)$ تحقق المتباينة

$$\sup_{0\le t\le 1}\|(\bar{N}_1(t,\cdot),\bar{N}_2(t,\cdot))\|_{H^2(\mathbb{T})}\le 4\left\|(N_{0,1},N_{0,2})\right\|_{H^2(\mathbb{T})},$$

لدينا

$$\sup_{0\le t'\le \bar{t}_1}\|(N_1(t',\cdot),N_2(t',\cdot))\|_{H^2(\mathbb{T})}\le 4\left\|(N_{0,1},N_{0,2})\right\|_{H^2(\mathbb{T})},$$

هذا الاستدلال يضمن لنا أيضا أنه من أجل $0\le t'\le \bar{t}_1$ ، إذا كان

$$\sup_{0\le t'\le t}\|(\bar{N}_1(t',\cdot),\bar{N}_2(t',\cdot))\|_{H^2(\mathbb{T})}\le 4\left\|(N_{0,1},N_{0,2})\right\|_{H^2(\mathbb{T})},$$

فإنه لدينا

$$\sup_{0\le t'\le t}\|N_1(t',\cdot),N_2(t',\cdot)\|_{H^2(\mathbb{T})}\le 4\left\|(N_{0,1},N_{0,2})\right\|_{H^2(\mathbb{T})},$$

لنعتبر الآن أنه من أجل كل $t\in]0.\bar{t}_1]$ ثنائية من التوابع المعطاة $\left(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)}\right)$و $\left(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)}\right)$بحيث

$$\sup_{0\le t'\le t}\left\|\bar{N}_1^{(i)}(t',\cdot),\bar{N}_2^{(i)}(t',\cdot)\right\|_{H^2(\mathbb{T})}\le 4\left\|(N_{0,1},N_{0,2})\right\|_{H^2(\mathbb{T})},\qquad i=1,2, \tag{22}$$

والفرق بين الحل $\left(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)}\right)$ والحل $\left(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)}\right)$ لجملة المعادلات (9) مع

$F_i=F_i\left(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)}\right), i=1,2$ و $F_i=F_i\left(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)}\right),\ i=1,2$ على التوالي. نضع

$$E_1=\bar{N}_1^{(1)}-\bar{N}_1^{(2)},E_2=\bar{N}_2^{(1)}-\bar{N}_2^{(2)},$$

نرى بسهولة أن E_1 وE_2 يحققان المعادلتين

$$\begin{cases}\partial\square E_1=\alpha E_1+\kappa_1\Delta E_1+F_1(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)})-F_1(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)})\\ \partial\square E_2=\gamma E_2+\kappa_2\Delta E_2+F_2(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)})-F_2(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)})\end{cases} \tag{23}$$

والشروط الابتدائية

$$E_1(0,x)=0,E_2(0,x)=0 \tag{24}$$

بنفس الطريقة المستخدمة في (9)، (2) ، يمكن التعبير عن E_1 وE_2 بالشكل

$$E_1(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}C_k(E_1;t)e^{ix\cdot k},\quad E_2(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}C_k(E_2;t)e^{ix\cdot k}, \tag{25}$$

$$C_k(E_i;t)=\int_0^t C_k\left(F_i^{(1)}-F_i^{(2)}\right)(s)e^{(\alpha-|k|^2\kappa_1)(t-s)}ds,\qquad i=1,2,$$

حيث $F_i^{(1)}=F_i\left(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)}\right)$ ، $F_i^{(2)}=F_i\left(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)}\right)$ و $C_k\left(F_i^{(1)}-F_i^{2}\right)(s)$هي معاملات فوريه لـ $F_i^{(1)}(s,x)-F_i^{2}(s,x)$. لذلك مع الأخذ بالاعتبار (24) والعلاقة

$$\left\|F_i\left(\bar{N}_1^{(1)},\bar{N}_2^{(1)}\right)-F_i\left(\bar{N}_1^{(2)},\bar{N}_2^{(2)}\right)\right\|_{H^2(\mathbb{T})}^2\le C\left(\left\|\bar{N}_1^{(1)}-\bar{N}_1^{(2)}\right\|_{H^2(\mathbb{T})}^2+\left\|\bar{N}_2^{(1)}-\bar{N}_2^{(2)}\right\|_{H^2(\mathbb{T})}^2\right)$$

مع ثابت C ناجم من الشرط (22) ، بطريقة مماثلة للحصول على (19)_(20) نجد

$$\sup_{0\le s\le t}\|E_i(s,\cdot)\|^2_{H^2(\mathbb{T})}=\sup_{0\le s\le t}\left\|N_i^{(1)}(s,\cdot)-N_i^{(2)}(s,\cdot)\right\|^2_{H^2(\mathbb{T})}\le$$

$$\le \bar{M}(t)\int_0^t\left\|F_i^{(1)}(s,\cdot)-F_i^{(2)}(s,\cdot)\right\|^2_{H^2(\mathbb{T})}\,ds\le$$

$$\le tC\bar{M}(t)\sup_{0\le s\le t}\left(\left\|\bar{N}_1^{(1)}(s,\cdot)-\bar{N}_1^{2}(s,\cdot)\right\|^2_{H^2(\mathbb{T})}+\left\|\bar{N}_2^{1}(s,\cdot)-\bar{N}_2^{2}(s,\cdot)\right\|^2_{H^2(\mathbb{T})}\right)$$

من أجل $i=1,2$. باختيار $t=\bar{t}>0$ بحيث $2\bar{t}C\bar{M}(\bar{t})<1$ ، ينتج أن المؤثر الذي يرفق

$(\bar{N}_1,\bar{N}_2)\in L^\infty(0.\bar{t};\ H^2(\mathbb{T}))$ بالحل $(N_1.N_2)\in L^\infty(0.\bar{t};\ H^2(\mathbb{T}))$ للمشكل (9)،(2) هو تقلصي،

ما يعني أن المشكل (1)_(2) يقبل حلا وحيدا في الفترة الزمنية $[0.\bar{t}]$، تم إثبات التوطئة.

4 تقدير الحد الأعلى

لإثبات وجود ووحدانية الحل العام، نثبت أولا ، بشرط وجود الحل (N_1,N_2) حل المشكل (1)_(2)،

$N_1(t,x)$ و $N_2(t,x)$ محدودتان من الأعلى بثابت مستقل عن t و x .

توطئة 2

نفرض أن فرضيات النظرية الأولى محققة . لتكن (N_1,N_2) حل المشكل (1)_(2). إذا يوجد ثابتين

$M_1^+>0$ و $M_2^+>0$ بحيث

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}N_1(t,x)\le M_1^+,\qquad \sup_{x\in\mathbb{T}}N_2(t,x)\le M_2^+ \tag{26}$$

على كل ميدان وجود الحل (N_1,N_2).

كما سيتضح لنا بسهولة ، من إثبات التوطئة تنتج لنا أيضا الخاصية التالية.

ملاحظة 1

إذا كان الحل(N_1,N_2) موجود من أجل كل $t\ge 0$ ، إذًا لدينا

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{T}}N_1(t,x)\le\frac{\alpha+C_{v_1}^{[-]}}{\mu},\qquad \limsup_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{T}}N_2(t,x)\le\frac{\gamma+C_{v_2}^{[-]}}{\nu}, \tag{27}$$

حيث

$$C_{v_1}^{[-]}=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}}\left(-\nabla\cdot v_1(t,x)\right),\quad C_{v_2}^{[-]}=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}}\left(-\nabla\cdot v_2(t,x)\right).$$

إثبات التوطئة 2

نكتب المعادلة الأولى الواردة في المسألة (1) على الشكل:

$$\partial_t N_1(t,x) = -N_1\nabla\cdot v_1 - v_1\cdot\nabla N_1 + \kappa_1\Delta N_1 + \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 - \mu N_1^2$$

ونفرض $C_1 = \frac{\alpha + C_{v_1}^{[-]}}{\mu}$، حيث $C_{v_1}^{[-]}$ هو الثابت المعرف أعلاه.

بداية، نفرض أن

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} N_{0,1}(t,x) \leq C_1$$

ولنعتبر العددين $\tau > 0$ و $\varepsilon > 0$. نفرض بالخلف أنه توجد نقطة $(t^*,x^*) \in [0,\tau]\times\mathbb{T}$ بحيث

$$N_1(t^*,x^*) = \max_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{T}} N_1(t,x) \geq C_1 + \varepsilon.$$

في هذه الحالة لدينا

$$\nabla N_1(t^*,x^*) = 0, \qquad \Delta N_1(t^*,x^*) \leq 0,$$

ومنه من تعريف C_1 لدينا

$$\partial_t N_1(t^*,x^*) = -(\nabla\cdot v_1)N_1(t^*,x^*) + \alpha N_1(t^*,x^*) - \beta N_1(t^*,x^*)N_2(t^*,x^*) - \mu N_1(t^*,x^*)^2 \leq$$
$$\leq -(\nabla\cdot v_1)N_1(t^*,x^*) + \alpha N_1(t^*,x^*) - \mu N_1(t^*,x^*)^2 < 0.$$

إذًا سيكون هناك $t' < t^*$ بحيث

$$N_1(t',x^*) > N_1(t^*,x^*),$$

وهذا تناقض مع الفرض $N_1(t^*,x^*) = \max_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{T}} N_1(t,x)$.

وبالنظر أيضا إلى الاختيار الكيفي لـ $\varepsilon > 0$ و $\tau > 0$، نستنتج أن

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} N_{0,1}(t,x) \leq C_1 \quad \forall t \geq 0.$$

في حالة

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} N_{0,1}(t,x) > C_1,$$

نعتبر التابع

$$\eta(t) = \frac{\alpha + C_{v_1}^{[-]}}{\mu + \left(\frac{\alpha + C_{v_1}^{[-]}}{\eta_0} - \mu\right)e^{-\left(\alpha + C_{v_1}^{[-]}\right)t}}, \qquad \eta_0 = \sup_{x\in\mathbb{T}} N_{0,1}(t,x),$$

وهو حل لمسألة كوشي

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \left(\alpha + C_{v_1}^{[-]}\right)\eta(t) - \mu\eta^2(t), \qquad \eta(0) = \eta_0.$$

كما سبق ، نعتبر عددين $\varepsilon > 0$ و $\tau > 0$، ونفرض بالخلف أنه توجد نقطة $(t^*,x^*) \in [0,\tau]\times\mathbb{T}$ بحيث

$$N_1(t^*,x^*) - \eta(t) = \max_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{T}}(N_1(t,x) - \eta(t)) \geq \varepsilon$$

في هذه الحالة أيضا لدينا

$$\nabla N_1(t^*,x^*) = 0, \qquad \Delta N_1(t^*,x^*) \leq 0.$$

لدينا إذن

$$\partial_t N_1(t^*,x^*) = -(\nabla\cdot v_1)N_1(t^*,x^*) + \alpha N_1(t^*,x^*) - \beta N_1(t^*,x^*)N_2(t^*,x^*) - \mu N_1(t^*,x^*)^2 \leq$$
$$\leq \left(\alpha + C_{v_1}^{[-]}\right)N_1(t^*,x^*) - \mu N_1(t^*,x^*)^2.$$

من تعريف التابع $\eta(t)$ ومن الفرض $N_1(t^*,x^*) - \eta(t) \geq \varepsilon > 0$، ينتج أن

$$\partial_t N_1(t^*,x^*) \leq \left(\alpha + C_{v_1}^{[-]}\right)N_1(t^*,x^*) - \mu N_1(t^*,x^*)^2 \leq \frac{d}{dt}\eta(t^*);$$

ومنه يوجد $t' < t^*$ بحيث

$$N_1(t',x^*) - \eta(t') > N_1(t^*,x^*) - \eta(t^*),$$

وهذا ما يناقض الفرض $N_1(t^*,x^*) - \eta(t^*) = \max_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{T}}(N_1(t,x) - \eta(t))$.

وبالنظر أيضا إلى الاختيار الكيفي لـ $\varepsilon > 0$ و $\tau > 0$ نستنتج أن

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} N_1(t,x) \leq \eta(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

وبالتالي، من كون $\eta(t)$ تابع متزايد يؤول إلى C_1 ، نستنتج صحة التوطئة من أجل N_1 .

وبنفس الإثبات نستنتج صحة التوطئة من أجل N_2. تم إثبات التوطئة.

5 تقدير الحد الأدنى

سنبرهن الآن أن $N_1(t,x)$ و $N_2(t,x)$ محدودان من الأسفل بتابع للمتغير t موجبتماما.

توطئة 3

نفرض أن فرضيات النظرية 1 محققة. ليكن (N_1,N_2) حل المشكل (1)-(2) ، وعليه يوجد

ثابتان $A_1,A_2 \geq 0$ بحيث

$$\inf_{x\in\mathbb{T}} N_1(t,x) \geq \inf_{x\in\mathbb{T}} N_{1,0}(x)e^{-A_1 t} \quad (28)$$

$$\inf_{x\in\mathbb{T}} N_2(t,x) \geq \inf_{x\in\mathbb{T}} N_{2,0}(x)e^{-A_2 t}, \quad (29)$$

مهما يكن t أين الحل (N_1,N_2) موجود.

إثبات

نضع

$$C_{v_1}^{[+]} = \sup_{x\in\mathbb{T}} \nabla \cdot v_1(x), \quad M_{10}^{-} = \inf_{x\in\mathbb{T}} N_{1,0}(x), \qquad A_1 = [C_{v_1}^{[+]} + \beta M_2^{+} - \alpha]^{+} + \mu M_{10}^{-},$$

حيث M_2^{+} هو الثابت الظاهر في العبارة (26) ،بينما $[r]^{+} = max\{r, 0\}$.

نعتبر المعادلة الأولى (1) مضروبة في $e^{A_1 t}$. كما

$$e^{A_1 t}\partial_t N_1 = \partial_t(e^{A_1 t}N_1) - A_1 e^{A_1 t}N_1,$$

لدينا المعادلة من أجل التابع $\varphi(t,x) = e^{A_1 t}N_1(t,x)$

$$\partial_t \varphi(t,x) = A_1\varphi(t,x) - \nabla\cdot\Big(\varphi(t,x)v_1(t,x)\Big) + \kappa\Delta\varphi(t,x) +$$

$$+\alpha\varphi(t,x) - \beta\varphi(t,x)N_2(t,x) - \mu\varphi(t,x)N_1(t,x).$$

نختار عددين $\tau > 0$ و $0 < \varepsilon < M_{10}^{-}$ ، ونفرض بالخلف أنه توجد نقطة (t^*,x) بحيث:

$$\varphi(t^*,x^*) = \min_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{T}} \varphi(t,x), \qquad \varphi(t^*,x^*) \leq M_{10}^{-} - \varepsilon.$$

كما أن $\varphi(x,t) \geq M_{10}^{-}$, في حال وجودنقطة$t^*$ لا يمكنإلا أن تكون $t^* > 0$.

وأيضا، عند هذه النقطة لدينا $\nabla\varphi(t^*,x^*) = 0$ و $\Delta\varphi(t^*,x^*) \geq 0$. لدينا إذن

$$\partial_t\,\varphi(t^*,x^*) \geq A_1\varphi(t^*,x^*) - \varphi(t^*,x^*)\nabla\cdot v_1 + \alpha\varphi(t^*,x^*) - \beta N_2\varphi(t^*,x^*) - \mu N_1\varphi(t^*,x^*).$$

لكن بما أن$\nabla\cdot v_1 \leq C_{v_1}^{[+]}$ و$N_2 \leq M_2^{+}$ ،من تعريفA_1ينتج أن :

$$\partial_t\,\varphi(t^*,x^*) \geq \mu(M_{10}^{-} - \inf_{x\in\mathbb{T}} N_1(t^*,x))\varphi(t^*,x^*)$$

لكن الفرض $\varphi(t^*,x^*) \leq M_{10}^{-} - \varepsilon$يستلزم أن:

$$N_1(t^*,x^*) = \inf_{x\in\mathbb{T}} N_1(t^*,x) \leq (M_{10}^{-} - \varepsilon)e^{-A_1 t} < M_{10}^{-},$$

إذًا

$$\partial_t\,\varphi(t^*,x^*) > 0,$$

تناقض مع الفرض $\varphi(t^*,x^*) = \min_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{T}}\varphi(t,x)$. نستنتج

$$\varphi(t,x) \geq M_{10}^{-} - \varepsilon \qquad \forall (t,x) \in [0,\tau]\times\mathbb{T}.$$

بما أن $\tau > 0$ و $0 < \varepsilon < M_{10}^{-}$ كيفيان، وبالنظر إلى تعريف $\varphi(t,x)$ نستنتج (28).

$$N_1(t,x) \geq M_{10}^{-}e^{-A_1 t}.$$

بنفس الطريقة نثبت المتباينة (29).تم إثبات التوطئة.

6 إثبات النظرية 1

لإثبات النظرية 1، نثبت أولا التوطئة الآتية.

توطئة 4

نفرض أن فرضيات النظرية 1 محققة. لتكن (N_1, N_2) حل للمشكل (1)-(2). إذن يوجد تابع متزايد $\Phi(\tau)(0 \leq \tau < \infty)$ بحيث

$$\sup_{0\le t\le T}\|N_i(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Gamma)}+\int_0^T\|N_i(t,\cdot)\|^2_{H^2(\Gamma)}\,dt\le\Phi(T),\quad i=1,2. \tag{30}$$

إثبات

بفرض

$$f_1=\alpha N_1-\beta N_1N_2-\mu N_1^2,\qquad f_2=\gamma N_2-\delta N_1N_2-\nu N_2^2,$$

نقوم بتفكيك المعادلة (1) إلى سلسلة فوريه ونستخدم نفس الترميزات المستعملة في إثبات التوطئة 1 ،

لدينا

$$\frac{d}{dt}C_k^{[i]}(t)=-\kappa_i|k|^2C_k^{[i]}(t)-C_k\big(\nabla\cdot(N_iv_i)\big)+C_k(f_i),\qquad i=1,2. \tag{31}$$

بما أن$C_0(\nabla\cdot(N_iv_i))=0$ من أجل $|k|=0$،نبسط المعادلة (31) إلى

$$\frac{d}{dt}C_0^{[i]}(t)=C_0(f_i),$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|C_0^{[i]}(t)\right|^2\le\frac{1}{2}\left|C_0^{[i]}(t)\right|^2+\frac{1}{2}|C_0(f_i)(t)|^2. \tag{32}$$

من جهة أخرى ، من أجل $|k|>0$ ، من (31) نحصل على

$$\frac{1}{2}(1+|k|^2)\frac{d}{dt}\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\kappa_i(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2=$$
$$=-(1+|k|^2)\overline{C_k^{[i]}(t)}C_k\big(\nabla\cdot(N_iv_i)\big)+(1+|k|^2)\overline{C_k^{[i]}(t)}C_k(f_i),$$

ومنه

$$\frac{1}{2}(1+|k|^2)\frac{d}{dt}\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\kappa_i(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2\le$$
$$\le(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right||k||C_k(N_iv_i)|+(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right||C_k(f_i)|\le$$
$$\le\frac{\kappa_i}{2}(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\frac{1}{\kappa_i}(1+|k|^2)|C_k(N_iv_i)|^2+\frac{1+|k|^2}{\kappa_i|k|^2}|C_k(f_i)|^2.$$

وهذا يعني، باعتبار العلاقة $\frac{1+|k|^2}{\kappa_i|k|^2}\le\frac{2}{\kappa_i}$ ، لدينا

$$\frac{1}{2}(1+|k|^2)\frac{d}{dt}\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\frac{1}{2}\kappa_i(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2\le \tag{33}$$
$$\le\frac{1}{\kappa_i}(1+|k|^2)|C_k(N_iv_i)|^2+\frac{2}{\kappa_i}|C_k(f_i)|^2.$$

نقوم بجمع المتباينتين (32) و (33) ، نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\frac{\kappa_i}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2 \leq \tag{34}$$

$$\leq\frac{1}{\kappa_i}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)|C_k(N_iv_i)|^2+\max\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{\kappa_i}\right\}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_k(f_i)|^2.$$

نُذكر أنه بموجب التوطئتين 1 و 2 ، الحل $((N_1(t,x),N_2(t,x))$ محدود بانتظام بشرط أن يكون موجودًا، وهذا يعني أنه يوجد ثابت C حيث $\|N_i(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leq C$ من أجل t داخل مجال وجود الحل. ينتج أنه يوجد ثابت C بحيث

$$\max\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{\kappa_i}\right\}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_k(f_i)(t)|^2\leq C.$$

من جهة أخرى ، الشرط (5) على v_i يسمح لنا باستعمال المتباينة

$$\frac{1}{\kappa_i}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)|C_k(N_iv_i)|^2\leq C\|N_i\|^2_{H^1(\mathbb{T})}=C\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2$$

مع ثابت C . وعليه، من (34) ينتج أن

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\frac{\kappa_i}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2\leq$$

$$\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+C \tag{35}$$

ومنه، بوضع

$$Y(t)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\int_0^t\frac{\kappa_i}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(s)\right|^2ds$$

لدينا

$$\frac{d}{dt}Y(t)\leq 2CY(t)+C.$$

نستنتج أن

$$\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k^{[i]}(t)\right|^2+\int_0^t\frac{\kappa_i}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)|k|^2\left|C_k^{[i]}(s)\right|^2ds\leq \tag{36}$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1+|k|^2)\left|C_k\left(N_{i,0}\right)\right|^2+\frac{1}{2}(e^{2Ct}-1)$$

مما يعطي (30) مع تابع متزايد $\Phi(\tau)$.تم إثبات التوطئة.

إثبات النظرية 1

من أجل إنهاء إثبات النظرية 1 يبقى إثبات أنه في أي مجال كيفي محدود$[0,\tau]$ نظيم للحل (N_1,N_2) $i=1,2$ ،$\|N_i(t,\cdot)\|_{H^2(\Gamma)}$ يبقى منتهي.

نستعمل الترميز(21) ونختار ثابت C بنفس الطريقة في (12)، لدينا

$$\frac{d}{dt}\|(N_1,N_2)\|^2_{H^2(\Gamma)} \leq (max\{\alpha,\delta\}+C)\|(N_1,N_2)\|^2_{H^2(\Gamma)} + C\|(N_1,N_2)\|^4_{H^2(\Gamma)},$$

ومنهوبوضع $\bar{\alpha}=\max\{\alpha,\delta\}+C$ ، نحصل على

$$t_0 \leq t < t_1 \text{ من أجل } \|(N_1,N_2)(t)\|^2_{H^2(\Gamma)} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{\|(N_1,N_2)(t_0)\|^2_{H^2(\Gamma)}}+\frac{C}{\bar{\alpha}}\right)e^{-\bar{\alpha}(t-t_0)}-\frac{C}{\bar{\alpha}}} \qquad (37)$$

حيث t_1 هي قيمة t التي تحقق المساواة

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{\bar{\alpha}}\log\left(1+\frac{\bar{\alpha}}{C\|(N_1,N_2)(t_0)\|^2_{H^2(\Gamma)}}\right) \qquad (38)$$

ولدينا

$$\lim_{t\to t_1}\frac{1}{\left(\frac{1}{\|(N_1,N_2)(t_0)\|^2_{H^2(\Gamma)}}+\frac{C}{\bar{\alpha}}\right)e^{-\bar{\alpha}(t-t_0)}-\frac{C}{\bar{\alpha}}} = +\infty, \qquad (39)$$

نلاحظ أن (37) تستلزم أن النظيم $\|(N_1,N_2)(t)\|^2_{H^2(\Gamma)}$لا يمكن ان يتزايد بشكل غير مستمر.ومنه، لا يوجد $t>0$ بحيث

$$\limsup_{s\to t^-}\|(N_1,N_2)(s)\|^2_{H^2(\Gamma)} = \infty, \qquad (40)$$

إذَا يمكننا التأكد أنه في أي مجال كيفي محدود $[0,\tau]$ نظيم $\|N_i(t,\cdot)\|_{H^2(\Gamma)}$ $i=1,2$ للحل (N_1,N_2)يبقى منتهي.

وعليه نفرض بالخلف أنه يوجد $t_1>0$ بحيث

$$\limsup_{s\to t_1^-}\|(N_1,N_2)(s)\|^2_{H^2(\Gamma)} = \infty.$$

العلاقتين (37) و (38) تستلزمان أنه إذا كان

$$\|(N_1,N_2)(s)\|^2_{H^2(\Gamma)} < \frac{\bar{\alpha}}{C(e^{\bar{\alpha}(t_1-s)}-1)},$$

فإنه من غير الممكن أن تتحقق العلاقة (40). لذلك، كي تتحقق العلاقة (40) يجب أن يكون

$$\|(N_1,N_2)(s)\|^2_{H^2(\Gamma)} \geq \frac{\bar{\alpha}}{C(e^{\bar{\alpha}(t_1-s)}-1)}.$$

لكن من أجل $\varepsilon > 0$ كيفي ، لدينا

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \frac{\bar{\alpha}}{C(e^{\bar{\alpha}(t_1-s)}-1)} ds = \infty .$$

وهذا ما يتناقض مع (30). مما يعني أن العلاقة (40) لا يمكن أن تكون محققة. إذَا من أجل كل τ: $0 < \tau < \infty$ ، إذا كان الحل (N_1, N_2) موجودا في المجال $[0, \tau[$ ، لدينا

$$\sup_{0\le t<\tau} \|N_1(t,\cdot)\|_{H^2(\Gamma)} < \infty , \qquad \sup_{0\le t<\tau} \|N_2(t,\cdot)\|_{H^2(\Gamma)} < \infty . \tag{41}$$

وعليه، حسب التوطئة 1 يمكن تمديد الحل إلى كل $[0, \infty[$. علاوة على ذلك ، تضمن لنا التوطئة 3 أن التوابع $N_1(t,x)$ و $N_2(t,x)$ تبقى موجبة.

وحدانية الحل تنتج منوحدانية الحل المحلي. وبالتالي يكون قد تم إثبات النظرية.

المراجع

[1] Amann.H. " Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II. reaction-diffusion systems." Diff. Int. Equ., Vol 3, N1, pp. 13-75. (1990)
[2] Brown, P.N. "Decay to uniforme states in ecological interactions." Siam J. Appl. Math. Vol. 38, No. 1, pp. 22-37 (1980)
[3] Hamdous, S., FujitaYashima, H. "Mesure invariante pour le système d'équation stochastiques du modèle de compétition avec diffusion spatiale". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 122, pp. 85-98. (2009).
[4] Tang, D., Zhou, P. " On Lotka-Volterra competition-diffusion-advection system : Homogeneity vs hetrogeneity " Jour. Diff. Equ. vol 268,pp. 1570-1599. (2020)
[5] Tornatore, E. "Stochastic equation of population dynamics with diffusion on a domain". Rend. Circ. Mat. Palermo, ser. II, vol. 52, pp. 15-29.(2003).
[6]Volterra, V. "Théorie mathématique de la lutte pour la vie."Gauthiers-Villars, Paris,1931.
[7] Yan, X., Nie,H., Zhou,P. " On a Competition-Diffusion-Advection System from River Ecology: Mathematical Analysis and Numerical Study." Siam J. App. Dyn.sys. vol 21. No. 1, pp. 438-469 (2022)
[8] Zhou,P., Tang, D, Xiao D. " On Lotka-Volterra competitive parabolic systems: Exlusion, coexistence and bistability " Jour. Diff. Equ. Vol 282 pp. 596-625 (2021)