

دراسة تحليلية ورقمية لتأثير عدد هارتمان على معامل الإجهاد والدوامية للتدفق النبضي في مقطع أسطواني

Analytical and numerical study of the influence of Hartman number on the stress coefficient and vorticity of pulsatile flow in the cylindrical conduct

غزال عبد الرحمان¹، خشبية عبد الرؤوف²، نوري صبرينة³،

¹ كلية الفيزياء. جامعة العلوم والتكنولوجيا هواري بومدين (الجزائر)، aghezal@usthb.dz

² كلية الفيزياء. جامعة العلوم والتكنولوجيا هواري بومدين (الجزائر)، akechiba@usthb.dz

³ كلية الفيزياء. جامعة العلوم والتكنولوجيا هواري بومدين (الجزائر)، snouri@usthb.dz

^{1,2,3} Theoretical and Applied Fluid Mechanics Laboratory, El aliya 32, University of technology and sciences of Houari Boumediene, Algiers

تاريخ النشر: جويلية/2026

تاريخ القبول: 2026/06/24

تاريخ الإرسال: 2026/04/10

المخلص:

يشكل هذا العمل مساهمة في دراسة السلوك المغناطيسي الهيدروديناميكي (MHD) لتدفق نبضي على انتقال الحرارة في وجود وسط مسامي. يتركز هذا العمل بشكل رئيسي على الدراسة التحليلية المرتبطة بالحل العددي للمعادلات التي تحكم التدفقات النبضية، وخاصة تأثير المجال المغناطيسي والمسامية على آليات نقل الحرارة. يُفترض أن المجال المغناطيسي المطبق على الأنبوب الأسطواني المسامي هو ثابت ومتجانس. تم الحصول على حل تحليلي تقريبي في بعد واحد للمعادلات التي تحكم التدفق الهيدروديناميكي المغناطيسي على شكل دوال ببسل. الدراسة التحليلية سمحت بإقامة تعبير بين عدد هارتمان، عدد دارسي ومعامل الاحتكاك. الطريقة العددية ثنائية الأبعاد تعتمد على مخطط ضمني بخطوة زمنية باستخدام الفروق المحددة، مع استخدام خوارزمية توماس والطريقة التكرارية لجوس سيديل لحل النظام الجبري الناتج من المعادلات. تُظهر النتائج أن سلوك التدفق يتأثر بشدة بنفاذية الوسط المسامي وشدة المجال المغناطيسي. كما أظهرت الدراسات أن معامل الاحتكاك يظهر بشكل جيبي ويزداد مع انخفاض عدد دارسي، بينما يزداد انتقال الحرارة مع زيادة المجال المغناطيسي وبالتالي عدد هارتمان. **الكلمات المفتاحية:** التدفق النبضي، انتقال الحرارة، المجال المغناطيسي، الفروق المحددة.

Abstract:

The present work constitutes a contribution to the study of the magneto hydrodynamic (MHD) behavior of a pulsed flow on heat transfer in the presence of a porous medium. This work primarily focuses on the analytical study associated with a numerical resolution of the equations governing pulsating flows, particularly the influence of the magnetic field and porosity on the heat transfer mechanisms. The magnetic field imposed on the porous cylindrical conduit is assumed uniform and constant. An approximate one-dimensional analytical solution of the equations governing magneto hydrodynamic (MHD) flow has been obtained in the form of Bessel functions. The analytical study established an expression between the Hartmann number, the Darcy number, and the friction coefficient. The two-dimensional numerical method is based on an implicit scheme with time steps using finite differences, employing the Thomas algorithm and the iterative Gauss-Seidel method to solve the resulting algebraic system of equations. The results show that the flow behavior is strongly affected by the permeability of the porous medium and the intensity of the magnetic field. It has also been shown that the friction coefficient exhibits a sinusoidal pattern.

Keywords: Pulsed flow, heat transfer, magnetic field, porosity, finite differences.

1- مدخل

ان دراسة جريان السوائل الموصلة، والمعروفة باسم الهيدروديناميكا الكهرومغناطيسية (MHD) ، جذبت اهتماماً كبيراً بسبب تطبيقاتها المختلفة. مثل علم الفلك والجيولوجيا كما تجد هذه الدراسة تطبيقها في البحث الطبي الحيوي. من بين الأعمال المتعلقة بهذا الموضوع؛ نذكر العمل الذي قام به كولن Kolin [1]، وهو كان الأول الذي اقترح استخدام المجال المغناطيسي في البحث الطبي. سمحت هذه الدراسات لكورتشف سكياندا ل بإظهار إمكانية تنظيم تدفق الدم عبر الشرايين من خلال تطبيق المجال المغناطيسي. بعد ذلك، استناداً إلى عمل كولن، تم إجراء العديد من الدراسات لوصف تأثير المجال المغناطيسي على التدفقات في الموصلات. كان جاليتس ليلأوسيس Gailitis Lielausis [2] أول من اقترح استخدام قوة المجال الكهرومغناطيسي، والمعروفة باسم قوة لابلاس-لورنتز، للتحكم في طبقة الحدود في التدفقات التي يكون فيها السائل موصلاً كهربائياً. تنتج هذه القوى الكهرومغناطيسية عن التفاعل بين حقل كهربائي وكثافة التيار الكهربائي والتحريض المغناطيسي، اللذان يكونان متوازيين في اتجاه التدفق، وذلك لتأخير الانتقال إلى حالة الاضطراب الذي يمثل أصل الانخفاض الكبير في المقاومة. يمكن أن يتذبذب المجال الكهرومغناطيسي وفقاً لإشارة ذات شكل ما وتردد عالٍ جداً. طور فارادنيان وآخرون Vardanyan et al [3] عدة نماذج نظرية تتعلق بتأثير المجال المغناطيسي على تدفق الدم.

لاحظوا أن وجود مجال مغناطيسي ثابت وموحد يقلل من معدل تدفق الدم؛ وكان لعملهم تأثيراً كبيراً على تطوير البحوث البيولوجية. درس ساوث وآخرون [4] South et al تأثير المجال المغناطيسي على التدفق الجيبي للسوائل في قناة صلبة. حصلوا على شكل السرعة الاحدية. قام سيوم وسيمون Seume and Simon [5] بتوصيف تضخيم السعة وتحول الطور لمعامل الإجهاد اللاحدي ، وقدموا تعبيراً عن معامل الإجهاد اللاحدي الذي تتعلق به السعة والطور وهما دالتان تزدادان مع التردد اللاحدي $R_{e\omega}$. بالنسبة لتدفق ذو عدد رينولدز الحركي $R_{e\omega}$ يتراوح بين 0 و 1000، يظهر أن أقصى سعة لمعامل الإجهاد تزداد مع التردد لتصل إلى حوالي 10 أضعاف قيمتها في حالة التدفق المستقر. بينما فارق الطور، يشيرون إلى أنه يتراوح بين 0° و 45° . أظهر بوسدزيك و قرندمان Posdziech and Grundmann [6] أن وجود المجال الكهرومغناطيسي الموجه بشكل مماسي إلى موصل أسطواني دائري يمكن أن يمنع انفصال التدفق، وكذلك تشكيل مسار الدوامية في مؤخره. وتستخدم هذه التقنية نفسها للتحكم في انفصال التدفق حول صفيحة مسطحة أو جناح هوائي في وجود زاوية سقوط. أجري اموس و اوقلو Amos et al [7] دراسة رقمية على التدفق النبضي في قناة بها تضيق في وجود مجال مغناطيسي خارجي موحد؛ باستخدام تقنية طريقة العناصر المنتهية لكاليركين. يمثل التضيق بشكل فسيولوجي تضيق الشريان في البشر. وصور التضيق على شكل جرس بواسطة منحنى جيبي. ووجدوا أن تطبيق مجال مغناطيسي موحد له تأثير على سرعة تدفق الدم. عندما يزداد المجال المغناطيسي، تقل السرعة، وبالتالي فإن الطريقة الوحيدة لتجنب مشكلة انخفاض السرعة هي زيادة ضغط التدفق، وهذا يتوافق مع زيادة الحمل على القلب والذي يمكن أن يؤدي إلى نوبات قلبية. درس ريخا وأوشا Rekha and Usha [8] بشكل تحليلي تأثير المجال المغناطيسي المستعرض والخارجي الموحد على تدفق الدم عبر الشريان المتضرر. ولاحظوا أن زيادة رقم هارتمان تؤدي إلى انخفاض السرعة، مما يشير إلى أن انخفاض السرعة ناتج عن وجود المجال المغناطيسي وبالتالي تقليل معدل التدفق. درس إقبال وماندال Ikbāl and Mandal [9] الاستجابة غير المستقرة لتدفق الدم غير النيوتوني عبر شريان به تضيق في وجود مجال مغناطيسي. يؤثر المجال المغناطيسي B ورقم رينولدز العام على خصائص التدفق من خلال تطوير عدة مناطق للانعكاس أمام المنطقة التي تحتوي على التضيق. يكون المجال المغناطيسي هو السبب الرئيسي لتقليل التدفق. درس بانديوبادهاي Bandyopadhyay [10] التدفق النبضي المستقر لسائل موصل كهربائياً في قناة ضيقة محلياً في وجود مجال مغناطيسي خارجي متجانس ومتعامد. تشير النتائج إلى أن منطقة انفصال التدفق تقل مع زيادة قيم المعامل المغناطيسي. ويلاحظ أن زيادة قوة المجال المغناطيسي تؤدي إلى التسطیح التدريجي للسرعة المحورية. يعرض تغير إجهاد القص عند الجدار مع زيادة قيم المعامل المغناطيسي لكل من نظامي التدفق الثابت والناضب.

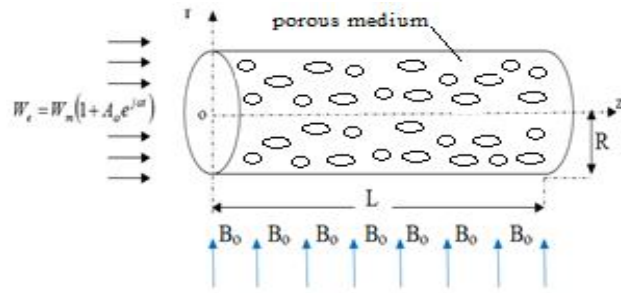
وتُظهر النتائج أن الإجهاد عند الجدار يزداد وفقاً لرقم هارتمان M ، وأن خطوط التيار تصبح أكثر إحكاماً.

حسب تشين وجرينف [11]Chen and Griffin، من التعبير الدقيق لأشكال السرعة لسائل غير قابل للانضغاط في تدفق طبقي يتأرجح جيبيًا في قناة، تم اشتقاق تعابير معامل الإجهاد المتوسط على مدة زمنية وفقًا للتردد اللاحيدي. التدفق يتم بفعل تدرج ضغط يتغير جيبيًا مع الزمن. حصل جي. ماجدالاني J.Majdalani [12] على الحل التحليلي لتطور ملفات السرعة ومعامل الإجهاد في حالة التدفق النبضي، الطبقي والمطور بالكامل لسائل لزج غير قابل للانضغاط في قنوات مستطيلة. الغرض من هذا العمل هو دراسة تأثيرات مجال مغناطيسي خارجي ثابت مطبق على تدفق نبضي في أنبوب أسطواني على معامل الإجهاد والدوامية. قام إديسوكي وموسى Eldesoky, M Mousa [13] بدراسة التدفق البريستالي لسائل ماكسويلي غير نيوتوني قابل للانضغاط عبر وسط مسامي في أنبوب. حقق ريدي وفينكاتارامانا G.R.Reddy and S. Venkataramana [14] في النقل البريستالي لسائل موصل عبر وسط مسامي في قناة رأسية غير متماثلة. تمت دراسة نمذجة رياضية لتدفق الدم في الأوعية المسامية التي تعاني من تضيق مزدوج وذلك في وجود مجال مغناطيسي خارجي بواسطة سينها وآخرون A.Sinha, J.C Misra, [15]. تم نمذجة وحل التدفق غير المستقر لسائل من الدرجة الثالثة غير قابل للانضغاط فوق صفيحة مسامية داخل وسط مسامي من قبل عزيز وآخرين Taha Aziz Asim Aziz [16]. درس حاتمي وآخرون M.Hatami, J.Hatami, D.D.Ganji [17] الدم غير النيوتوني من الدرجة الثالثة الذي ينقل جسيمات الذهب النانوية في وعاء مسامي ومجوف من خلال طريقتين تحليليتين أحدهما تسمى طريقة التربع الأصغر والآخرى طريقة جالركين. لقد قام ج. س. سيث، ب. كومبهاكار، ر. شارما G.S. Seth, B. Kumbhakar, R. Sharma [18] بدراسة سائل موصل كهربائيًا في وجود مجال مغناطيسي موحد يطبق عرضيًا على التدفق. يتم التحقيق في تدفق حراري حر غير مستقر للهيدرومغناطيسية لسائل لزج، غير قابل للانضغاط، موصل كهربائيًا، سميك بصريًا ويمتص للحرارة، يمر بجانب صفيحة رأسية متحركة متسارعة ذات درجة حرارة متغيرة. قام ك. تزيراكيس وآخرون Konstantinos Tzirakis [19] بتحليل رياضي لتدفق السائل غير النيوتوني في وجود حقول مغناطيسية خارجية. يتعرض مقال بوقييه باسكال وآخرون Bouvier. P [20] للدراسة التطبيقية للانتقال الحراري في جريان نبضي. كشفت الدراسة التحليلية الحالية التي قام بها أبو زيد محمد وآخرون Mohamed Abouzeid [21] عن تأثير حرارة كاتانيو-كريستوف والتدفقات الجماعية على تدفق الدم التمعجي. حيث يتم فرض تأثيرات تيارات هول والتيارات الأيونية. تتناول الدراسة البحثية التي أنجزها أفاد بيهاري Avadh Bihari [22] تأثير الوسط على سائل ثنائي الضغط في وسط مسامي عالي النفاذية محصور بين سريرين منفذين. تتدفق نماذج معادلة برينكمان في القناة المسامية، بينما يصف قانون دارسي التدفق في الطبقات النفاذية.

2-الوضعية الاشكالية:

نعتبر التدفق النبضي لسائل لزج غير قابل للانضغاط في موصل أسطواني نصف قطره R وطوله L ، في وجود مجال مغناطيسي عرضي منتظم $\vec{B}_0$ ، (الشكل 1). يمثل المجال المغناطيسي الكلي بالعلاقة : $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$. المجال المغناطيسي المستحث $\vec{B}_1$ تأثيره ضعيف مقارنة بالمجال المغناطيسي الخارجي وبالتالي يمكن اهماله. يتم ضخ السائل بطريقة نبضية عند مدخل الموصل على طول المحور بسرعة محورية دورية W_e ، بتذبذب ω وسعة A_ω كما يلي:

$$W_e = W_m (1 + A_\omega e^{j\omega t})$$



الشكل 1: مخطط الدراسة

1.2. الفرضيات المبسطة:

من المفترض أن يكون التدفق طبقيًا وغير قابل للانضغاط وأن تكون الخصائص الفيزيائية ثابتة، والسائل نيوتوني. يتم التعبير عن القوى الخارجية المعروفة باسم القوة الكهرومغناطيسية لورنتز، الناتجة عن وجود المجال المغناطيسي $\vec{B}_0$ ، وذلك بعد تجاهل قوى الجاذبية لأسباب تتعلق بالتماثل المحوري للمشكلة، على النحو التالي:

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$$

حيث:

$\vec{J}$ يمثل كثافة التيار الناتجة عن حركة السائل الناقل في وجود المجال المغناطيسي، ووفقًا لقانون أوم يكون لدينا:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = -\sigma \times B^2 \times \vec{V}$$

حيث:

σ يمثل الموصلية الكهربائية

$\vec{E}$ يمثل المجال الكهربائي الذي يُعتبر ضئيلاً.

بالنظر إلى جميع الافتراضات الموضحة أعلاه وبعد إسقاط المعادلات حسب الإحداثيات الأسطوانية

$$r^*, z^*$$

تُختصر المعادلات التي تحكم التدفق المدروس إلى:

معادلة الاستمرارية:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - \frac{\sigma B_0^2 w}{\rho} \quad (3)$$

مع:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -(A_0 + A_1 e^{i\omega t})$$

باستخدام المتغيرات اللاحدية التالية :

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad z^* = \frac{z}{R}, \quad t^* = \frac{t W_m}{R}, \quad P^* = \frac{P}{\rho W_m^2}, \quad U^* = \frac{u}{W_m}, \quad W^* = \frac{w}{W_m}.$$

حيث: R_e عدد رينولدز الحركي و M عدد هارتمان المعرفان كما يلي:

$$R_e = \frac{\rho W_m R}{\mu}, \quad M^2 = \frac{\sigma B_0^2 R^2}{\mu}$$

لذلك، يمكن كتابة معادلات حفظ الكتلة وكمية الحركة، التي تحكم الظاهرة على النحو التالي:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \frac{U^*}{r^*} + \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} + W^* \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 U^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} - \frac{U^*}{r^{*2}} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial W^*}{\partial r^*} + W^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 W^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial z^{*2}} \right] - \frac{M^2}{R_e} W^* \quad (6)$$

الشروط الحدية:

• عند مدخل القناة $z^* = 0$

$$W^*(r^*, 0, t^*) = (1 + A_\omega e^{j\omega t})$$

$$u^*(r^*, 0, t^*) = 0$$

• عند المخرج $z^* = L^*$

$$\frac{\partial W^*}{\partial z^*}(r^*, L^*, t^*) = \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(r^*, L^*, t^*) = 0$$

• على المحور $r^* = 0$

$$\frac{\partial W^*}{\partial r^*}(0, z^*, t^*) = u^*(0, z^*, t^*) = 0$$

• عند جدار القناة $r^* = 1$

$$w^*(1, z^*, t^*) = u^*(1, z^*, t^*) = 0$$

3 الدراسة التحليلية:

بالإضافة إلى الافتراضات المبسطة السابقة، نفترض أن التدفق يتم فقط في الاتجاه المحوري. تحت هذه الظروف، يتم تبسيط معادلة الحفظ التي تحكم التدفق المتذبذب على النحو التالي:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] - \frac{M^2}{R_e} W \quad (7)$$

يتم التعبير عن حقل السرعة على النحو التالي:

$$W(r, t) = W_0(r) + W_1(r, t)$$

حيث $W_0(r)$ و $W_1(r, t)$ تمثل على التوالي الجزء المستقر وغير المستقر للسرعة:

1.3 دراسة الحالة المستقرة:

المعادلة بلا أبعاد التي يجب حلها في الحالة الثابتة هي:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - M^2 W = -A_0 R_e \quad (8)$$

يتم كتابة حل المعادلة المتجانسة بالشكل التالي:

$$W_0(r) = C_1 I_0(M.r) + C_2 K_0(M.r) \quad (9)$$

مع:

كحل خاص وحل متجانس و I_0, K_0 هما دوال بيسل المعدلة من النوع الأول والثاني من الدرجة $h = \frac{A_0 R_e}{M^2}$ صفر. C_1, C_2 ثوابت يتم حسابها من الشروط الحدية السابقة.

$$W_0(r) = \frac{A_0 R_e}{M^2} \left(1 - \frac{I_0(M.r)}{I_0(M)} \right) \quad (10)$$

2.3 دراسة الحالة الاهتزازية:

لتوصيف الجانب التذبذبي للتدفق، نجعل التردد اللاهذي R_{ew} يظهر ونستخدم متغيرات زمنية لاحدية $t^* = \alpha t$ ، حيث:

$$R_{ew} = \frac{\rho R^2 \omega}{\mu} \text{ يساوي مربع عدد مورسلي.}$$

$$R_{ew} = \alpha^2$$

في هذه الحالة، هو تدرج الضغط الذي يولد التدفق. في هذه الظروف، يمكن وضع شكل السرعة اللاحدية على الشكل:

$$W_1(r, t) = \text{Re}(f(r)e^{it})$$

المعادلة اللاحدية للحالة غير المستقرة هي كالتالي

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f - (M^2 + i\alpha^2) f = -A_1 \alpha^2$$

حل المعادلة بدون طرف تان هو كالتالي

$$f_s(r) = C_1 I_0(\sqrt{M^2 + i\alpha^2}.r) + C_2 K_0(\sqrt{M^2 + i\alpha^2}.r)$$

الحل الخاص هو كالتالي:

$$f_p(r) = \frac{A_1 \alpha^2}{M^2 + i\alpha^2}$$

الثابت C_2 يكون حتما معدوما لان السرعة محددة عند $r=0$.

الثابت C_1 يحدد بانعدام قيمة السرعة عند الجدار $f_g(1)=0$

بما ان الحل العام هو مجموع الحلين:

$$f_g(r) = f_s(r) + f_p(r)$$

حيث تمثل العبارة التالية الحل العام:

$$f_g(r) = -\frac{A_1 \alpha^2}{M^2 + i\alpha^2} \left(\frac{I_0(\sqrt{M^2 + i\alpha^2}.r)}{I_0(\sqrt{M^2 + i\alpha^2})} - 1 \right)$$

بوضع:

$$\beta = \sqrt{M^2 + i\alpha^2}$$

نحصل على البارة اللاحدية للسرعة:

$$W_1(r, t) = -\frac{A_1 \alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{I_0(\beta.r)}{I_0(\beta)} - 1 \right) e^{it}$$

بما ان قيمة A_1 غير محددة نستعمل القيمة المتوسطة للسرعة :

$$W_m = \text{Re}(W_{\max} e^{it})$$

$$W_{\max} e^{it} = 2 \int_0^1 f_g(r) r e^{it} \omega R dr$$

$$W_{\max} = -\frac{A_1 \alpha^2 \omega R}{\beta^2} \left(\frac{2 I_1(\beta.)}{\beta I_0(\beta)} - 1 \right)$$

نستنتج:

$$A_1 = -\frac{W_{\max} \beta^2}{\alpha^2 \omega R} \left(\frac{1}{\frac{2I_1(\beta \cdot)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) = -\frac{R_{e \max} \beta^2}{2\alpha^4} \left(\frac{1}{\frac{2I_1(\beta \cdot)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right)$$

مع:

$$R_{e \max} = \frac{2\alpha^2 W_{\max}}{\omega R}$$

ومن هنا:

$$W_1(r, t) = \frac{R_{e \max}}{2\alpha^2} \left(\frac{\frac{I_0(\beta \cdot r)}{I_0(\beta)} - 1}{\frac{2I_1(\beta \cdot)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) e^{-it} \quad (11)$$

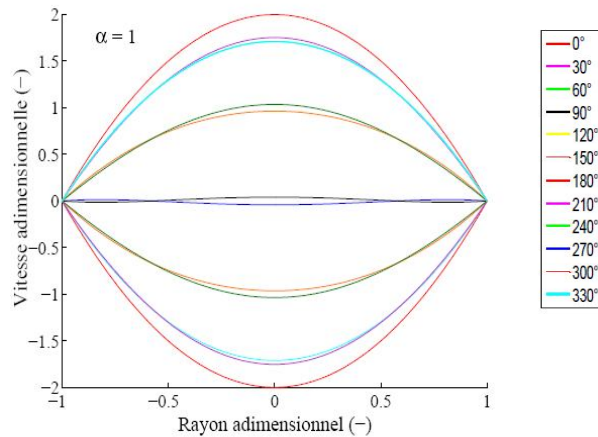
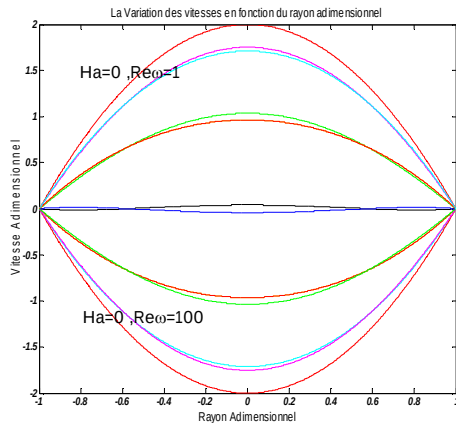
هاته العبارة هي نفسها التي تحصل عليها ك تزيراكيس, K.Tzirakis et al [19] وآخرون في

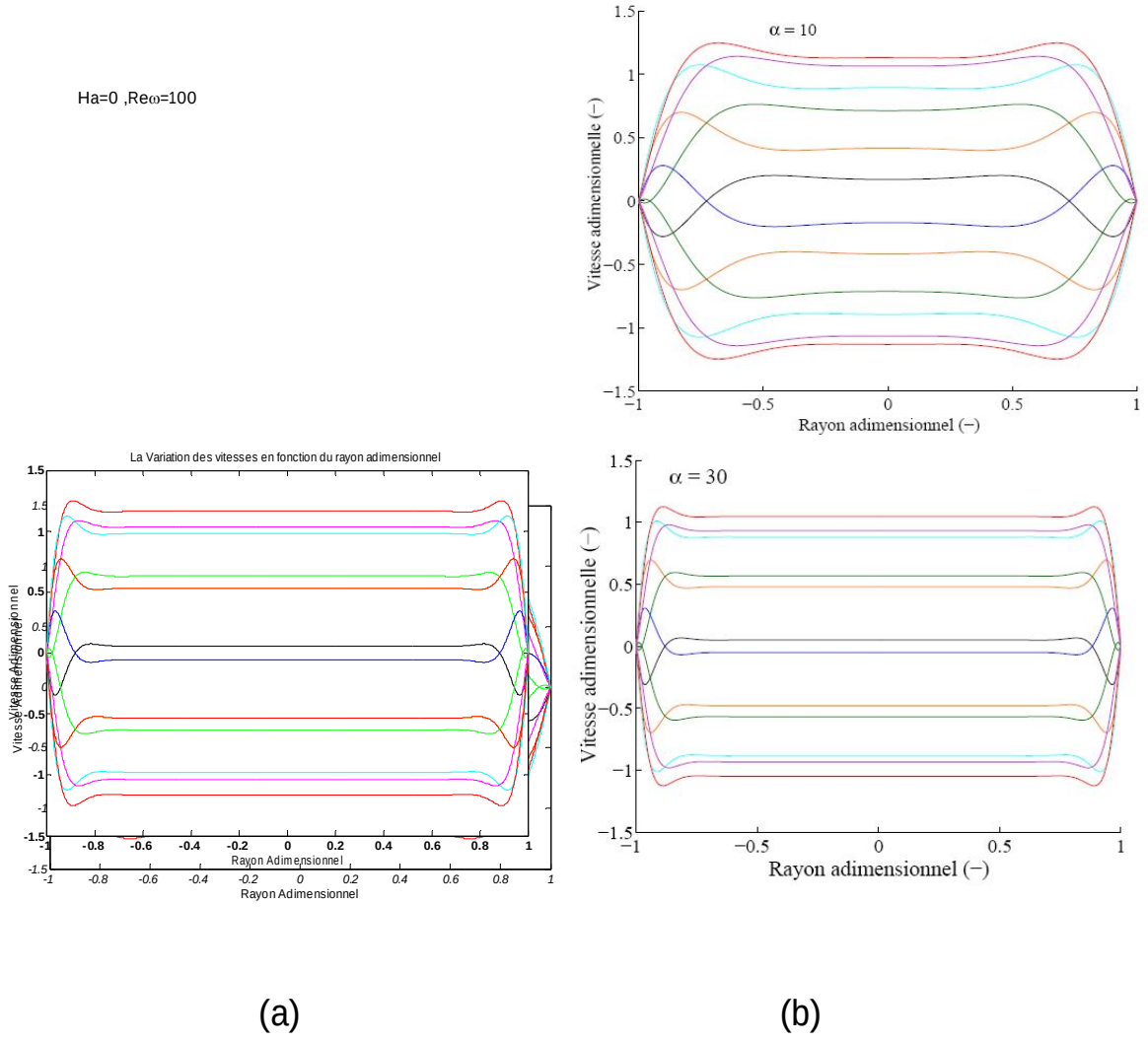
حالة عدم وجود الحقل المغناطيسي في الوسط المسامي. $Ha=0, \beta_k^2 = \chi^2 + i\alpha^2$

وكذلك العبارة التي تحصل عليها بوفيه, Bouvier [2] في حالة عدم وجود الحقل المغناطيسي

في الوسط غير المسامي.

$$Ha^2 = 0, \beta_k^2 = \beta^2 = i\alpha^2$$





الشكل 2: سعة السرعة على شكل دالة لـ R لأرقام رينولدز النبضي المختلفة (a) الدراسة الحالية (b) نتيجة بوفيه وآخرون

3.3 دراسة الحالة النبضية:

تكون عبارة السرعة اللحادية عبارة عن مجموع السرعتين المستقرة وغير المستقرة كالتالي:

$$W(r,t) = W_0(r) + W_1(r,t) = \frac{A_0 R_e}{M^2} \left(1 - \frac{I_0(Mr)}{I_0(M)} \right) + \frac{R_{e\max}}{2\alpha^2} \left(\frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta)} - 1 \right) e^{it}$$

Ha=0, Re=100

وعليه تكون عبارة الاجهاد الجداري كالتالي:

$$\tau = -\frac{\partial W}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \frac{A_0 R_e}{M} \frac{I_1(M)}{I_0(M)} - \frac{\beta R_{e\max}}{2\alpha^2} \left(\frac{\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)}}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) e^{it}$$

4. الدراسة العددية:

تحويل المعادلات أعلاه إلى شكل متقطع باستخدام طريقة الفروق المحدودة الضمنية. يؤدي إلى نظام من المعادلات الجبرية يتم حله باستخدام طريقة جاوس-سيدل التكرارية مع معامل الاسترخاء.

14. حساب معامل الإجهاد

لا يمكن حساب معامل الإجهاد بشكل مباشر من المعادلات التي تحكم التدفق، مما دفعنا لاستخدام طريقة غير مباشرة تتضمن توازن القوى في عنصر حجمي من السائل، وهي طريقة شائعة الاستخدام في الدراسات. إذا اعتبرنا تدفق سائل غير قابل للانضغاط بسرعة تدفق في قناة أسطوانية في وجود مجال مغناطيسي، فيمكننا كتابة معادلة توازن القوى المؤثرة على عنصر حجمي معين كما يلي:

$$\pi R^2 \rho \frac{\partial W_m}{\partial t} + \pi R^2 \frac{\partial P}{\partial z} = -2\pi R \tau_p - \pi R^2 \sigma B^2 W_m \quad (12)$$

من العبارة (12) نحصل على:

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \frac{\partial W_m}{\partial t} + \sigma B^2 W_m \right) \quad (13)$$

ومنه معامل الاجهاد:

$$C_f = -\frac{R}{\rho W_m^2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \frac{\partial W_m}{\partial t} \right) - \frac{M^2}{R_e} \quad (14)$$

حيث:

$$R_e = \frac{\rho W_m R}{\mu}, \quad M^2 = \frac{\sigma B_0^2 R^2}{\mu}$$

ومنه معامل الاجهاد المعياري:

$$C_{f \text{ normalized}} = \frac{\tau_p}{\tau_s}$$

$$C_{f \text{ normalized}} = -\frac{i\alpha^2}{8} \left(1 + \frac{1}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) \quad (15)$$

حيث:

$$\tau_s = \mu 8 \frac{W_m}{2R}, \quad W_m = \text{Re}(W_{\max} e^{it})$$

تكتب العبارة في حالة النظام التذبذبي على الصيغة:

$$iR\omega^2 W_{\max} e^{it} + R\omega^2 \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\mu\omega 8}{\rho R} C_f W_{\max} e^{it} - \frac{\sigma B^2}{\rho} R\omega W_{\max} e^{it}$$

حيث:

$$\alpha^2 = \frac{\rho R^2 \omega}{\mu} M^2 = \frac{\sigma B_0^2 R^2}{\mu},$$

تصبح العبارة السابقة على النحو التالي:

$$i\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{W_{\max} e^{it}} \frac{\partial P}{\partial z} + M^2 = -8C_{f \text{ normalized}}$$

حيث:

$$W_{\max} = -\frac{A\alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1 \right) \frac{\partial P}{\partial z} = -A_1 e^{it},$$

ومنها عبارة معامل الاجهاد المعياري:

$$C_{f \text{ normalized}} = -\frac{M^2}{8} - \frac{i\alpha^2}{8} \left(1 - \frac{\frac{i\beta^2}{\alpha^2}}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) \quad (16)$$

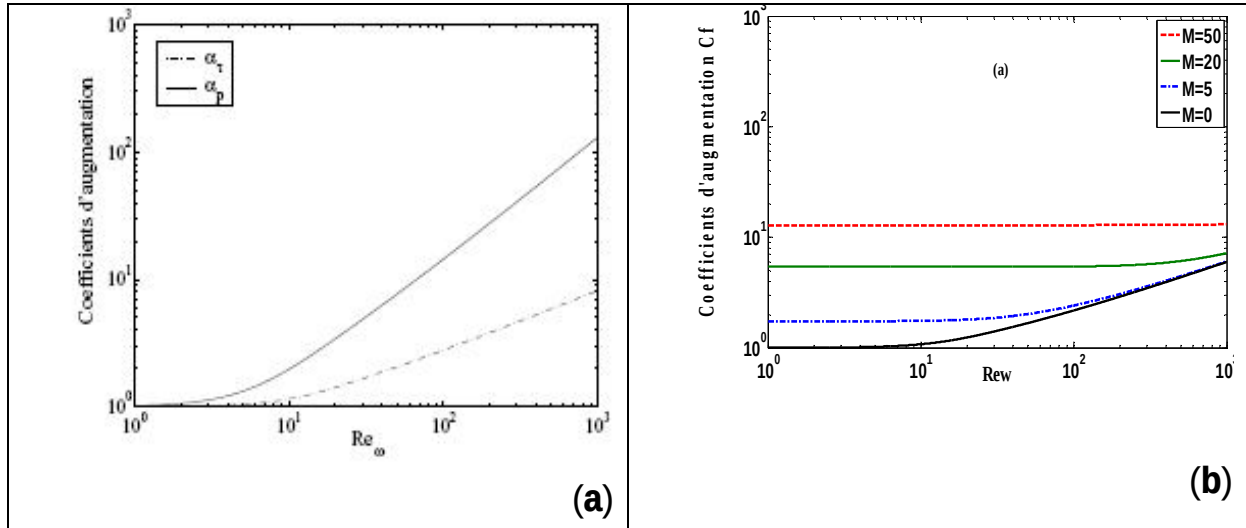
ومنها عبارة معامل الاجهاد المعياري في حالة عدم وجود المجال المغناطيسي:

$$M^2 = 0, \text{ and } \beta^2 = i\alpha^2$$

$$C_f = -\frac{i\alpha^2}{8} \left(1 + \frac{1}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) \quad (17)$$

النتائج والمناقشات

يُظهر الشكل 3. (a) أن السعة القصوى في حالة غياب المجال المغناطيسي $M = 0$ تزداد مع التردد لتصل إلى حوالي 10 أضعاف قيمتها في حالة التدفق الثابت. هذه النتائج متوافقة مع النتائج التي حصل عليها سيوم وسيمون [5]، الشكل 3. (b). ومع ذلك، كان هناك زيادة طفيفة عند الترددات المنخفضة. يمكن تبرير ذلك بمساهمة المكون الثاني من السرعة. يبدأ تأثير التردد عند الترددات بين 100 و 150، وهو ما يتوافق مع بدء تأثير الحلقة.



الشكل 3: السعة القصوى على شكل دالة لـ Re_{ω} لأرقام هارتمان المختلفة (a) نتيجة سيومي وآخرون (b) الدراسة الحالية

القيمة تساوي تقريباً 1 للترددات المنخفضة $Re_\omega < 100$ ، وهو ما يتوافق مع حالة التدفق الثابت. يتم

العثور على هذه النتيجة من خلال التطور المحدود للتعبير (15) في غياب المجال المغناطيسي وعندما

$Re_\omega \rightarrow 0$. في الواقع؛ التطور المحدود بالقرب من $\beta \rightarrow 0$ للدالة $I_1(\beta)$ هو:

$$I_1(\beta) = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^3}{16}$$

$$C_{f \text{ normalized}}$$

$$Re_\omega = 0$$

هذا يعطي النتيجة التالية لقيمة معامل الاجهاد المعياري:

$$C_{f \text{ normalized}} = 1$$

في وجود المجال المغناطيسي، يزداد عدد هارتمان لتردد معين، ويتغير الحد الأقصى للسعة كدالة للتردد

العالي الموافق لأعداد الترددات $Re_\omega > 100$

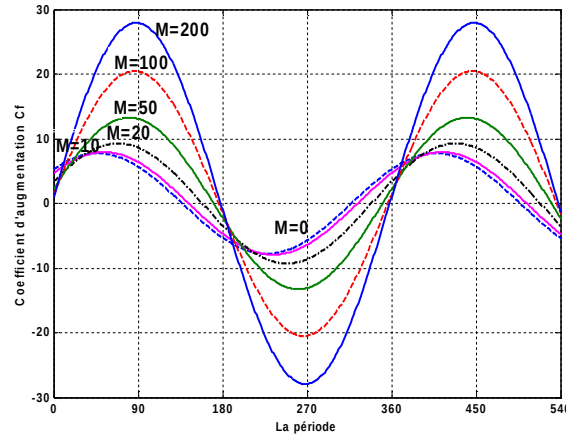
نتيجة مهمة أخرى هي أن التغير في وجود المجال المغناطيسي يصبح أقل اعتماداً على التردد مع زيادة عدد هارتمان.

نفس التغير يصبح مستقلاً تماماً عن التردد للقيم $M > 20$ ويصبح التعبير عن الدالة في الزمن كما يلي:

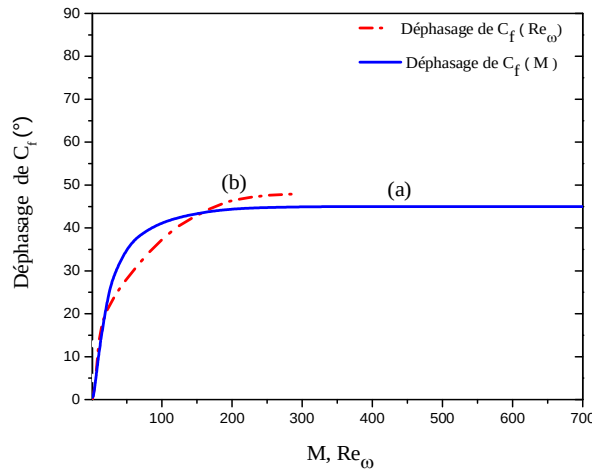
$$C_{f \text{ normalized}}(t) = -\frac{M^2}{8} - \frac{i\alpha^2}{8} \left(1 - \frac{\frac{i\beta^2}{\alpha^2}}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) e^{it}$$

لتحليل تأثير المجال المغناطيسي على التطور الزمني لمعامل الاجهاد المعياري، نقوم برسم تباين هذه الكمية لأعداد مختلفة من عدد هارتمان الشكل (4). من هذه المنحنى، يتبين أن له مظهراً جيبياً ويزداد

وفقاً لعدد هارتمان دون أن يسبب تداخلاً عند القيم المنخفضة لـ Re_ω



الشكل 4: معامل الاجهاد المعياري $C_{f \text{ normalized}}$ كدالة للزمن لأعداد هارتمان مختلفة ولقيمة عالية من Re_{ω}



الشكل 5: تغير إزاحة الطور معامل الاجهاد المعياري $C_{f \text{ normalized}}$ كدالة لأرقام هارتمان والتردد Re_{ω}

تأثير المجال المغناطيسي على التداخل (التحول الطوري) الشكل (5) هو من نفس طبيعة التردد، وهذه النتائج تتوافق بشكل جيد مع تلك التي وجدها بوفيه وآخرون، [20]

15. تأثير عدد هارتمان على معامل الإجهاد

من التعبير (14)، يتبين أن معامل الإجهاد له طابع جيبى ويزداد مع زيادة عدد هارتمان مما يسبب تغيرا في الطور ليصل إلى قيمة حدية حوالي 45 درجة عند القيم الكبرى لاعداد هارتمان .

يجدر بالذكر أن هذه النتائج تتماشى مع تلك التي تم الحصول عليها تحليلياً، وبالتالي يمكن أن تساهم في التحقق من صحة كودنا العددي.

25 حساب الدوامية

تعطى الدوامية اللاحدية بالعلاقة التالية:

$$\Omega = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{\partial W_0(r)}{\partial r} - \frac{\partial W_1(r, t)}{\partial r}$$

حيث:

$$W = \frac{A_0 R_e}{M^2} \left(1 - \frac{I_0(M.r)}{I_0(M)} \right) - \frac{A \alpha^2}{\beta^2} \left(\frac{I_0(\beta.r)}{I_0(\beta)} - 1 \right) e^{it}$$

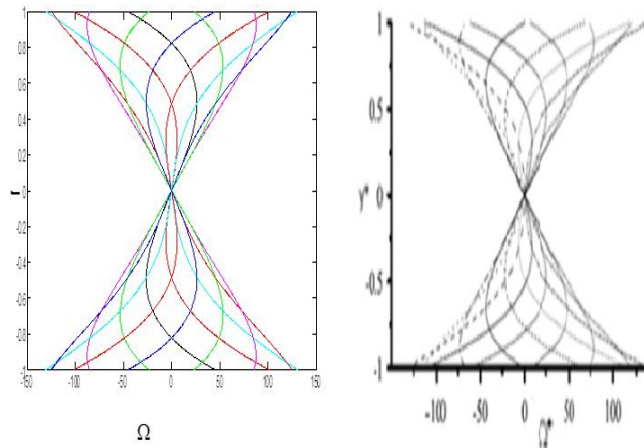
ومنه:

$$\Omega = \frac{A_0 R_e}{M} \frac{I_1(Mr)}{I_0(M)} + \frac{A \alpha^2}{\beta} \left(\frac{I_1(\beta.r)}{\beta I_0(\beta)} \right) e^{it}$$

حيث: A_0 يمثل سعة الجزء الثابت. A يمثل سعة الجزء التذبذبي. يتم رسم الدوران باستخدام MATLAB كدالة لنصف القطر r لقيم مختلفة من رقم هارتمان والتردد لمراحل مختلفة ونسب مختلفة من السعات.

• لرقم هارتمان منخفض وسعات عالية

تأثير السعة موضح في الشكل (6). تشير النتائج إلى أن قيم الدوامية أعلى بكثير من قيمة السعة. بمقارنة نتائجنا مع تلك التي وجدها ج. مجدلاوي [12]، في التدفق التذبذبي البحت في غياب المجال المغناطيسي، لذروة $A=50$ وتردد $Re_{\omega} = 10$ ، نلاحظ أنها تتفق بشكل جيد.



(a)

(b)

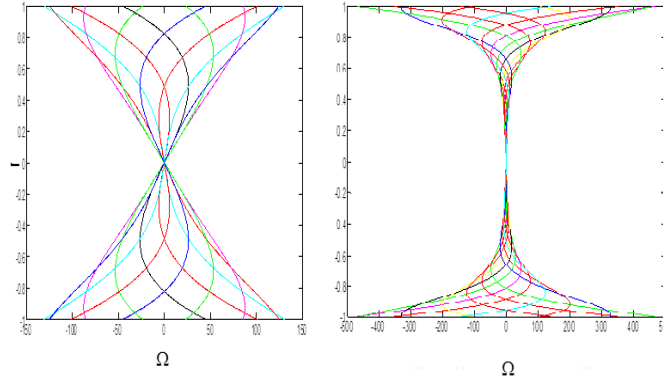
الشكل 6: المظهر الشعاعي للدوامية

$$(M = 0, R_{ew} = 10, A = 50)$$

(a) الدراسة الحالية (b) نتيجة ج. مجدلاني [12]

• لرقم هارتمان مرتفع وسعات عالية $A = 50$

الشكل (7) يُظهر تأثير المجال المغناطيسي على الملف الشعاعي للدوامية. نلاحظ أن شدة الدوامات تكون أعلى بكثير عندما يكون رقم هارتمان مرتفعاً. يجدر بالذكر أن تأثير المجال المغناطيسي يكون مرئياً فقط من $M = 5$ يُلاحظ أن الدوران يأخذ قيمة سالبة في مراحل معينة، وذلك لقيم مختلفة من السعة، مما يشير إلى وجود تدفق عائد.



(a)

(b)

الشكل 7: المظهر الشعاعي للدوامات $A = 50$ (b) $M = 5$, (a) $M \rightarrow 0$, $R_{ew} = 10$

الخلاصة:

في هذا العمل قدمنا دراسة حول التأثيرات التحليلية والعديدية الناجمة عن التدفق النبضي في وجود المجال المغناطيسي. قمنا بحساب معامل الإجهاد بناءً على الحالة أحادية البعد المستخدمة في بعض الأعمال، لأن الحساب في حالة الاضطراب ثنائي الأبعاد يقدم بعض الصعوبات بسبب تغيير إشارة قيمة السرعة لدورة زمنية. هذا يسمح أيضاً بالكشف عن الإزاحة الطورية بين معامل الإجهاد وسرعة التدفق دون صعوبة كبيرة. الدراسة التحليلية سمحت بإقامة تعبيرات تعكس ملف السرعة، وتغير معامل الإجهاد و الدوامية كدالة لرقم هارتمان. كما أظهرت الدراسة أن معامل الإجهاد له مظهر جيبى ويزداد مع زيادة عدد هارتمان مما يسبب تحولاً في الطور الذي يزداد بشكل كبير من $M = 10$ ليصل إلى قيمة حدية حوالي 45 درجة، وأن سعة الدوران تكون أعلى كلما كان عدد هارتمان أعلى. يجدر بالذكر أن تأثير المجال المغناطيسي على الدوامية يكون مرئياً فقط ابتداءً من القيمة $M = 5$.

- [1] Kolin, Kinouchi “Theoretical analysis of magnetic field interactions with aortic blood flow Bio electromagnetics, 17(1) 21-32
- [2] Gailitis et Lielausis,”Magneto hydrodynamic version of movement of blood Biophysical 10(2):371-373
- [3] Vardanyan et al, “Effect of magnetic field on oscillating blood flow in arteries. Studia biophysica 46(3):163-172
- [4] Sud et al, “Laminar flow of blood in an elastic tube in the presence of magnetic field” Studia biophysica 46(3):175-186.
- [5] Seume et Simon,”A Survey of Oscillating Flow in Stirling Engine Heat Exchangers.” NASA Contractor Report 182108.
- [6] Posdziech et Grundmann, “Pulsatile flow in cylindrical vessel with magnetic field” 41(7) 129-134
- [7] Amos et Ogulu, “Magneto hydrodynamics of blood flow” Magnetic resonance in medicine 16:139-141 2002
- [8] Rekha et Usha, “Magneto hydrodynamic pipe flow “Journal of Fluids Mechanics 13:500-506, 2005
- [9] Ikbal et Mandal,”Unsteady response of non-Newtonian flow through a stenosed artery in magnetic field 14:416-512, 2008
- [10] Bandyopadhyay, “Oscillatory Flow in magnetic blood vessel” Magnetic Resonance in medicine.
- [11] Chen et Griffin, «Effects of pressure-drop correlations on sterling engine predicted performance”, IECEC88, paper 889114, pages 708 713, 1983.
- [12] J. Majdalani, “Exact Nervier–stokes solution for pulsatory viscous channel Flow with arbitrary pressure gradient”, journal of propulsion and power vol. 24, no. 6
- [13] M.Eldesoky and A.Mousa,2010, Peristaltic flow of a compressible non – Newtonian fluid through porous medium in a tube, International J.of Biomathematics,3(2)255-275.
- [14] A.Sinha, J.C Misra, 2011, Mathematical modeling of blood flow in porous vessel having double stenosis in the presence of an external magnetic field, International journal of Biomathematics,4(2) pp 207- 225.
- [15] G.R.Reddy and S. Venkataramana, 2011, J. of Advances in Applied science, 2(5) pp 240-248.
- [16] Taha Aziz Asim Aziz, 2013, MHD flow of a third grade fluid in a porous half space with plate suction or injection: an analytical approach, Appl. Math. Comput. 218 10443–10453.
- [17] M.Hatami, J.Hatami, D.D.Ganji, 2014, Computer simulation of MHD blood conveying gold nanoparticles as a third grade non-Newtonian nano fluid in a hollow porous vessel, Comput. Methods Prog. Biomed.113 632–641.

- [18] G.S. Seth, B. Kumbhakar, R. Sharma Unsteady hydromagnetic natural convection flow of a heat absorbing fluid within a rotating vertical channel in porous medium with hall effects. Journal of Applied Fluid Mechanics
- [19] Konstantinos Tzirakis L.Botti, V.Vavourakis, Y.Papaharilaou, 2016, Numerical modeling of non-Newtonian biomagnetic fluid flow, computers and fluids 126(2016)170-180.
- [20] Bouvier. P (2005). Experimental study of heat transfer in oscillating flow. J. Heat Transfer, 48:2473-2482.
- [21] Mohamed Abouzeid 2025 .Implicit Adomian Decomposition Approach for MHD Pulsatile Non-Newtonian Nanofluid Flow Through a Porous Medium . IEEE Transactions on Plasma Science PP (99):1-14. January 2025.
- [22] Avadh Bihari .2026.Singh Deepak Kumar. Exact Solution of MHD Pulsatile Flow of Couple-Stress Fluid through Porous Medium. Asian Research Journal of Mathematics 22(1):28-49