

وجود حلول معادلة ديناميكية لابلاسيانية ثيرموستورية غير محلية نبضية في المقياس الزمني.

Existence solution of nonlocal Laplacian impulsive thermistor problems on time scale

قريشي فرحوح¹،

¹ المدرسة العليا للأساتذة القبة (الجزائر)، farhouh.korichi@g.ens-kouba.dz

تاريخ النشر: 2025/06/30

تاريخ القبول: 2025/05/17

تاريخ الإرسال: 2025/03/23

الملخص:

نقوم في هذا العمل بدراسة المعادلات التفاضلية الثيرموستورية الغير محلية ال- φ -لابلاسيانية المزودة بنبض في السلم الزمني وهذا بتطبيق نظرية التناوبية الغير خطية للاري شاوردر على مؤثر النقطة الصامدة المرافق للمسألة المطروحة.

كلمات مفتاحية: السلم الزمني، φ -لابلاس، المعادلات النبضية ، التيرمستور، وجود الحلول.

Abstract:

We consider a thermistor differential equation with impulse effect and non-local boundary conditions on the time scale, the differential equation is of the form of φ –laplacian equation , the existence result is obtained by using the nonlinear Leray Schauder alternative on the fixed point operator associated to the equation

Key words : Impulsive effect, thermistor, φ –laplacian equation, time scale, fixed point, Leray Schauder.

1 مدخل: (Introductio)

فيما سبق، كانت المعادلات التفاضلية تمثل ظواهر ذات زمن مستمر على $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}_+$ أو $\mathbb{R}_+^*$ أو على المجال (a, b) من $\mathbb{R}$ أو ذات زمن متقطع على $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{N}$ وهي معادلات الفروق. لكن من البديهي أنه توجد ظواهر طبيعية وفيزيائية على الأقل تتضمن أزمنة مستمرة تارة و أزمنة متقطعة نقطية تارة أخرى وهذا النوع من الظواهر يمثل بمعادلات تفاضلية ديناميكية على السلم الزمني.

ظهرت الدراسات الأولى للتحليل في السلم الزمني من خلال مذكرة الدكتوراه لستيف انهي لجر سنة 1988 [1]، لتوحيد التحليل المستمر في مجموعة الأعداد الحقيقية و الغير مستمر في مجموعة الأعداد الصحيحة وبعدها تطور العمل في السلم الزمني وأصبح الهدف من دراسة المعادلات التفاضلية الديناميكية في السلم الزمني ه وتعمم و توحّد دراسة المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات ذات التغيرات وكذا معادلات الفروق [2]-[3] كما ورد من خلال عنوان العمل فإننا نهتم بدراسة المعادلات التيرموستورية النبضية الغير محلية وهذا كون تطبيقاتها كثيرة و مهمة في الثيرمستور هي أنصاف نواقل مصنوعة من معادلات ناقلية ضعيفة وهي عناصر حساسة للتغير الطفيف لدرجة الحرارة. فالمجهول في هذه المسائل هو درجة الحرارة كدالة للزمن يمكن الإطلاع على [4]، [8]، [9]، [10].

نهتم في هذا البحث بدراسة وجود الحلول للمسائل غير المحلية اللابلاسيانية الديناميكية التيرموستورية في المقياس الزمني $\mathbb{T}$ ذات الشكل:

$$-\varphi(u^\Delta(t))^\nabla = \beta\varphi(u(t)) + \frac{a(t)f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s)}{(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s)\Delta t)^k}, \quad (1)$$

حيث $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$ يحقق $t \neq t_j; j = \overline{1, N}$ مع $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < T = t_{N+1}$ نقاط النبض معطاة بحيث من أجل كل $j = \overline{1, N}$ تكون نقاط النبض t_j كثيفة من اليمين.

مع الشروط النبضية :

$$\begin{cases} \varphi(u^\Delta(t_j^+)) - \varphi(u^\Delta(t_j^-)) = I_j(u(t_j)) \quad \forall j = 1, \dots, N. \\ u^\Delta(t_j^+) - u^\Delta(t_j^-) = J_j(u(t_j)), \quad \forall j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2)$$

مع $u(t_j^+)$ و $u(t_j^-)$ ترمز ان للنهاية من اليمين و من

اليسار $u(t)$ لما $t = t_j$

والشروط الحدية التكاملية:

$$u(0) = \int_0^T h(u(s))\Delta s, \quad u^\Delta(T) = \int_0^T g(u(s))\nabla s \quad (3)$$

مع φ مستشاكل متزايد على $\mathbb{R}$ يسمى مؤثر φ -لابلاسو β ثابت من $\mathbb{R}$ و k ثابت من $\mathbb{R}_+^*$.

$$a : [0, T]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f : [0, T]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

توابع مستمرة على النقاط الكثيفة من اليسار و $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع مستمرة.

2 مفاهيم أساسية

تم بناء إثبات وجود حلول المسألة (1)-(2)-(3) عن طريق تطبيق التناوبية الغير خطية للاري شاوذر التي تنص على

نظرية 1: ليكن C محدب من X حيث X فضاء باناخي. ليكن $X \subset U$ مفتوح يحوي الصفر. كل تطبيق $N: U \rightarrow C$ مستمر ومتراص يحقق على الأقل التناوبية:

$$N \cdot \text{يقبل نقطة صامدة في } U$$

• يوجد $x \in \partial U$ و $\lambda \in (0,1)$ حيث $x = \lambda Nx$

نذكر فيما يلي بعض المفاهيم الأساسية للسلم الزمني التي نحتاجها في عملنا هذا. للاطلاع على خواص أدق يمكن النظر في [2]

-نسمي سلماً زمنياً كل مجموعة جزئية مغلقة غير خالية $\mathbb{T}$ من $\mathbb{R}$ ، مزودة بالطوبولوجيا المستخرجة من الطوبولوجيا على $\mathbb{R}$.

ليكن 0 و T نقطتان من $\mathbb{T}$ ، نسمي مجالاً من $\mathbb{T}$ ونرمز له بـ $[0, T]_{\mathbb{T}}$ لمجموعة المعرفة بـ $[0, T]_{\mathbb{T}} = [0, T] \cap \mathbb{T}$.

نعرف على السلم الزمني بعض التطبيقات التي تسمح بتصنيف نقاطه:

- مؤثر القفز إلى اليمين $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ حيث $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}, s > t\}$.
- مؤثر القفز إلى اليسار $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ حيث $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}, s < t\}$.
- تابع الليونة من الأمام $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ حيث $\mu(t) = \sigma(t) - t$ الذي يسمح بتصنيف النقاط حيث:

إذا كان $\mu(t) = 0$ فإن النقطة t تكون كثيفة من اليمين وإلا فإن النقطة تكون مبعثرة من اليمين.

- تابع الليونة من الخلف $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ حيث $\gamma(t) = t - \rho(t)$ الذي يسمح بتصنيف النقاط حيث:

• إذا كان $\rho(t) = 0$ فإن النقطة t تكون كثيفة من اليسار وإلا فإن النقطة تكون مبعثرة من اليسار.

نقول عن تابع $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ أنهم مستمر عند نقطة $t \in \mathbb{T}$ إذا حقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall s \in]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T} : |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$$

نقول عن تابع $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ أنه -rd مستمر إذا حقق

1. f مستمر عند كل النقاط من $\mathbb{T}$ الكثيفة من اليمين.

2. f يقبل نهاية منتهية عند النقاط الكثيفة من اليسار.

نرمز لمجموعة التتابع rd-مستمرة على $\mathbb{T}$ بـ: $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

نعرف الدالت الاشتقاقية لـ $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ عند نقطة $t \in \mathbb{T}^k$ حيث

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

إمكانية إيجاد العدد $f^\Delta(t)$ الذي يسمى Δ -مشتق والذي يحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{U} \in V_t; \forall s \in \mathcal{U} : |[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

نعرف النابذة اشتقاقية: وجود العدد $f^\nabla(t)$ الذي يسمى ∇ -مشتق f عند t الذي يحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{U} \in V_t; \forall s \in \mathcal{U} : |[f(\rho(t)) - f(s)] - f^\nabla(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|$$

نقول عن $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ أنها Δ -أصلية $\downarrow$ $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ إذا كان من أجل كل $t \in \mathbb{T}^k$ يكون $F^\Delta(t) = f(t)$ ونعرف في هذه الحالة الـ Δ -تكامل العدد

$$\int_s^t f(r) \Delta r = F(t) - F(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{T}$$

3 نتائج أولية :

من أجل تعريف حل للمسألة (1)-(2)-(3) يُستحسن أن نعتبر الفضاءات التالية:

$$PC_{rd}(J, \mathbb{R}) = \{ u: [0, T]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}, u \in \mathcal{C}_{rd}(t_j, t_{j+1}), u(t_j^-) = u(t_j^+), j = 1, \dots, N \}$$

$$\begin{aligned} E = PC_{rd}^\Delta(J, \mathbb{R}) &= \\ &= \{ u \in PC_{rd}(J, \mathbb{R}), u^\Delta \in \mathcal{C}_{ld}(t_j, t_{j+1}), u^\Delta(t_j^-) \\ &= u^\Delta(t_j), u^\Delta(t_j^+) \text{ موجود}, j = 1, \dots, N \} \end{aligned}$$

حيث $J = [0, T]_{\mathbb{T}}$

إذن E فضاء بناخي حقيقي مزود بالنظيم:

$$\|u\|_E = \max \left(\max_{j=1, \dots, N} \sup_{t \in (t_j, t_{j+1}]} |u(t)|, \max_{j=1, \dots, N} \sup_{t \in (t_j, t_{j+1}]} |u^\Delta(t)| \right)$$

لدراسة وجود حلول للمسألة (1)-(2)-(3)، نعتبر الفرضيات التالية:

$$f \in \mathcal{C}_{rd}(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+^*) \text{ و } a \in \mathcal{C}_{rd}(J \times \mathbb{R}_+) \text{ و } b \in \mathcal{C}_{rd}(J \times \mathbb{R}) \quad (H1)$$

$$g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ و } J_j, J_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \forall j = 1, \dots, N \quad (H2)$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ مستشاكل متزايد حيث } \varphi(0) = 0 \quad (H3)$$

توطئة 1.

نفرض أن (H1)-(H3) محققة من أجل $f \in \mathcal{C}_{rd}(\cdot, \mathbb{R})$ يكون $u \in E$ حلاً للمسألة

$$(4) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} -\varphi(u^\Delta(t))^\Delta = f(t), \quad t \in [0, T]_{\mathbb{T}}, \quad t \neq t_j, j = 1, \dots, N \\ u(0) = \int_0^T h(u(s)) \Delta s, \quad u^\Delta(T) = \int_0^T g(u(s)) \nabla s \\ u(t_j^+) - u(t_j^-) = J_j(u(t_j)), \quad j = 1, \dots, N \\ \varphi(u^\Delta(t_j^+)) - \varphi(u^\Delta(t_j^-)) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

إذا فقط إذا كان u حلاً للمعادلة التكاملية النبضية التالية:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{t_j \leq t} J_j(u(t_j)) \\ &+ \int_0^T h(u(s)) \Delta s \\ &+ \int_0^t \varphi^{-1} \left[\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) \right. \\ &\left. - \sum_{t_j \geq r} I_j(u(t_j)) + \int_r^T f(s) \nabla s \right] \Delta r \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

البرهان:

ليكن u حلاً للمسألة (4) بمكاملة طر في المعادلة التفاضلية الواردة في المسألة من 0 إلى t_1 نجد المساواة:

$$\varphi(u^\Delta(t_1^-)) - \varphi(u^\Delta(0)) = - \int_0^{t_1} f(s) \nabla s \quad (6)$$

بالمكاملة مرة أخرى طرفي المعادلة (6) من t_1 إلى t_2 نجد

$$\varphi(u^\Delta(t_2^-)) - \varphi(u^\Delta(t_1^+)) = - \int_{t_1}^{t_2} f(s) \nabla s$$

ثم من أجل $t \in (t_j, t_{j+1}]$ نكاملاً المعادلة (6) من t_j نحو t نجد:

$$\varphi(u^\Delta(t)) - \varphi(u^\Delta(t_j^+)) = - \int_{t_j}^t f(s) \nabla s$$

بالجمع، ومن كون f مستمرًا نجد:

$$\varphi(u^\Delta(t)) - \sum_{t_j < t} (\varphi(u^\Delta(t_j^+)) - \varphi(u^\Delta(t_j^-)) - \varphi(u^\Delta(0))) = - \int_0^t f(s) \nabla s$$

وباستعمال الشروط النبضية في المسألة (4) نجد:

$$(7) \dots \dots \dots u^\Delta(t) = \varphi^{-1} \left[\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) - \sum_{t_j \geq t} I_j(u(t_j)) + \int_t^T f(s) \nabla s \right]$$

بالمكاملة من جديد المعادلة (7) تصبح:

$$u(t_1^-) - u(0) = \int_0^{t_1} \varphi^{-1} \left[\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) - \sum_{t_j \geq r} I_j(u(t_j)) + \int_r^T f(s) \nabla s \right] \Delta r$$

ثم بتكرار نفس العملية والمكاملة من t_j نحو t من أجل $t \in (t_j, t_{j+1}]$

$$\begin{aligned} u(t) = & \sum_{t_j \leq t} J_j(u(t_j)) \\ & + \int_0^T h(u(s)) \Delta s \\ & + \int_0^t \varphi^{-1} \left[\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) - \sum_{t_j \geq r} I_j(u(t_j)) + \int_r^T f(s) \nabla s \right] \Delta r \end{aligned}$$

عكسياً، إذا كان u حلاً للمعادلة (5) نجد

$$u(0) = \int_0^T h(u(s)) \Delta s$$

بالاشتقاق المباشر الدالت الاشتقاية في السلم الزمني لـ (5) نجد :

$$(\varphi(u^\Delta(t)))^\nabla = \left(\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) - \sum_{t_j \geq t} I_j(u(t_j)) + \int_t^T h(s) \nabla s \right)^\nabla = -f(t)$$

□

نتيجة 1 : نفرض أن (H 3) - (H1) محققة. يكون $u \in E$ حلاً للمسألة (1)-(2)-(3) إذا وفقط إذا كان

$$\begin{aligned} u(t) = & \sum_{t_j < t} J_j(u(t_j)) + \int_0^T h(u(s)) \Delta s \\ & + \int_0^t \varphi^{-1} \left[\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) - \sum_{t_j \geq \tau} I_j(u(t_j)) + \beta \int_\tau^T \varphi(u(s)) \nabla s \Delta s \right. \\ & \left. + \frac{\int_\tau^T a(r) f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s) \nabla r}{\left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k} \right] \Delta r. \end{aligned}$$

4 نتائج أساسية:

من خلال هذا الفصل، بالإضافة إلى الفرضيات (H3) - (H1) نفرض أن

الشروط التالية محققة:

(H4) يوجد تابعان متزايدان $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \psi_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ |g(x)| &\leq \psi_1(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(H5) توجد ثوابت $\theta_{1j}, \theta_{2j}, \eta_{1j}, \eta_{2j} \geq 0$ حيث :

$$\begin{aligned} I_j(y) &\leq \theta_{1j}|y| + \theta_{2j}, & \forall j = 1, \dots, N, \forall y \in \mathbb{R} \\ J_j(y) &\leq \eta_{1j}|y| + \eta_{2j}, & \forall j = 1, \dots, N, \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

نضع:

$$S_0 = \sum_{j=1}^N \eta_{1j}, S_1 = \sum_{j=1}^N \eta_{2j} \quad L_0 = \sum_{j=1}^N \theta_{1j} \quad L_1 = \sum_{j=1}^N \theta_{2j}$$

(H6) لما $k < 1$ يوجد $q_1 \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}_+)$ وتوابع متزايدة $\psi_2, \phi_1, \chi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

حيث:

$$|f(t, x, y, z)| \leq q_1(t)\psi_2(x)\chi_1(y)\phi_1(z), \quad \forall t \in [0, T]_{\mathbb{T}}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

(H7) لما $k < 1$ يوجد $R > 0$ حيث:

$$\begin{aligned} R &\geq S_0 R + S_1 + T\psi_0(R) \\ &+ T\varphi^{-1}[L_0 R + L_1 + \varphi(T)\varphi(\psi_1(R)) + |\beta|T\varphi(R) \\ &+ M_1(\sup_{t \in [0, T]} |q_1(t)|\psi_2(R)\chi_1(R)\phi_1(TM_2 R))^{1-k}] \end{aligned}$$

(H6') لما $k > 1$ يوجد $q_2 \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}_+)$ وتوابع متزايدة $\psi_3, \phi_2, \chi_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

حيث:

$$|f(t, x, y, z)| \geq q_2(t)\psi_3(x)\chi_2(y)\phi_2(z), \quad \forall t \in [0, T]_{\mathbb{T}}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

(H7') لما $k < 1$ يوجد

$R > 0$ حيث:

$$\begin{aligned} R &\geq S_0 R + S_1 + T\psi_0(R) \\ &+ T\varphi^{-1}[L_0 R + L_1 + \varphi(T)\varphi(\psi_1(R)) + |\beta|T\varphi(R) \\ &+ M_1(\sup_{t \in [0, T]} |q_2(t)|\psi_3(R)\chi_2(R)\phi_2(TM_2 R))^{1-k}] \end{aligned}$$

$$M_1 = \sup_{[0, T]} |a(t)|, \quad M_2 = \sup_{[0, T]} |b(t)| \quad \text{حيث}$$

نعرف المؤثر التكاملي $F : E \rightarrow E$ بـ:

$$Fu(t) = \sum_{t_j < t} J_j(u(t_j)) + \int_0^T h(u(s))\Delta s +$$

$$\int_0^T \varphi^{-1} \left[- \sum_{t_j \geq \tau} I_j(u(t_j)) + \varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) + \beta \int_\tau^T \varphi(u(s)) \nabla s + \right. \\ \left. + \frac{\int_0^T a(r) f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s) \nabla r}{\left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k} \right] \Delta r$$

توطئة 2:

ليكن $R_\Omega \in \mathbb{R}$ نعرف المجموعة. $\bar{\Omega} = \{y \in E, \|y\|_E \leq R_\Omega\}$ إذا المؤثر $\bar{\Omega} \rightarrow E$ مستمر ومتراص.

برهان:

استمرارية F من كون التتابع f, g, h, a, b, I_j, J_j مستمرة، إذاً باستعمال نظرية لوبيغ للهيمنةيصبح المؤثر F مستمراً على E .تراص F : يكفي أن نثبت أن F مستمر كلياً باستعمال نظرية أسكولي أريزلا.ليكن Ω_1 محدوداً في $\bar{\Omega}$ إذ يوجد $\rho > 0$ ، حيث من أجل كل $u \in \Omega_1$ يكون: $\|u\| \leq \rho$.ليكن $u \in \Omega_1$ إذاً:

$$|F(u(t))| = \left| \int_0^t \varphi^{-1} [A_{1\tau} + \beta A_{2\tau} + A_{3\tau} - A_{4\tau}] \Delta \tau + A_{5t} + A_{6t} \right|$$

$$\begin{aligned} A_{1\tau} &= \varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) & A_{2\tau} &= \int_\tau^T \varphi(u(s)) \nabla s \\ A_{3\tau} &= \frac{\int_\tau^T a(r) f \left(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s \right) \nabla r}{\left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k} & A_{4\tau} &= \sum_{t_j \geq \tau} I_j(u(t_j)) \\ A_{6\tau} &= \sum_{t_j < \tau} J_j(u(t_j)) & A_{5\tau} &= \int_0^T h(u(s)) \Delta s \end{aligned}$$

باستعمال الشرط (H4) ومن كون φ متزايدة نجد:

$$|A_{1\tau}| = \left| \varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \nabla s \right) \right| \leq |\varphi(T\psi_1(\rho))|$$

$$|A_{2\tau}| = \left| \int_\tau^T \varphi(u(s)) \nabla s \right| \leq T|\varphi(\rho)|$$

$$\begin{aligned} |A_{3\tau}| &= \left| \frac{\int_\tau^T a(r) f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s) \nabla r}{\left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k} \right| \\ &\leq \frac{\int_\tau^T |a(r)| \cdot |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s)| \nabla r}{\left(\int_0^T |f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t| \right)^k} \\ &\leq M_1 \left(\int_0^T \left| f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right| \right)^{(1-k)} \end{aligned}$$

باستعمال الشرط
(H5) نجد:

$$\begin{aligned} |A_{4\tau}| &= \left| \sum_{t_j \geq \tau} I_j(u(t_j)) \right| \\ &\leq \sum_{t_j \geq \tau} |I_j(u(t_j))| \leq \sum_{j=1}^N |I_j(u(t_j))| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \theta_{1j} |u(t_j)| + \theta_{2j} \leq \sum_{j=1}^N \theta_{1j} \rho + \theta_{2j} \\ &\leq \rho \left(\sum_{j=1}^N \theta_{1j} \right) + \left(\sum_{j=1}^N \theta_{2j} \right) = \rho L_0 + L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{5\tau}| &= \left| \sum_{t_j \leq \tau} J_j(u(t_j)) \right| \\ &\leq \sum_{t_j \leq \tau} |J_j(u(t_j))| \leq \sum_{j=1}^N |J_j(u(t_j))| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \eta_{1j} |u(t_j)| + \eta_{2j} \leq \sum_{j=1}^N \eta_{1j} \rho + \eta_{2j} \\ &\leq \rho \left(\sum_{j=1}^N \eta_{1j} \right) + \left(\sum_{j=1}^N \eta_{2j} \right) = \rho S_0 + S_1 \end{aligned}$$

$$|A_{6\tau}| = \left| \int_0^T h(u(s)) \Delta s \right| \leq T\psi_0(\rho)$$

إذا يوجد

حيث: K_0

$$|F(u(t))| \leq K_0$$

$$K_0 = \rho S_0 + S_1 + T\psi(\rho) + T\varphi^{-1}[\varphi(T\psi_1(\rho)) + T\varphi(\rho) +$$

$$M_1 T \sup_{t \in [0, T], u \in \Omega_1} |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s)u(s)\Delta s)|$$

$$+ \frac{\left(\inf_{t \in [0, T], u \in \Omega_1} |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s)u(s)\Delta s)| \right)^k + \rho L_0 + L_1}{\left(\inf_{t \in [0, T], u \in \Omega_1} |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s)u(s)\Delta s)| \right)^k}$$

إذا:

$$\sup_{t \in [0, T]} |F(u(t))| \leq K_0, \quad y \in \Omega_1$$

$$(Fu(t))^\Delta = \varphi^{-1} \left[\varphi \left(\int_0^T g(u(s)) \Delta s \right) - \beta \int_\tau^T \varphi(u(s)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\int_t^T a(r) f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s)u(s)\Delta s) dr}{\left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s) \nabla t \right)^k} - \sum_{t_j \geq t} J_j(u(t_j)) \right]$$

من أجل $j = 1, \dots, N$

$$\sup_{t \in (t_j, t_{j+1}]} |(Fu(t))^\Delta| = \sup_{t \in (t_j, t_{j+1}]} |\varphi^{-1}[A_{1t} + \beta A_{2t} + A_{3t} - A_{4t}]|$$

$$\leq \varphi^{-1} \left[|\varphi(T\psi_1(\rho))| + |\beta| |t_{j+1} - t_j| |\varphi(\rho)| + \right.$$

$$+ \frac{M_1 |t_{j+1} - t_j| \sup_{t \in (t_j, t_{j+1}], u \in \Omega_1} |f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s)|}{\left(\inf_{t \in (t_j, t_{j+1}], u \in \Omega_1} |f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s)| \right)^k}$$

$$\left. + |I_{j+1}(u(t_{j+1}))| \right]$$

وبالتالي يوجد ثابت منتهي:

$$\max_{j=1, \dots, N} \sup_{t \in (t_j, t_{j+1}]} |(Fu(t))^\Delta| \leq \tilde{K}_0$$

ومنه $F(\Omega_1)$ محدود في E .لنبرهن أن F متساوي الاستمرار على E :ليكن $t'_1, t'_2 \in (t_k, t_{k+1}]$ وليكن $u \in \Omega$

$$|F(u(t'_1)) - F(u(t'_2))| = \left| \sum_{t'_1 < t_j \leq t'_2} J_j(u(t_j)) + \int_0^t \varphi^{-1}[A_{1\tau} + \beta A_{2\tau} + A_{3\tau} - A_{4\tau}] \Delta \tau \right|$$

يجب أن نبين أن $\varphi^{-1}[A_{1\tau} - \beta A_{2\tau} - A_{3\tau} - A_{4\tau}]$ محدودة من أجل كل $\tau \in [0, T]$ ومن أجل كل $u \in \Omega$.

لدينا:

$$\begin{aligned} |A_{1\tau}| &\leq \varphi(T\psi_1(R_\Omega)) \\ |A_{2\tau}| &\leq T\varphi(R_\Omega) \\ A_{3\tau} &\leq \frac{M_1 T \sup_{t \in [0, T], u \in \Omega} |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s)u(s)\Delta s)|}{\left(\inf_{t \in [0, T], u \in \Omega} |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s)u(s)\Delta s)| \right)^k} \\ |A_{4\tau}| &= \left| \sum_{j \geq \tau} I_j(u(t_j)) \right| \\ &\leq \sum_{t_1 < t_j \leq t_2} |I_j(u(t_j))| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |I_j(u(t_j))| \leq R_\Omega L_0 + L_1 \end{aligned}$$

إذاً من أجل

$$\begin{aligned} K_1 &= \varphi^{-1} \left[\varphi(T\psi_1(R_\Omega)) + |\beta| T\varphi(R_\Omega) + R_\Omega L_0 + L_1 + \right. \\ &\quad \left. \sup_{t \in [0, T], u \in \bar{\Omega}} f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s) \right] \\ &\quad \left[M_1 T \frac{\sup_{t \in [0, T], u \in \bar{\Omega}} f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s)}{\left(\inf_{t \in [0, T], u \in \bar{\Omega}} f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s)u(s)\Delta s) \right)^k} \right] \end{aligned}$$

يكون:

$$|F(u(t'_1)) - F(u(t'_2))| \leq K_1 |t'_1 - t'_2| \rightarrow 0$$

لدينا:

$$\begin{aligned} |(F(u))^\Delta(t'_1) - (F(u))^\Delta(t'_2)| &= \\ &= |\varphi^{-1}[A_{1t'_1} - \beta A_{2t'_1} - A_{3t'_1} - A_{4t'_1}] \\ &\quad - \varphi^{-1}[A_{1t'_2} - \beta A_{2t'_2} - A_{3t'_2} - A_{4t'_2}]| \end{aligned}$$

بما أن φ^{-1} مستمر ومن استمرارية التتابع A_{it} يكون:

$$|(F(u))^\Delta(t'_1) - (F(u))^\Delta(t'_2)| \rightarrow 0, \quad \forall t'_1 \rightarrow t'_2$$

وبالتالي F شبه متساوي الاستمرار على E .

باستعمال أسكولي أرزيبا فإن المؤثر F مستمر كلياً، ومن كونه مستمراً فهذا يجعل F متراصاً. $\square$

نظرية 2.

من أجل $k < 1$ وتحت الفرضيات و الشروط (H1) - (H7)، المسألة (1)-(2)-(3) تقبل على الأقل حلا u ، حيث $u \in PC^\Delta([0, T], \mathbb{R})$.

برهان :

لإثبات وجود الحل سوف نستعمل التناوبية الغير الخطية لـ لاريشاودر على المؤثر F . باستعمال التوطئة (1) ومن أجل $R_\Omega = R$ المعطى في الشرط (H7) ومن أجل $\bar{\Omega} = \{y \in E, \|y\|_E \leq R\}$ فإن المؤثر F مستمر ومتراص.

من أجل التناوبية نفرض أنه يوجد تابع $y \in \partial\Omega$ وأنه يوجد $\lambda \in (0, 1)$ حيث $y(t) = F(y(t))$ بالتالي:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \lambda |F(y(t))| \leq |F(y(t))| \\ &\leq \int_0^t \varphi^{-1} [A_{1\tau} - \beta A_{2\tau} - A_{3\tau} - A_{4\tau}] d\tau + A_{5t} \\ &\quad + A_{6t} \end{aligned}$$

لكن لدينا:

$$|A_{1\tau}| \leq \varphi(T\psi_1(R)), \quad |A_{2\tau}| \leq T\varphi(R), \quad \forall \tau \in [0, T]$$

من أجل $A_{3\tau}$ لما $k < 1$ وباستعمال (H6):

$$\begin{aligned} |A_{3\tau}| &= \left| \frac{\int_\tau^T a(r) f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s) \nabla r}{\left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k} \right| \\ &\leq \frac{\int_0^T |a(r) f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s)| dr}{\left| \left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k \right|} \\ &\leq \frac{\sup_{t \in [0, T]} |a(t)| \int_0^T |f(r, u(r), u^\Delta(r), \int_0^r b(s) u(s) \Delta s)| dr}{\left| \left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^k \right|} \\ &\leq M_1 \left| \left(\int_0^T f(t, u(t), u^\Delta(t), \int_0^t b(s) u(s) \Delta s) \nabla t \right)^{1-k} \right| \\ &\leq M_1 \left(\int_0^T q_1(t) \psi_2(u(t)) \chi_1(u^\Delta(t)) \phi_1 \left(\int_0^t b(s) u(s) \Delta s \right) \nabla t \right)^{1-k} \\ &\leq M_1 \left(\sup_{t \in [0, T]} |q_1(t)| \psi_2(R) \chi_1(R) \phi_1(TM_2R) \right)^{1-k} \end{aligned}$$

من أجل $A_{4\tau}$ نستعمل (H5):

$$|A_{4\tau}| = \left| \sum_{t_j \geq \tau} I_j(u(t_j)) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^N |I_j(u(t_j))| \leq \sum_{j=1}^N (\theta_{1j}|u(t_j)| + \theta_{2j}) \leq L_0 R + L_1 < \infty$$

ومن أجل $A_{5\tau}, A_{6\tau}$

$$|A_{5\tau}| = \left| \sum_{t_j \leq t} J_j(u(t_j)) \right|$$

$$\leq \sum_{t_j \leq t} |J_j(u(t_j))| \leq \sum_{j=1}^N \eta_{1j}|u(t_j)| + \eta_{2j}$$

$$\leq R \left(\sum_{j=1}^N \eta_{1j} \right) + \sum_{j=1}^N \eta_{2j} = S_0 R + S_1$$

$$|A_{6\tau}| = \left| \int_0^t h(u(s)) \Delta s \right| \leq T \psi_0(R)$$

إذا:

$$|y(t)| \leq S_0 R + S_1 + T \psi_0(R) +$$

$$+ T \varphi^{-1}[\varphi(T) \varphi(\psi_1(R)) + |\beta| T \varphi(R) + L_0 R + L_1 +$$

$$+ M_1 \left(\sup_{t \in [0, T]} |q_1(t)| \psi_2(R) \psi_2(R) \chi_2(R) \phi_1(TM_2 R) \right)^{1-k}]$$

باستعمال الشروط على R نجد $|y(t)| < R$ وهو تناقض مع كون $y \in \partial\Omega$ و بالتالي، حسب

تناوبية لاريشاودر: يوجد $u \in \Omega$ حيث $F(u) = u$ الذي هو حل للمسألة (3)-(2)-(1) □

نظرية 3.

من أجل $k > 1$ وتحتهالفرضيات والشروط (H1) - (H5) و (H7') - (H6)، المسألة (3)-(2)-(1) تقبل على الأقل

حلاً $u \in PC_{rd}^\Delta([0, T], R)$ حيث

ومن أجل $k = 1$ ، وتحت الشروط (H1) - (H5)، المسألة (3)-(2)-(1) تقبل على الأقل حلاً

واحداً $u \in PC_{rd}^\Delta([0, T], \mathbb{R})$ حيث

برهان :

يمكن إثبات نتيجة هذه النظرية بنفس طريقة إثبات النظرية السابقة.

□

مثال :

ليكن المقياس الزمني $\mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N_0}, \quad N_0 \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$ حيث

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left(|u^\Delta(t)|^{-\frac{1}{2}} u^\Delta(t) \right)^\nabla = \frac{1}{5} |u(t)|^{-\frac{1}{2}} u(t) + \frac{t^2 e^{-t} \frac{1}{29} |u(t)|^{\frac{2}{5}} \frac{1}{9} (1+|u^\Delta(t)|)^{\frac{1}{7}} \frac{1}{9} e^{\frac{1}{10} \int_0^t b(s) u(s) \Delta s}}{(\int_0^T t \frac{1}{29} |u(t)|^{\frac{2}{5}} \frac{1}{9} (1+|u^\Delta(t)|)^{\frac{1}{7}} \frac{1}{9} e^{\frac{1}{10} \int_0^t b(s) u(s) \Delta s} \Delta t)^{\frac{1}{2}}}, \\ \forall \quad t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}, t \neq t_j, j = 1, 2, 3 \\ u(0) = \int_0^1 \frac{1}{32} |u(s)|^{\frac{1}{7}} \Delta s, \quad u^\Delta(1) = \int_0^1 \frac{1}{9} |u(s)|^{\frac{2}{5}} \nabla s \\ |u^\Delta(t_j^+)|^{-\frac{1}{2}} u^\Delta(t_j^+) - |u^\Delta(t_j^-)|^{-\frac{1}{2}} u^\Delta(t_j^-) = I_j(u(t_j)) \quad , j = 1, 2, 3 \\ u(t_j^+) - u(t_j^-) = J_j(u(t_j)) \quad , j = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

حيث التتابع I_j و J_j تحقق:

$$|I_j(y)| = \left(\frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{t_j}-1} |y| + \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{t_j}-1}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \text{ و } \forall y \in \mathbb{R}_+$$

$$|J_j(y)| = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{t_j}-1} |y| + \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{t_j}-1}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \text{ و } \forall y \in \mathbb{R}_+,$$

و $t_3 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{1}{3}, t_1 = \frac{1}{2}$ هي نقاط النبض، إذا:

$$|I_j(y)| = \left(\frac{1}{9} \right)^j |y| + \left(\frac{1}{4} \right)^j, \quad \forall j = 1, 2, 3, \text{ و } \forall y \in \mathbb{R}_+$$

$$|J_j(y)| = \left(\frac{1}{5} \right)^j |y| + \left(\frac{1}{6} \right)^j, \quad \forall j = 1, 2, 3, \text{ و } \forall y \in \mathbb{R}_+.$$

$$L_0 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{30} \right)^j \left(\frac{1}{2} \right)^j = \frac{1}{20}, \quad S_0 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{5} \right)^j = \frac{31}{125}$$

$$S_1 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{6} \right)^j = \frac{43}{216}, \quad M_1 = \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}}} |a(t)| = \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}}} |te^{-t}| = e^{-1}$$

$$L_1 = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{4} \right)^j = \frac{21}{64}, \quad \chi_1(y) = \frac{1}{9} (1 + |y|)^{\frac{1}{7}},$$

$$M_2 = \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}}} f(1-t) = 1, \quad \psi_1(y) = \frac{1}{9} |y|^{\frac{2}{5}},$$

$$\phi_1(z) = \frac{1}{9} e^{\frac{1}{10} z}, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{29} |x|^{\frac{1}{5}},$$

والفرضيات (H7) - (H1) محققة حيث يوجد $R = 10 > 0$ يحقق:

$$\begin{aligned} R \geq & \frac{31}{125} R + \frac{43}{216} + \frac{1}{32} R^{\frac{1}{7}} + \\ & + \left[\frac{1}{20} R + \frac{21}{64} + \sqrt{\frac{1}{9} R^{\frac{2}{5}}} + \frac{1}{5} \sqrt{R} + \right. \\ & \left. + e^{-1} \left(\frac{1}{29} R^{\frac{1}{5}} \frac{1}{9} (1+R)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} e^{\frac{1}{10} R} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

و بالتالي المسألة تقبل حلًا في $PC_{rd}^\Delta([0, 1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$.

الخلاصة:

تُعد دراسة معادلات الثرمستور على مختلف مقاييس الزمن ضرورية لفهم استجابته الديناميكية للحرارة بدقة، مما يساعد في تصميم أنظمة تحكم فعالة ومستقرة. كما تُمكن من تحليل السلوك غير الخطي للثرمستور خلال المراحل الانتقالية والظواهر متعددة المقاييس. هذا التحليل ضروري لتحسين أداء النمذجة العددية والتطبيقات الصناعية التي تعتمد على التحكم الحراري

Références

- 1) S. Hilger, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph. D. Thesis, Universität Würzburg, 1988 (in German).
- 2) G. Sh. Guseinov, Integration on Time Scales, "*Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 285 (2003), no. 1, 107-127".
- 3) L. Erbe, A. Peterson and C. C. Tisdell, Existence of solutions to second-order boundary value problems on time scales, "*J. of Comput. and Appl. Math.*, 113 (2000), 365–380".
- 4) W. Song, W. Gao, Existence of solutions for nonlocal p -Laplacian thermistor problems on time scales. "Boundary Value Problems 2013, 1 (2013). <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-1> "
- 5) A. Dogan , Existence of multiple positive solutions for p -Laplacian multipoint boundary value problems on time scales". *Advances in Difference Equations* · August 2013 <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-238>".
- 6) S.Hongxia, C Haibo, Multiple solution for P -laplacian Boundary-value problems with impulsive effects."Electronic Jour. of Diff. Equ., Vol. 2015 (2015), No. 207, pp. 1–9"
- 7) Y.Ding, D. O'Regan, Positive solutions for a second-order p -Laplacian impulsive boundary value problem. "*Adv. Differ. Equ.* 2012, 159 (2012). <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-159>"
- 8) A. A. Samarskii; Victor a. Galaktionov and al, Blow-Up ".Quasilinear Parabolic Equations *De Gruyter, De Gruyter Expositions in Mathematics* 1995"
- 9) S.A. Moulay rachid , F.M. Delfi; Torres : existence of positive solutions for non local p -laplacian thermistor problems on time scales . "*J. I. P. A. M.* vol 08 (2007) issue 3 article 69 , 10 pp"
- 10) A.A. Lacey , Diffusion models with blow-up. "*J.Compu. Appl. Math* 97 (1998)39-49".