

دراسة تحليلية و رقمية لتأثير التدفق التذبذبي على الحرارة وانتقال الكتلة

Analytical And Numerical Study Of The Effect Of Oscillatory Flow On Heat And Mass Transfer

محمد دغموم¹، مراد مدرس²، مليكة احدان³، عبد الرحمان غزال⁴¹ جامعة محمد بوقرة ، بومرداس (الجزائر)، Deghmoum.mohamed@sonatrach.dz² مختبر السوائل الصناعية والقياسات والتطبيقات (FIMA) UDBKM ، عين الدفلى (الجزائر)،mourad.moderres@univ-dbkm.dz³ جامعة التكنولوجيا والعلوم هواري بومدين ، مختبر ميكانيكا الموائع النظرية والتطبيقية (الجزائر)، mihdene@yahoo.fr⁴ جامعة التكنولوجيا والعلوم هواري بومدين (الجزائر)، aghezal@usthb.dz

تاريخ النشر: 205/06/30

تاريخ القبول: 2025/06/01

تاريخ الإرسال: 2025/03/23

الملخص:

نقدم في هذا العمل دراسة تحليلية مقترنة بحل رقمي للمعادلات التي تحكم التدفقات من النوع التذبذبي. مكنت الدراسة التحليلية من استخلاص تعبيرات تصف المجالات الديناميكية والحرارية لتدفق تذبذبي في مساحة حلقيّة. تعتمد الدراسة العددية على طريقة الفروق المحدودة باستخدام مخطط ضمّني بالكامل.

الكلمات المفتاحية: التدفق المتذبذب، عمليات النقل الحراري، الفروق المحددة، الحقل الحراري .

Abstract:

We present in this work an analytical study coupled with a numerical resolution of the equations governing oscillatory-type flows. The analytical study enabled the derivation of expressions that describe the dynamic and thermal fields of an oscillatory flow in an annular space. The numerical study is based on the finite difference method, utilizing a fully implicit scheme.

Keywords: Oscillating flow, thermal transfers, finite differences, thermal field.

1.مدخل (Introduction)

تمت دراسة مشكلة انتقال الحرارة في التدفقات التذبذبية في العديد من المجالات نظراً لتواجدها في الظواهر الطبيعية وتطبيقاتها الصناعية المختلفة. نذكر على سبيل المثال محركات ستيرلينغ، والمبادلات الحرارية، ونقل منتجات الطاقة، وتكرير النفط، وكذلك في المجال الطبي، وخاصة علاج الأوعية الدموية. نشير إلى الدراسة الأولى حول التدفقات التذبذبية التي قام بها إلى ريتشاردسون وتايلر (Richardson and Tyler 1929)، حيث أظهر وجود تأثير حلقي على السرعة ودرجة الحرارة من خلال القياسات التجريبية. ويتميز هذا التأثير بوجود سرعة قصوى بالقرب من الجدران وليس في مركز التدفق. أعمال وومرسلي (Womersley 1955) وأوتشيدا (Uchida 1956) أثبتت صحة نتائج ريتشاردسون وآخرين، من خلال تحليل الحركة الجيبية وغير الجيبية للتدفق التذبذبي لسائل غير قابل للضغط في أنبوب أفقي. طور أتابك وتشانغ (Atabek and Chang 1961) حلاً تحليلياً لملاح السرعة في التدفق الصفائحي التذبذبي في أنبوب أسطواني. لقد اعتبروا أن التدفق يتم تأسيسه بسرعة تدفق على شكل مجموع جبري لنبضات الجيب وجيب التمام. بعد ذلك، أجرى زهاو وتشانغ (Zhao and Cheng 1995) دراسات تجريبية وعددية على التدفق الصفائحي للهواء المتذبذب داخل أنبوب أسطواني الذي تم تسخينه بواسطة تدفق حراري منتظم. ومن قياسات درجة الحرارة، في مركز الأنبوب في عدة مواضع محورية وعلى مستوى الجدار الداخلي للسخان، حيث تم تحديد علاقة لمتوسط رقم نسلت حسب التعريف الكلاسيكي بدلالة عدد رينولدز الترددي.

تمت دراسة السريان التذبذبي المزدوج، في هيكل مغلق العلبة تحت تأثير الحرارة وتدفق الكتلة، بواسطة ماسودا وآخرين (Masuda, Yoneya et al. 2002)، وقد قاموا بتقييم تأثير قيم الثلاثة اعداد ذات الصلة مثل عدد رايلي، عدد لويس، ونسبة الطفو على طبيعة السريان.

بالإضافة إلى ذلك، زهاو وآخرون (Zhou and Zebib 1994) تم تحديد بداية النمو البلوري في التدفقات التذبذبية مزدوجة الانتشار عن طريق عملية نقل البخار، حيث تم استنتاج تتناسب السرعة الأفقية على طول الجدران الجانبية الرأسية مع التدفق المذاب وهذا ما سمح للتنبؤ برقم غراشوف الحراري الحرج.

وبالمثل، سوتو ميكا وآخرون (Soto-Meca, Serna et al. 2016) قاموا بتحليل أداء نقل الحرارة والكتلة لسريان مزدوج في تجويف ذو الغطاء متحرك تحت تأثير التدفق التذبذبي. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أن النظام التذبذبي يعزز انتقال الحرارة/الكتلة داخل التجويف المربع يصل إلى (14%/38%) على التوالي، فيما يتعلق بالحالة غير النابضة وذلك بسبب تعزيز مجالات إجهاد القص الإضافية.

علاوة على ذلك، زونتول وآخرون (Zontul, Kurtulmuş et al. 2017) قاموا بإجراء دراسة عددية لتعزيز انتقال الحرارة للجريان التذبذبي الصفائحي في قناة متموجة، درجة حرارة جدرانها ثابتة، وتبقى أبعادها الهندسية ثابتة. لقد أظهرت النتائج أن الجريان التذبذبي له مساهمة إيجابية في انتقال الحرارة للشكل الهندسي المدروس.

أبركان وآخرون (Aberkane, Mouderes et al. 2014) قاموا بدراسة تحليلية و عددية لتأثير التدفق التذبذبي النبضي على السلوك الديناميكي لتدفق السوائل حول اسطوانة أفقية في أنبوب أسطواني. لقد مكنت الدراسة التحليلية من إنشاء تعبير نظري يحدد السرعة القصوى كدالة للتردد والطور. كما تم التحقق من صحة النتيجة وتأكيدها عددياً، فهي تبين، من ناحية، أن التأثير الحلقي يزداد مع التردد ويتناقص مع الطور، ومن ناحية أخرى يبدأ تأثير التذبذبات من تردد يتجاوز قيمة 150، تمت مقارنة هذه النتائج أيضاً بحالة التدفق المستوي في أنبوب مستطيل حيث يكون التأثير الحلقي موجوداً فقط في مراحل معينة على عكس الحالة الأسطوانية.

دراسة بن أكشة و آخرون (Benakcha 2008)، مخصصة للتحليل العددي لمعادلات نافير-ستوكس والمعرفة الشاملة لتطور الأنظمة الديناميكية والحرارية للتدفق التذبذبي لسائل حقيقي بخواص فيزيائية ثابتة في تجويف أسطواني ساخن. لقد استخدم طريقة الفرق المحددة.

حديثاً، زهو وآخرون (Zhu and Bian 2018) قاموا بدراسة سلوك انتقال الكتلة لمحول CMC السائل غير النيوتوني بتركيز 700 جزء في المليون في خمسة أنابيب ذات جدران موجية متماثلة محورياً بأحجام مختلفة للتدفق النبضي. وقد تبين أن تأثير انتقال الكتلة يتعزز بزيادة الكسور التذبذبية (P)، إلى جانب ذلك، تم قياس معدل انتقال الكتلة بالطريقة الكهروكيميائية في نطاق معدل النقاط التذبذبية الأكبر. ولوحظ أن معدل انتقال الكتلة يزداد بزيادة (P) ويصل إلى أقصى معدل انتقال كتلة عند الكسور التذبذبية المثلى P_{opt} . بعد الوصول إلى الكسور التذبذبية المثلى P_{opt} ، ينخفض معدل انتقال الكتلة مع زيادة (P).

كشفت الدراسة التي قام بها زهو وآخرون (Zhu and Peng 2019) محاكاة عددية أن دوران حوض حلقي يحتوي على مصهور السيليكون- الجيرمانيوم يثبط التدفق الشعاعي ويؤثر على استقرار التدفق، حيث يتسبب في انتقاله إلى وضع تذبذبي عند تجاوز عدد رينولدز حراري معين، مع تباين النمط تبعاً لعدد تايلور.

أظهرت دراسة تحليلية أنجزها سوبهانامايان و آخرون (Sobhnamayan, Sarhaddi et al. 2021) أن التدفق النابض في أنبوب مسامي يتأثر بشكل ملحوظ بعدد دارجي وسعة تدرج الضغط، بينما يقل تأثيره مع زيادة اللزوجة وعدد برانتل والتردد، حيث يصبح التدفق مستقرًا عند الترددات العالية ($\Omega > 30$).

هانسدا وآخرون (Hansda and Pandit 2023) بينوا من خلال دراسة رقمية أن تقعر وتحدب الجدران الجانبية يؤثران بشكل كبير على أداء الحمل المختلط ثنائي الانتشار، حيث يتحسن نقل الحرارة والكتلة عند انخفاض عدد ريتشاردسون، مع تفوق أحد أشكال التمزج (Case-4) في الأداء مقارنةً بالأنماط الأخرى.

استخدمت الدراسة التي أنجزها عليو وآخرون (Aly, Alsedias et al. 2023) طريقة ISPH لمحاكاة انتشار الجسيمات الصلبة في جريان نانوسائل أثناء الدوران المزدوج لأسطوانتين دائريتين داخل تجويف. حملت نصف الجسيمات الصلبة قيم T_h و C_h بينما حمل النصف الآخر T_c و T_c . تميزت الدراسة بمحاكاة الدوران المزدوج مع تأثير أعداد سوريت-دوفور على انتشار الجسيمات. أظهرت النتائج أن التفاعل بين الجسيمات الصلبة وجريان النانوسائل يزداد مع ارتفاع أعداد سوريت/دوفور، بينما يقل بزيادة عدد هارتمان. كما لوحظ أن نصف قطر الأسطوانة يلعب دوراً مهماً في نقل الحرارة و الكتلة بسبب تغير عدد الجسيمات الصلبة، مع تأثر قيمتي نوسلت وشروود بالعوامل الفيزيائية.

أظهرت دراسة تحليلية أجراها سينغ وآخرون (Singh, Hanumantha et al. 2023) أن جريان نانوسائل التيتانيوم المائي التذبذبي بين جدران موصلة وغير موصلة يتأثر بشكل كبير بالتركيز النانوي والمجال المغناطيسي، حيث يؤدي زيادة هذين العاملين إلى إبطاء الجريان وإضعاف المجال المغناطيسي الحثي. كرولو وآخرون (Krul and Bagchi 2025) تشكل هذه السلسلة من الدراسات تحليلاً متكاملًا لديناميكيات الموائع في الأنظمة البيولوجية والهندسية المعقدة، حيث تناولت أربعة محاور رئيسية: التحليل العددي للتدفق النانوي تحت تأثير الدوران المزدوج للأسطوانات باستخدام طريقة ISPH، وكشف عن تعزيز انتقال الحرارة/الكتلة مع أعداد سوريت-دوفور المرتفعة، دراسة التدفق المغناطيسي النابض لنانوسائل التيتانيوم بين الجدران الموصلة، وأظهرت أن زيادة التركيز النانوي والانتشار المغناطيسي يقللان من سرعة الجريان، التحليل الثنائي (عددي-تحليلي) للجريان النابض مع التركيز على تأثير معامل وومرسل، حيث ثبت أن القيم $\alpha > 10$ تؤدي لزيادة عدم الاستقرار الحراري بنسبة 35%، بحث تفاعل السائل-هيكل في الأنابيب المرنة اللزجة، وتميز بتحديد ثلاث أنماط للتخلفية (هستريزيس) وعلاقتها بإزاحة الطور. تجمع هذه الأبحاث بين النمذجة المتقدمة والتحليل الفيزيائي الدقيق، وتقدم رؤى قيمة لتطبيقات في المجالات الطبية والهندسية، خاصة في تصميم الأجهزة الدقيقة وأنظمة التحكم الحراري.

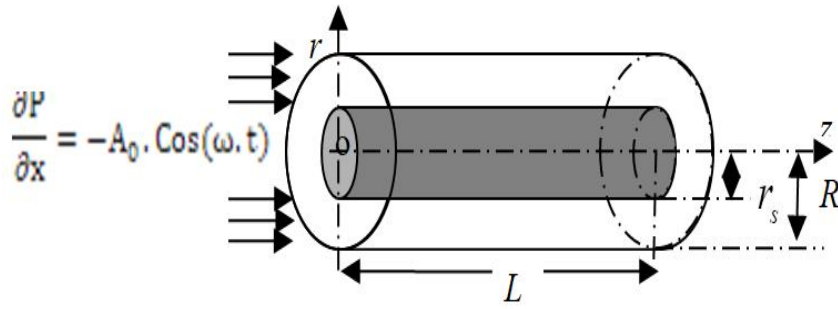
هارماندار وآخرون (Harmandar and Altınoluk 2024)، تدرس هذه الورقة تصميم مضخة دموية نابضة تعمل بطريقة الطرد المركزي، بهدف التغلب على القيود الحالية في أجهزة القلب والرئة الصناعية المستخدمة في جراحات القلب المفتوح. حيث تُظهر التحليلات المقارنة أن المضخات الدوارة، رغم انتشارها الواسع، تتسبب في أضرار أكبر للعناصر المشكلة للدم مقارنةً بمضخات الطرد المركزي

الأكثر ملاءمة للاستخدام طويل الأمد. ورغم المزايا الفسيولوجية للجريان النابض - الذي يحاكي النبض القلبي الطبيعي ويقلل من الالتهابات المصاحبة - إلا أن الأجهزة الحالية تعاني من محدودية في ضبط تردد النبض ومعدل الجريان، خاصةً في المضخات المركزية. تهدف هذه الدراسة إلى تطوير نموذج أولي لمضخة طرد مركزي قادرة على توفير تدفق دموي نابض قابل للضبط بدقة في كل من التردد ومعدل الجريان، مما قد يحسن الأداء السريري لهذه الأجهزة ويقلل من آثارها الجانبية.

2. الوضعية الاشكالية:

نعتبر التدفق التذبذبي لسائل لزج غير قابل للضغط في أنبوب أسطواني بجدار ثابت الحرارة حيث يوجد أنبوب أسطواني آخر نصف قطره أصغر من قطر الأنبوب الأول وله نفس الطول. يوضع هذا الأنبوب أفقياً على محور التماثل ويتم تسخينه إلى درجة حرارة معينة.

السائل الذي يدور في الفضاء الحلقي بين الأنبوبين يكون في البداية في حالة سكون في درجة حرارة ثابتة. شكل (1).



الشكل 1: مخطط الدراسة

في اللحظة الابتدائية ينبض المائع عند مدخل الأنبوب على طول محور هذا الأخير مع تدرج الضغط المحوري الدوري.

يتم فرض الشروط الحدية في السرعة ودرجة الحرارة على الجدران الجانبية للأنبوبين وكذلك عند المدخل والمخرج.

1.2. الفرضيات المبسطة:

تتم دراسة سيلان المائع حسب الفرضيات الآتية:

- التدفق متذبذب، صفائحي، غير قابل للضغط، كامل التطور، موازي لمحور الأنبوب ومتماثل المحور.
- السائل نيوتوني ويفترض أن خواصه الفيزيائية ثابتة؛
- قوى الحجم مهمة؛

– التبدد اللزوجيمهل؛

– جدران الأنبوب الخارجي عازلة للحرارة.

نتم كتابة معادلة حفظ التدفق في الإحداثيات الأسطوانية على النحو التالي:

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \vartheta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right) \right] \quad (1)$$

معادلة حفظ الطاقة تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial t} + \varepsilon \cdot u(r, t) \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial x} = k_n \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_n(r, x, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_n(r, x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (2)$$

$$0 < r < R_t \quad \varepsilon = 1. n = f \quad \text{حيث :}$$

نقوم بإدخال المتغيرات بدون أبعاد التالية:

$$r^* = \frac{r}{R_t}, \quad x^* = \frac{x}{R_t}, \quad t^* = \omega t, \quad u^* = \frac{u}{\omega R_t}, \quad T^*_f = \frac{T - T_f}{T_p - T_f}, \quad p^* = \frac{p}{\rho \omega^2 R_t^2}$$

نحصل على المعادلات بدون أبعاد لاتيية:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial T^*_f}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*_f}{\partial x^*} = \frac{1}{\alpha^2 Pr} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*_f}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*_f}{\partial x^{*2}} \right] \quad (4)$$

3- الدراسة التحليلية

بسبب التماثل المحوري للمشكلة، تم تقليص مجال الدراسة إلى المجال المتواجد بين الأنبوب العازل والجسم الصلب المسخن.

مع أخذ المعادلة (3) واعتبار أن المائع يتعرض لتدرج ضغط متذبذب

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -\tilde{A} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \text{Re}(-\tilde{A} \cdot e^{it^*}) \quad (5)$$

يمكن وضع عبارة السرعة الاحدية على الشكل التالي

$$u^*(r^*, t^*) = \text{Re}(f(r^*) \cdot e^{it^*}) \quad (6)$$

يكون حل المعادلة التفاضلية المتجانسة على الشكل التالي

$$f^*(r^*) = C_1 I_0(\beta r^*) + C_2 K_0(\beta \cdot r^*) - iA^* \quad (7)$$

حيث:

$$r^* = \frac{R_{obs}}{R_t}, u^* = 0 \quad (8)$$

$$T_f^*(r^*, x^*, t^*) = Re(-\gamma^* \cdot x^* + \gamma^* g_f(r^*) e^{it^*} + 1) \quad (9)$$

$$r^* = 1, u^* = 0$$

$$\begin{cases} C_1 I_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) + C_2 K_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) - i\tilde{A} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} C_1 I_0(\beta) + C_2 K_0(\beta) - i\tilde{A} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

تساوي C1 و C2 وبالتالي فإن الثوابت:

$$C_1 = \left[\frac{i\tilde{A} \left(K_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) - K_0(\beta) \right)}{I_0(\beta) \cdot K_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) - K_0(\beta) \cdot I_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right)} \right] \quad (12)$$

$$C_2 = \left[\frac{i\tilde{A} \left(I_0(\beta) - I_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) \right)}{I_0(\beta) \cdot K_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) - K_0(\beta) \cdot I_0 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right)} \right] \quad (13)$$

بما أن قيمة A غير معروفة فاننا نستعمل قانون السرعة التدفقية:

$$u_{m,max} e^{it^*} = 2 \int_{\frac{R_{obs}}{R_t}}^1 \bar{f}(r^*) r^* e^{it^*} \omega \cdot (R_t - R_{obs}) dr^* \quad (14)$$

مع اعتبار أن :

$$C'_2 = \frac{C_2}{i\tilde{A}} \text{ و } C'_1 = \frac{C_1}{i\tilde{A}} \quad (15)$$

وبعد التكامل نجد أن:

$$i\tilde{A} = \frac{Re_{max}}{2 \cdot \alpha^2} \left[\frac{1}{\frac{C'_1}{\beta} \left(I_1(\beta) - I_1 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) \right) - \frac{C'_2}{\beta} \left(K_1(\beta) - K_1 \left(\beta \frac{R_{obs}}{R_t} \right) \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_{obs}}{R_t} \right)^2} \right] \quad (16)$$

وبالتالي يتم كتابة عبارة السرعة في الفضاء الحلقي على النحو التالي:

$$u^*(r^*, t^*) = [C'_1 \cdot I_0(\beta \cdot r^*) + C'_2 \cdot K_0(\beta \cdot r^*) - 1] \cdot i\tilde{A} \cdot e^{it^*} \quad (17)$$

حتى نتمكن من حل المعادلة (4) نفرض ان شكل الحرارة يكتب على النحو الاتي :

$$T_f^*(r^*, x^*, t^*) = Re(-\gamma^* \cdot x^* + \gamma^* g_f(r^*) e^{it^*} + 1) \quad (18)$$

$$\gamma^* = \frac{R_t}{L_t} \text{ مع}$$

نحصل على :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} \bar{g}_f + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \bar{g}_f - i \cdot \alpha^2 Pr \cdot \bar{g}_f = -\alpha^2 \cdot Pr \cdot \bar{f}$$

هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بوجود طرف ثاني، حلها يأخذ الشكل التالي:

$$\bar{g} = A_1 I_0(\delta \cdot r^*) + A_2 K_0(\delta \cdot r^*) - i \cdot C_1 I_0(\beta \cdot r^*) - i \cdot C_2 K_0(\beta \cdot r^*) - \tilde{A} \quad (19)$$

حيث أن:

$$\delta = \beta \sqrt{Pr}$$

باستخدام الشروط الحدية التالية :

$$r^* = \frac{R_{obs}}{R_t} \Rightarrow T^* = 1 \quad (20)$$

$$r^* = 1 \Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad (21)$$

وباستخدام الشروط الحدية، نحصل على نظام المعادلات الجبرية التالي:

$$A_1 I_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) + A_2 K_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) = i \cdot \left[C_1 I_0\left(\beta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) + C_2 K_0\left(\beta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \right] + \tilde{A} + \frac{x^*}{e^{it^*}} = \psi_1 \quad (22)$$

و كذلك:

$$A_1 \cdot \delta \cdot I_1(\delta) - A_2 \delta \cdot K_1(\delta) = i \cdot [C_1 \cdot \beta \cdot I_1(\beta) - C_2 \cdot \beta \cdot K_1(\beta)] = \psi_2 \quad (23)$$

حيث أن:

$$A_1 = \left[\frac{\left(\psi_1 \cdot \delta \cdot K_1(\delta) + \psi_2 K_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \right)}{I_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \cdot \delta \cdot K_1(\delta) + K_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \cdot \delta \cdot I_1(\delta)} \right] \quad (24)$$

و كذلك:

$$A_2 = \left[\frac{\left(\psi_1 \cdot \delta \cdot I_1(\delta) - \psi_2 I_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \right)}{I_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \cdot \delta \cdot K_1(\delta) + K_0\left(\delta \cdot \frac{R_{obs}}{R_t}\right) \cdot \delta \cdot I_1(\delta)} \right] \quad (25)$$

أخيراً نجد أن شكل درجة الحرارة في الفضاء الحلقي في التدفق المتذبذب يكتب على النحو التالي:

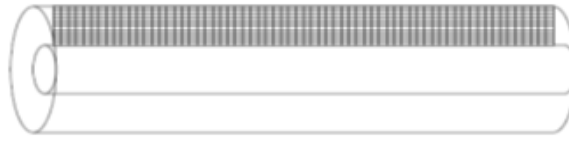
$$\begin{aligned} T_f^*(r^*, x^*, t^*) \\ = Re\{-\gamma^* x^* + \gamma^* [A_1 I_0(\delta \cdot r^*) + A_2 K_0(\delta \cdot r^*) - i \cdot C_1 I_0(\beta \cdot r^*) - i \cdot C_2 K_0(\beta \cdot r^*) - \tilde{A}] e^{it^*} + 1\} \end{aligned} \quad (26)$$

4. الدراسة الرقمية:

تخضع التدفقات غير المستقرة للسوائل غير القابلة للضغط في أي شكل هندسي لمعادلات نافيه-ستوكس التفاضلية الجزئية. هذه المعادلات غير خطية ويصعب الحصول على حل تحليلي لها. مما يستدعي استخدام أساليب النمذجة الرقمية.

يتطلب اختيار طريقة مناسبة لحل مشكلة عددية مراعاة عدة معايير. من ناحية، يجب أن يكون الوقت اللازم لحساب الحل أقصر ما يمكن، ومن ناحية أخرى، يجب أن تكون دقة الحل أكبر ما يمكن.

تعتمد طريقة الحل المختارة على استبدال مجال تغير المعالم α بمجموعة من القيم المنفصلة للنقاط، تسمى عقد النظام، والتي تتوافق مع عقد الشبكة المشكلة. تكون الخلايا مربعة. يتم تحديد كل خلية بواسطة الفهرس الذي يشير إلى الموضع على المحور. ولأسباب تناظر الشكل، اقتصرَت الدراسة على المجال المحدد بين موضع الجسم والجدران $[R_{obs}/R_t, 1]$. في حين أن العقد الشبكية لا تتطابق مع الحافة الأفقية للجسم الأسطواني.



شكل 2. التمثيل الهندسي للمنطقة المدروسة

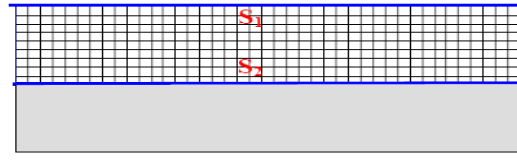
لقد تم اختيار طريقة الفوارق المحددة باتباع نموذج ضمني. هذا النموذج يستخدم جداء مصفوفة ثلاثية القطر و شعاع مما يتطلب استعمال طريقة خاصة لإيجاد حل للنظام الجبري المقترح.

تكتب المعادلة (3) على الشكل التالي

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = A^* \cdot \cos(t^*) + \frac{1}{Re_\omega} \left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta r} \right]$$

تكتب المعادلة (4) على الشكل التالي :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \gamma \cdot u_i^n = \frac{1}{Re_\omega \cdot Pr} \left[\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta r} \right]$$



1.4. الشروط الحدية:

شكل 3 حدود الوسط المدروس

على الجدار S_1

بالقرب من هذا الجدار لدينا شرطان حدوديان، أحدهما مرتبط بالسرعة والآخر بدرجة الحرارة

$$r^* = 1 \Rightarrow u^*(n) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \Rightarrow T_{i+1}^{n+1} = T_{i-1}^{n+1}$$

على الجدار S_2

الشروط الحدية في هذا الجدار تتعلق بالسرعة والحرارة :

$$r^* = \frac{R_{obs}}{R_t} \Rightarrow u^*(1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \Rightarrow T_{i-1}^{n+1} = T_i^{n+1}$$

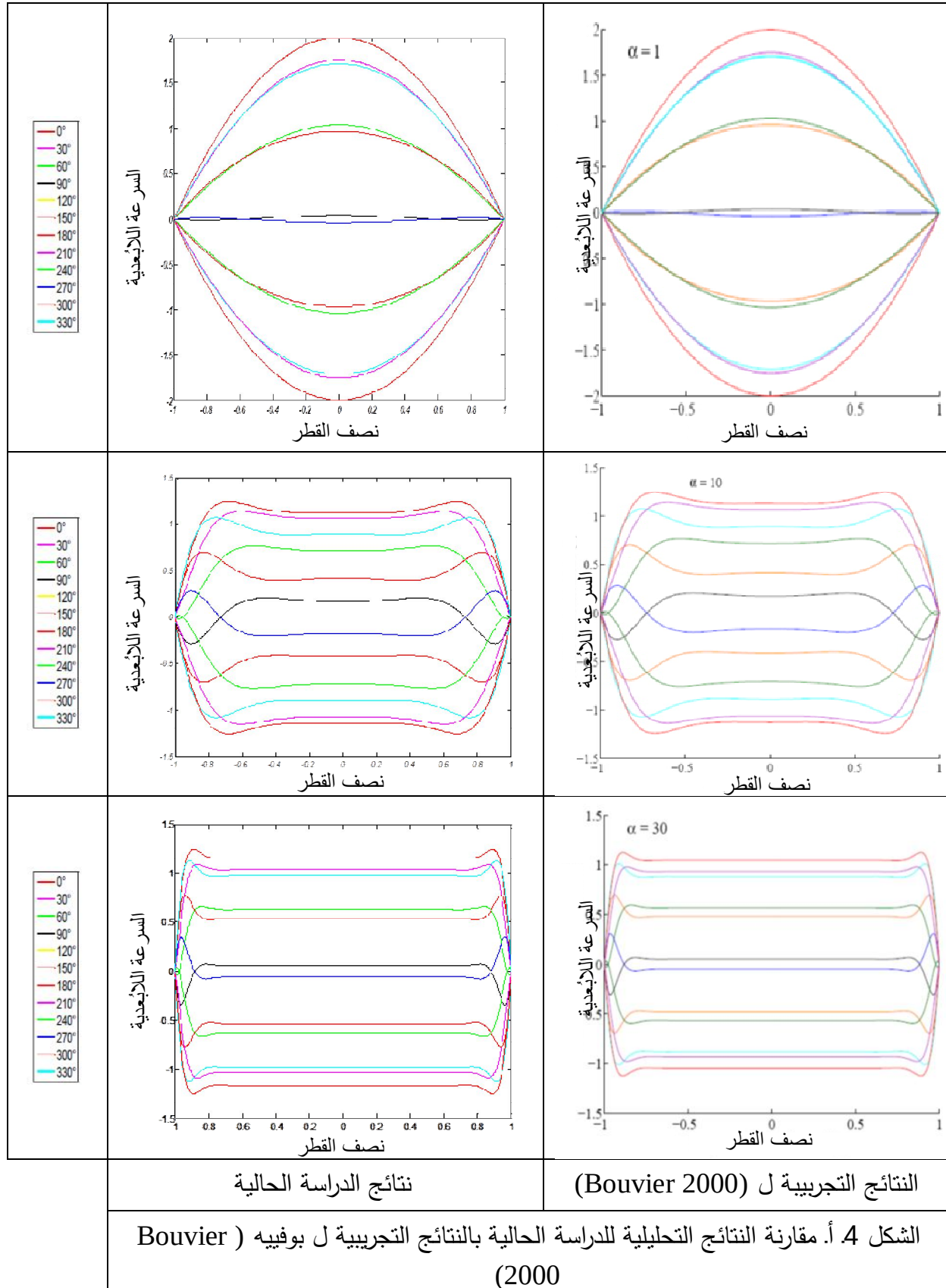
5. مصادقة النتائج

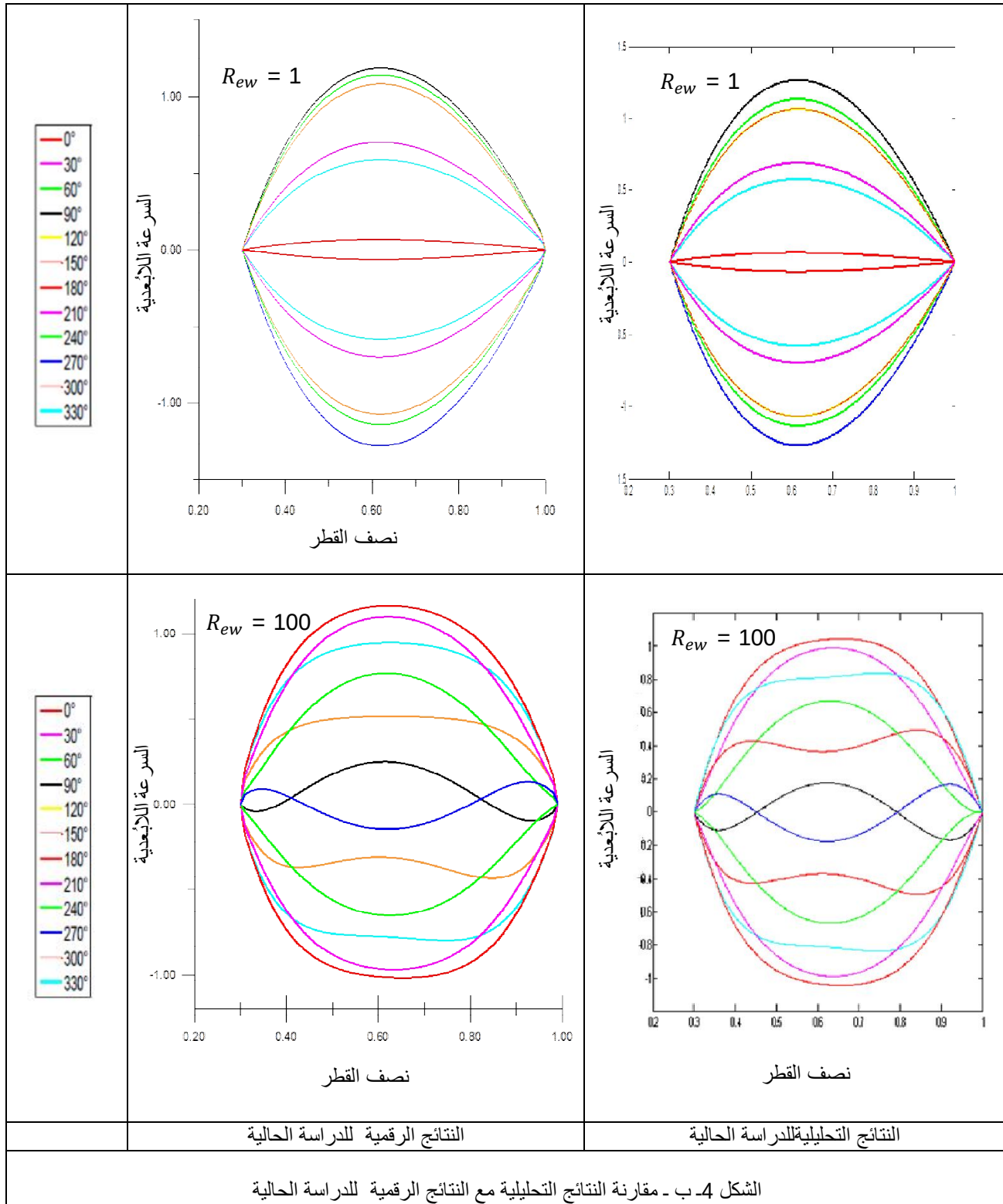
1.5. النتائج التحليلية مع النتائج التجريبية للمؤلف بوفيه (Bouvier 2000):

يُظهر الشكل البياني توافقاً جيداً بين النتائج التحليلية والبيانات التجريبية التي أوردها المؤلف بوفيه (Bouvier 2000)، وذلك من خلال تمثيل السرعة القطرية (Radial Velocity) بدلالة نصف القطر لثلاث قيم مختلفة للعدد وومرسي ($\alpha = 1$, $\alpha = 10$, $\alpha = 30$). نلاحظ أن المنحنيات الناتجة عن الحل التحليلي تتبع نفس النمط الذي أظهرته النتائج التجريبية، خاصة من حيث التماثل والسلوك العام للسرعة عند الأطراف والمنتصف. بالنسبة للقيمة $\alpha = 1$ ، يكون التباين في السرعة أكثر وضوحاً، بينما يتناقص هذا التباين مع زيادة عدد وومرسي، وهو ما يتطابق مع الملاحظات التجريبية. هذا التوافق يدعم صحة النموذج التحليلي المستخدم ويعزز من دقته في تمثيل الظواهر الفيزيائية للانسحاب المدروس، (الشكل 4أ).

2.5. النتائج التحليلية مع النتائج الرقمية للدراسة الحالية

يعرض الشكل (4 ب) مقارنة دقيقة بين النتائج التحليلية والنتائج الرقمية المستخرجة من الدراسة الحالية، وذلك من خلال تمثيل السرعة القطرية كمياً وفق نصف القطر وهذا من أجل قيمتين للعدد رينولدز الحركي $R_{ew} = 1$ و $R_{ew} = 100$ ، نلاحظ أن المنحنيات الناتجة عن الحل التحليلي تتطابق بشكل كبير مع المنحنيات الرقمية، خصوصاً في قيم الذروة والانخفاض، مما يدل على دقة الحل التحليلي في تمثيل السلوك الفيزيائي للانسحاب عند القيم المنخفضة لعدد وومرسي.

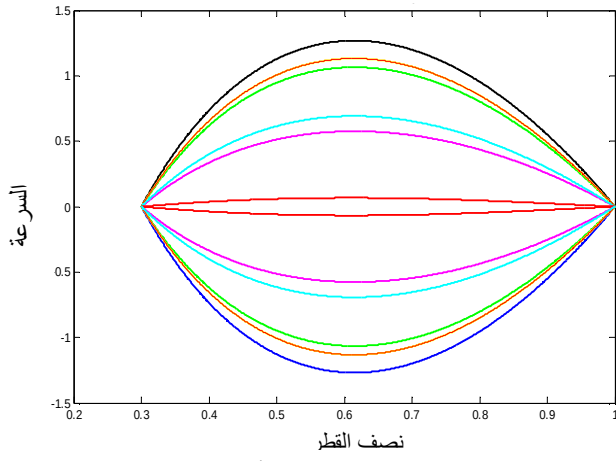




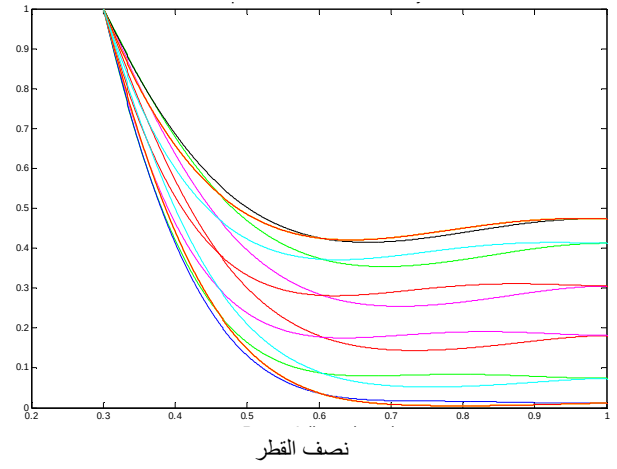
6. النتائج والمناقشات

في حالة الترددات المنخفضة، تكون منحنيات السرعة على شكل قطع مكافئ يتميز بقيمة أعظمية عند المركز، وهذه هي حالة شكل "بوازوي" شكل (5). عندما يزيد رقم رينولدز الحركي شكل (6)، نلاحظ بداية وجود الظاهرة الحلقية. تجدر الإشارة إلى أننا وجدنا في الدراسة التحليلية أن عدد رينولدز الحركي الموافق لنفس الظاهرة يساوي 64 عند القيم الكبيرة لنفس العدد ابتداء من 900 إلى 2500 نلاحظ وجود التأثير الحلقي على جميع الأطوار حيث السرعة القصوى تكون بالقرب من الجدران الجانبية للأنبوبين، شكل (7).

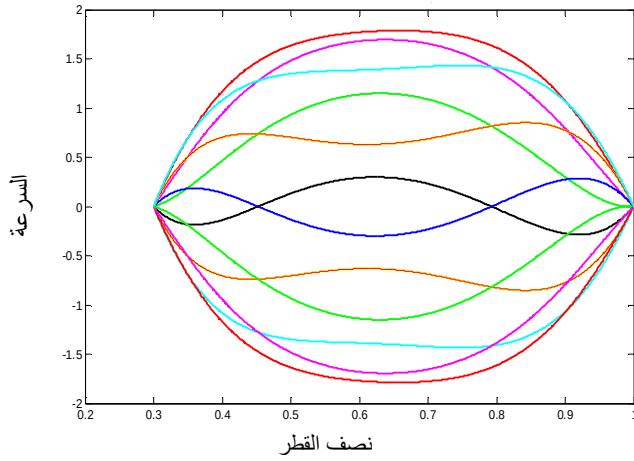
وتُظهر منحنيات درجة الحرارة شكل (8)، وجود الظاهرة الحلقية في الحالة المدروسة هنا، مما يؤكد النتائج العددية للمؤلف (Zhao and Cheng 1995). نلاحظ وجود حد أقصى بالقرب من الجدار الساخن والذي يرجع بشكل أساسي إلى وجود الظاهرة الحلقية في ملفات السرعة. النتائج التي تم الحصول عليها هي باعتبار: $Pr = 0.7, Re_{max} = 12000, R_{obs}/R_t = 0.3$



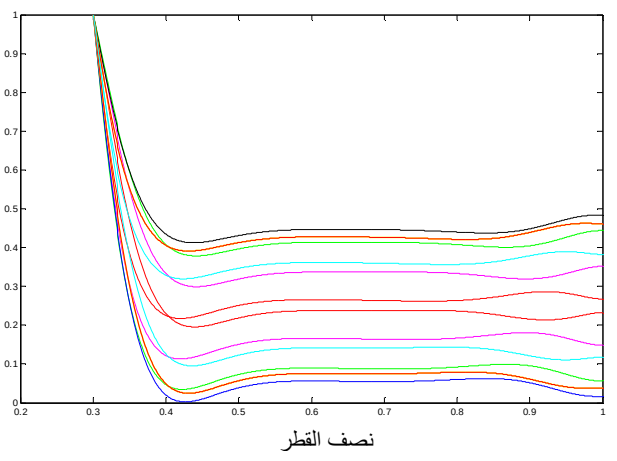
الشكل 5. تغير القطرية من أجل $Re_0=1$.



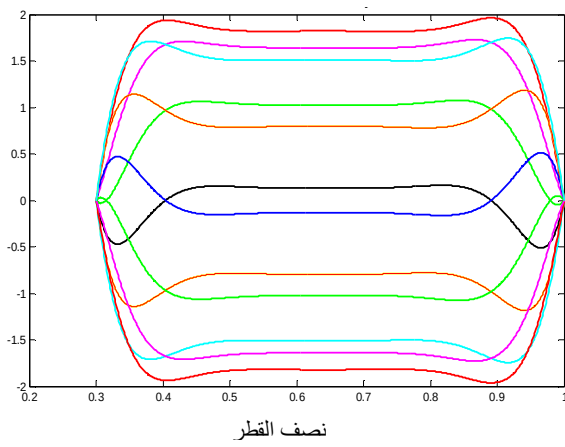
الشكل 8. تغير الحرارة القطرية من أجل $Re_0=1$.



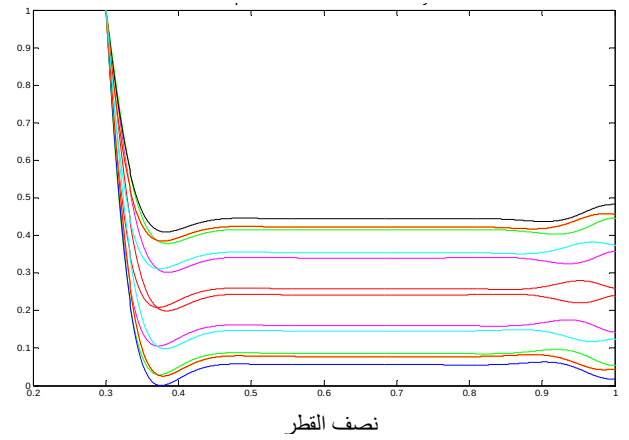
الشكل 6. تغير السرعة القطرية من أجل $Re_0=100$.



الشكل 9. تغير الحرارة القطرية من أجل $Re_0=100$.



الشكل 7. تغير السرعة القطرية من أجل $Re_0=900$.



الشكل 10. تغير الحرارة بدلالة الشعاع من أجل $Re_0=900$.

7. خلاصة (conclusion)

قدمنا في هذا العمل دراسة تحليلية و رقمية لتأثير آلية انتقال الحرارة في جريان من النوع التذبذبي لمائع حقيقي محصور في فراغ حلقي.

سمحت الدراسة التحليلية الحصول على عبارتين تصفان التطور الشعاعي للسرعة ودرجة حرارة المائع المتذبذب في الفضاء الحلقي. كما مكنت من تحديد تأثير الهندسة على منحنيات السرعة، وموضع السرعة القصوى كدالة للتردد والطور.

أظهرت النتائج من ناحية أن وجود التأثير الحلقي على منحنيات السرعة يتناسب طرديا مع التردد ويتناسب عكسيا مع الطور، ومن ناحية أخرى أن تطور هذا التأثير يحدث لقيم تردد أعلى في حالة المساحة الحلقية مقارنة بحالة الأنبوب.

بالنسبة للآفاق المستقبلية لهذا العمل، نقترح دراسة التدفق ثنائي الأبعاد باستخدام طريقة الاتجاهات المتناوبة، وذلك للاقترب أكثر من الواقع والتحقق بشكل أفضل من تغير درجة الحرارة الذي تم الحصول عليه في هذه الدراسة. كما يمكن إجراء تركيب تجريبي مُحسّن يسمح بتحديد المجال الحراري، ولذلك نوصي باستخدام قياس سرعة الليزر بتأثير دوبلر، والذي يتميز بقدرته على قياس درجة حرارة السائل دون التأثير على التدفق.

تسميات الرموز

الوحدة	الرمز	التعريف
	A	سعة تدرج الضغط المتذبذب
$(2 \cdot x_{m,max}/L_t)$	A_f	السعة الابعدية
Hz	F	التردد هرتز
	h_f	معامل التبادل الحراري بالحمل
$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$	I_0	دالة ببسال المعدلة من النوع الأول من الرتبة 0
	I_1	دالة ببسال المعدلة من النوع الأول من الرتبة 1
	K_0	دالة ببسال المعدلة من النوع الثاني من الرتبة 0
	K_1	دالة ببسال المعدلة من النوع الثاني من الرتبة 1
m	L_1	طول الأنبوب الاجمالي
	Nu	عدد نيوسلت
Pa	P	الضغط باسكال
	Pr	عدد براندتل
$(\frac{U_{m,max} \cdot D}{\vartheta})$	Re_{max}	عدد رينولدز الاعظمي
$\sqrt{\frac{\omega^2 \rho R}{\mu}}$	Re_w	عدد وومرسيلي
Sec	t	الزمن
Sec	t_0	الزمن المرجعي ثانية
K	T	درجة الحرارة
	T^*	درجة الحرارة
	T_p^*	درجة الحرارة الابعدية للجدار الساخن
	T_{ad}^*	درجة الحرارة الابعدية للجدار العازل
$m \cdot Sec^{-1}$	U	المركبة الافقية للسرعة
$m \cdot Sec^{-1}$	U_m	معدل التدفق اللحظي
m^3	V	حجم
$m \cdot Sec^{-1}$	V_{deb}	سرعة التدفق
m	X	الإحداثيات الافقية (محور الأنبوب)
$K \cdot m^{-1}$	γ	التدرج الطولي للحرارة

Pa. Sec	μ_d	اللزوجة الديناميكية باسكال
$m^2 \cdot Sec^{-1}$	ν	اللزوجة الحركية
$Kg \cdot m^{-3}$	ρ	الكثافة الحجمية
(rad/s)	ω	التردد الزاوي
الرموز المستخدمة		

$m \cdot Sec^{-1}$

m^3

Référence :

- Aberkane, S., M. Mouderes, et al. (2014). Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a rotating horizontal annulus. Proceedings of the international conference on heat transfer and fluid flow.
- Aly, A. M., N. Alsedias, et al. (2023). "Interactions between solid–fluid particles during thermosolutal convection of a rotating cylinder in a cavity." Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**83**(8): 845-859.
- Atabek, H. B. and C. C. Chang (1961). "Oscillatory flow near the entry of a circular tube." Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**12**: 185-201.
- Benakcha, Y. (2008). Contribution à l'étude du transfert thermique entre un écoulement pluse et un solide chauffé, Alger.
- Bouvier, P. (2000). Transferts thermiques en écoulement oscillant dans une conduite cylindrique: Application au moteur Stirling, Nantes.
- Hansda, S. and S. K. Pandit (2023). "On the analysis of thermosolutal mixed convection in differentially heated and soluted geometries beyond rectangular." International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**33**(8): 2877-2901.
- Harmandar, N. and H. S. Altinluk (2024). "A simple prototype for pulsatile blood flow using an adjustable centrifugal pump." The European Journal of Research and Development**4**(4): 328-337.
- Krul, O. and P. Bagchi (2025). "Pulsatile flow in a thin-walled viscoelastic tube." Journal of Fluid Mechanics**1007**: A82.
- Masuda, Y., M. Yoneya, et al. (2002). "Oscillatory double-diffusive convection in a porous enclosure due to opposing heat and mass fluxes on the vertical walls." International journal of heat and mass transfer**45**(6): 1365-1369.
- Richardson, E. and E. Tyler (1929). "The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established." Proceedings of the Physical Society**42**(1): 1.
- Singh, J. K., Hanumantha, et al. (2023). Exploration of heat and mass transport in oscillatory hydromagnetic nanofluid flow within two verticals alternatively conducting surfaces, Wiley Online Library. **103**: e202300216.
- Sobhnamayan, F., F. Sarhaddi, et al. (2021). "Analytical solution of pulsating flow and forced convection heat transfer in a pipe filled with porous medium." Journal of Computational Applied Mechanics**52**(4): 570-587.
- Soto-Meca, A., J. Serna, et al. (2016). "Heat and mass transfer enhancement in a double diffusive mixed convection lid cavity under pulsating flow." Computers & Chemical Engineering**94**: 128-140.
- Uchida, S. (1956). "The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe." Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**7**: 403-422.
- Womersley, J. R. (1955). "Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known." The Journal of physiology**127**(3): 553.
- Zhao, T. and P. Cheng (1995). "A numerical solution of laminar forced convection in a heated pipe subjected to a reciprocating flow." International journal of heat and mass transfer**38**(16): 3011-3022.
- Zhou, H. and A. Zebib (1994). "Oscillatory double diffusive convection in crystal growth." Journal of Crystal Growth**135**(3-4): 587-593.
- Zhu, C.-Z. and L. Peng (2019). "Oscillatory flow in a rotating annular pool with radial temperature and solute concentration gradients." International Journal of Heat and Mass Transfer**139**: 938-947.
- Zhu, D. and Y. Bian (2018). The Influence of Oscillatory Fractions on Mass Transfer of Non-Newtonian Fluid in Wavy-Walled Tubes for Pulsatile Flow. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, IOP Publishing.
- Zontul, H., N. Kurtuluş, et al. (2017). "Pulsating flow and heat transfer in wavy channel with zero degree phase shift." European Mechanical Science**1**(1): 31-38.