

بناء أساس متعامد باستخدام خوارزمية "غرام شميدت" ومقارنته مع ادامز مولتن بالنسبة لبلدية
أولاد فاييت-الجزائر

Constructing An Orthogonal Foundation Using The Gram-Schmidt Algorithm And Comparing It With Adams-Molten For The Municipality Of Ouled Fayet, Algeria

أبو يوسف يوسف¹، الكرد كوثر²

¹ قسم الجغرافيا والتخطيط العمراني جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا (الجزائر)، y.abouyoucef@univ-alger.dz

² جامعة الجزائر 1، قسم علوم المواد (الجزائر)، k.elkourd@univ-alger.dz

تاريخ النشر: 2025/06/30

تاريخ القبول: 2025/05/17

تاريخ الإرسال: 2025/03/23

المخلص:

تبحث الدراسة على كشف التغيرات الجغرافية باختلاف الأزمنة وذلك باستخدام خوارزمية جرام-شميدت هي طريقة تُستخدم لإنشاء أساس متعامد من أساس عشوائي في فضاء جداء داخلي ذي بُعد . عند إعطاء أي أساس لفضاء جداء داخلي ، تقوم الخوارزمية بتوليد أساس متعامد من خلال الإسقاط المتتابع وطرح المركبات الموازية للعناصر المختارة سابقاً. علاوة على ذلك، يكشف تحليل الصور عن تباينات في توزيع الألوان، مما يشير إلى التغيرات التي لا ترتبط بالضرورة بالتوسع العمراني. أما بالنسبة لطريقة ادامز فهي تعتمد على التدرجات الطيفية والتغيرات الزمنية، مما يجعلها أكثر حساسية للتغيرات في الإضاءة والتقلبات الطيفية .

وكخلاصة فإن هذه النتائج تؤكد على أهمية الطرق الرقمية في اظهار وتحليل الصور الفضائية بشكل دقيق وسريع باستعمال برنامج ماتلاب . وعليه ينبغي أن تركز الدراسات المستقبلية على تحسين ظروف التحضير واستخدام تقنيات حسابية متقدمة أخرى للوصول إلى ما هو ادق في وقت قياسي. **الكلمات المفتاحية:** متجهي فضاء ، داخلي جداء، متعامد أساس، خوارزمية، شميدت غرام عددي إسقاط، استقرار.

Abstract:

The study aims to uncover geographical changes over time using the Gram-Schmidt algorithm, a method employed to create an orthogonal basis from a random basis in an inner product space of dimension. Given any basis for an inner product space, the algorithm generates an orthogonal basis through successive projection and subtraction of components parallel to previously selected elements. Additionally, image analysis reveals variations in color distribution, indicating changes unrelated to urban expansion. As for the Adams method, it relies on spectral gradients and temporal changes, making it more sensitive to lighting variations and spectral fluctuations.

In conclusion, these results underscore the importance of digital methods in accurately and swiftly displaying and analyzing satellite images using MATLAB. Therefore, future studies should focus on improving preparation conditions and employing other advanced computational techniques to achieve greater accuracy on time.

Keywords: Gram-Schmidt, algorithm, orthogonal basis, inner product, vector space, projection, numerical stability.

1. المدخل Introduction:

تشهد البلديات الحضرية في الجزائر تحولات ديناميكية تحت تأثير النمو الديموغرافي المتسارع والتحضر العفوي، مما يعيد رسم الحدود التقليدية بين المناطق الريفية والحضرية. تطرح هذه التوسعات تحديات كبيرة في مجال التخطيط الحضري، والإدارة المكانية، وتحسين البنية التحتية من خلال نماذج رياضية دقيقة وتعد بلدية أولاد فايت مثالاً واضحاً على هذا الظاهرة، حيث تبرز الحاجة إلى اتباع مناهج تحليلية تعتمد على أدوات رياضية لتقييم اتجاهات النمو الحضري وتحديد مناطق التركيز الديموغرافي. ومن هذا المنطلق، يصبح تطبيق النماذج الرياضية المتقدمة أمراً ضرورياً للتحكم في ديناميكيات التوسع الحضري وضمان تخطيط مستدام [cartonumerique.blogspot.com].

II. المواد و الطرائق Materials and methods**1.2. الإشكالية :**

إلى أي مدى تُتيح المنهجية الرياضية القائمة على مفهوم التعامدية (Orthogonality) تحديداً دقيقاً لمناطق النمو الديموغرافي السريع وتحليل الديناميكيات الحضرية في بلدية معينة، مقارنةً بنماذج رياضية أخرى؟ وما مدى فعالية هذا النهج في تحليل الاتجاهات الديموغرافية والحضرية، مع ضمان سرعة المعالجة ودقة تحديد النتائج التي يتم إنتاجها رياضياً؟

2.2. اختيار بلدية أولاد فايت يستند إلى الخصائص التالية [hindawi.com [cartonumerique.blogspot.com]]

[P Aubin

1.2.2 موقعها الجغرافي :

تُعتبر أولاد فايت مدينة محيطية ضمن تجمع الجزائر العاصمة، مما جعلها ملاذًا لاستيعاب فائض السكان القادمين من وسط الجزائر العاصمة .

2.2.2 . مميزات :

تتمتع بموقع ملائم للتوسع الحضري، إضافة إلى شبكة طرق كثيفة تخدمها بشكل جيد، وهما عاملان رئيسيان يساهمان في تعزيز الامتداد العمراني .

3.2.2 . إقليم أولاد فايت :

كان في الأصل منطقة شبه ريفية ذات طابع زراعي، لكنه فقد قيمته الزراعية نتيجة تنفيذ مشاريع عمرانية وسكنية مختلفة، ما أدى إلى تحوله إلى مدينة حضرية .

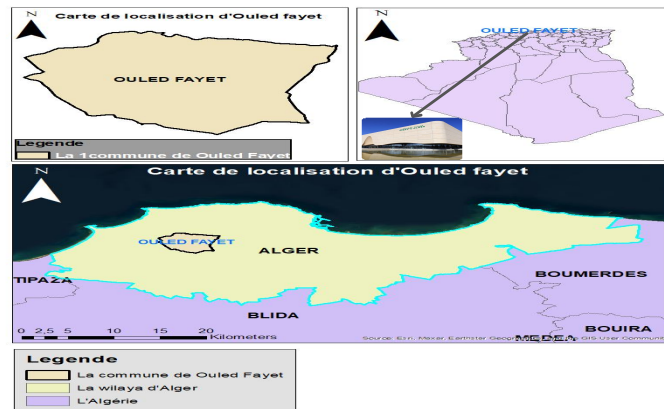
3.2. الموقع الجغرافي لبلدية أولاد فايت :

تُعد أولاد فايت إحدى بلديات ولاية الجزائر، وتقع في الضاحية الغربية للعاصمة الجزائر، على بُعد حوالي 19 كيلومترًا جنوب غرب وسط المدينة. تتمركز عند خط عرض $36^{\circ}43'$ شمالًا وخط طول $2^{\circ}56'$ شرقًا. تبلغ مساحتها حوالي 18.21 كم² ويُدّر عدد سكانها، وفقًا للإحصاء العام للسكان والإسكان (RGPH) لعام 2008، بنحو 27,593 نسمة . شكل 1.

- خط العرض والطول: $36^{\circ}43'$ شمالًا و $2^{\circ}56'$ شرقًا .

- الارتفاع عن مستوى سطح البحر: يتراوح بين 90 و 180 مترًا .

- المساحة: حوالي 18.21 كم².

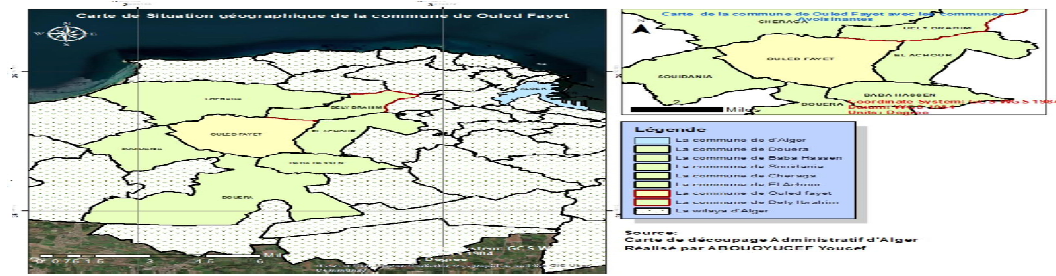


الشكل 1. الموقع الجغرافي لبلدية أولاد فايت بالنسبة لولاية الجزائر العاصمة . [hindawi.com -cartonumerique.blogspot.com]

[P. Aubin

4.2. الحدود الإدارية لبلدية أولاد فايث بالنسبة للبلديات المجاورة: شكل 2

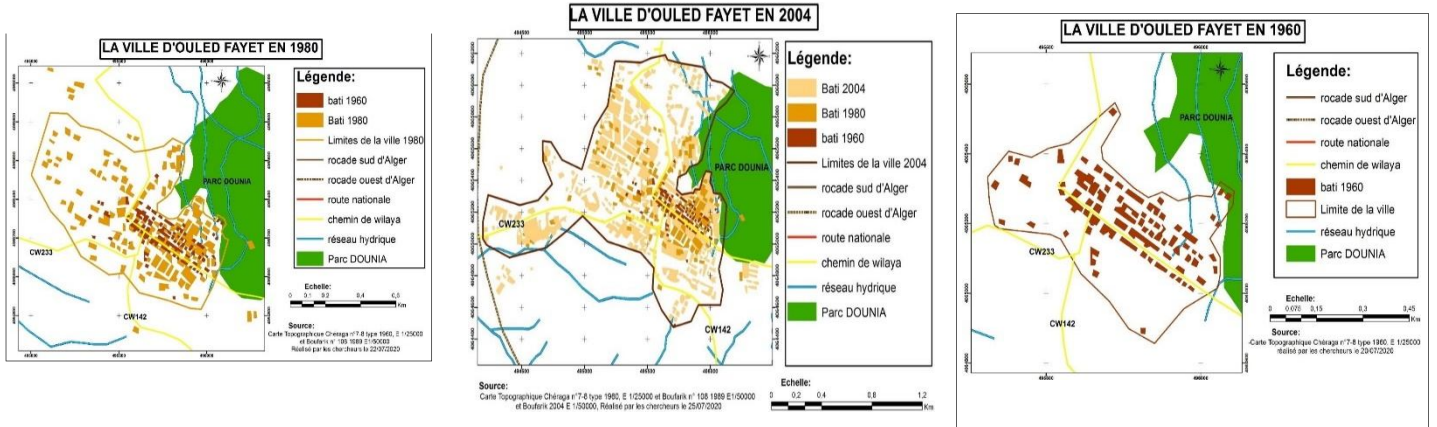
- من الشمال : تحدها بلديتا الشراقة ودالي إبراهيم .
- من الشرق : تحدها بلدية العاشور .
- من الغرب : تحدها بلدية سويدانية .
- من الجنوب : تحدها بلديتا دويرة وبابا حسن.



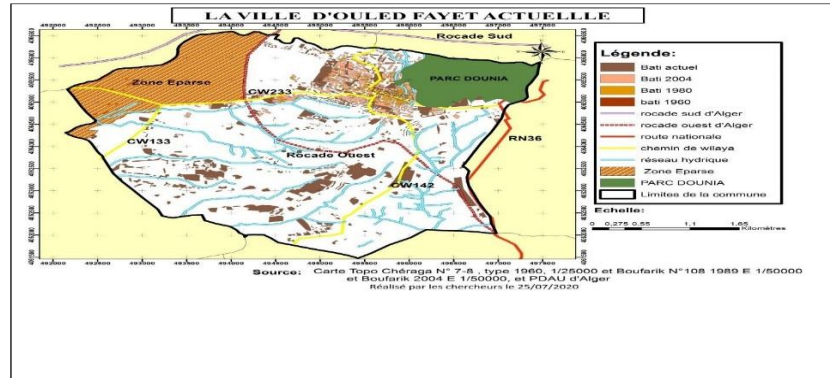
شكل 2. الحدود الإدارية لبلدية أولاد فايث بالنسبة للبلديات المجاورة. [- hindawi.com

[P Aubin - cartonnumerique.blogspot.com

5.2. التاريخ الديموغرافي للبلدية فيما يتعلق بالتطور السكاني الشكل 3 يمثل بلدية أولاد فايث لمختلف



الازمنة



شكل 3. بلدية أولاد فايت في مختلف الأزمنة. [cartonumerique.blogspot.com]

4.2. الدراسة النظرية للطرق الرياضية:

4.2.1. طريقة آدامز -مولتون (Adams-Moulton Method):

يتناول هذا القسم طريقة آدامز -مولتون من الدرجة الثانية كما وردت في المرجع ^(CHELAB) وهي من الشكل:

$$y_{n+1} = y_n + 2 \cdot h \cdot f_n + 2 \cdot h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (1)$$

اين h : تمثل الخطوة

$f(x_{n+1}, y_{n+1})$: تمثل المعادلة المشتقة عند النقطة $n+1$

f_n : تمثل المشتقة عند النقطة n

III. صور الأقمار الصناعية:

استخدام صور الأقمار الصناعية من Landsat و USGS [hindawi.com]

[P. Aubin] [cartonumerique.blogspot.com]

Google Earth Pro وتطبيق المعادلات الرياضية في التحليل الدقيق للنمو العمراني والديمغرافي،

مع الاستعانة بتقنيات الكشف الحديثة عن بُعد :

تم استخدام صور الأقمار الصناعية الواردة من مصادر مثل «Landsat ، و USGS ، و Google

Earth Pro» لدراسة التوسع العمراني والنمو الديمغرافي في المناطق الحضرية. ومن خلال تطبيق

معادلات رياضية متقدمة، تم تحليل البيانات المُجمعة بدقة لتحديد اتجاهات النمو وتوزيع السكان بشكل

موضوعي .

بفضل تقنيات الاستشعار عن بُعد، تم الحصول على معلومات تفصيلية حول التغيرات في استخدام الأراضي والمناطق المشغولة، مما ساهم في توجيه سياسات التخطيط العمراني بما يتماشى مع التوجهات المستقبلية المتوقعة. وقد ساعدت هذه الأدوات على اتخاذ قرارات مستنيرة تهدف إلى تحسين استخدام الفضاء العمراني وتطوير البنية التحتية .

1.3. عتبة آدامز (0.45) Adams threshold:



fig.a. Original image 1



fig.b. Original image 2

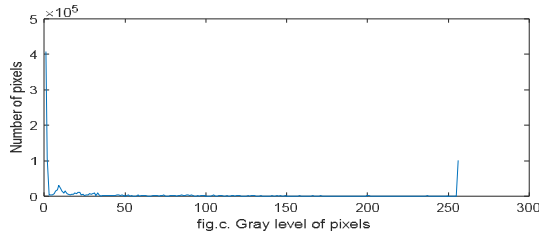


fig.c. Gray level of pixels

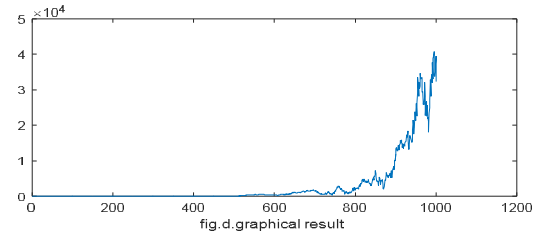


fig.d. graphical result



fig.e. Binary detection of adams

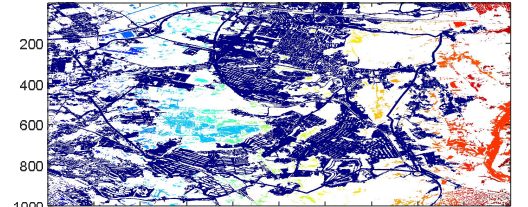


fig.f. Detection in RGB adams

شكل 4. نتائج فحص التغير الزمني لبلدية أولاد فايت باستعمال طريقة ادمز مولتن باستعمال الإشارة الطيفية وعلى الصورة

الثانية من خلال الابض والأسود او بالألوان

2.3. تقريب متعددات الحدود المتعامدة باستخدام طريقة غرام - شميث (method of

Orthogonal with Gram Smith) :

من الناحية الرياضية، تعني التعامدية (orthogonal) التعمد، أي تكوين زاوية قائمة. على سبيل المثال، فإن مجموعة المتجهات (X, y, Z) في الفضاء ثلاثي الأبعاد تعتبر متعامدة .

يمكن تأطير مفهوم التعامدية بشكل رياضي فيما يتعلق بالمتجهات على النحو التالي:

$$x*y=0; x*z=0; y*z=0 \quad (2)$$

أي أن حاصل الضرب النقطي (dot product) لمتجهين متعامدين يساوي صفراً. في الواقع، تعتبر مجموعة المتجهات (x, y, z) مجموعة متعامدة. وإذا كانت (x, y, z) جميعها متجهات وحدة (unit vectors)، فإن المجموعة (x, y, z) تسمى مجموعة متجهات متعامدة وموحدة (orthonormal set of vectors).

المتجهات المتعامدة هي خطياً مستقلة (linearly independent)، ولذلك فإن المجموعة (x, y, z) تمتد لتغطي فضاء ثلاثي الأبعاد $[p. Aubin]$ D space. بالتالي، يمكن تمثيل أي نقطة في الفضاء من حيث مركباتها في الاتجاهات (x, y, z) أو حتى من حيث المركبات في اتجاهات أي ثلاث متجهات متعامدة. بهذه الطريقة، تُشكل المجموعة (x, y, z) أساساً (basis) للفضاء ثلاثي الأبعاد.

3.3. متعددات الحدود المتعامدة: (Orthogonal Polynomials)

مجموعة متعددات الحدود المتعامدة هي متتالية غير منتهية من متعددات الحدود:

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$$

حيث إن $p_n(x)$ هو متعدد حدود من الدرجة (n) ، وأي حدين من مجموعة متعددات الحدود هذه يكونان متعامدين مع بعضهما البعض، أي أن:

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = 0, \text{ for } i \neq j \quad (3)$$

تكون مجموعة متعددات الحدود متعامدة واحادية إذا:

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (4)$$

المجال $[a, b]$ يُسمى مجال التعامد (interval of orthogonality)، وقد يكون غير محدود عند أحد طرفيه أو كليهما.

أي متتالية غير منتهية من كثيرات الحدود $\{p_n\}$ ، بحيث تكون (p_n) من الدرجة (n) ، تُشكل أساساً للفضاء الشعاعي غير المنتهي الأبعاد لجميع كثيرات الحدود. يمكن تحويل مثل هذه المتتالية إلى أساس متعامد باستخدام عملية غرام-شميدت (Gram-Schmidt) أو عملية التعامد، من خلال إسقاط المكونات الخاصة بكل كثير حدود والتي تكون متعامدة على كثيرات الحدود المختارة بالفعل [CHELAB.2020]

4.3. أساس غرام-شميدت: (Gram-Schmidt Basis)

في أي فضاء جداء داخلي (inner product space)، يمكننا اختيار الأساس المناسب للعمل فيه. في كثير من الأحيان، يُسهّل العمل في أساس متعامد بشكل كبير عمليات الحساب.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$:

تمثل أساساً متعامداً لفضاء جداء داخلي (V) ، فإنه من السهل التعبير عن أي متجه $(w \in V)$ كمزيج خطي من المتجهات في (S) :

$$w = \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle w, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle w, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \quad (5)$$

مع إعطاء أساس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ لفضاء منتج داخلي n -بعد V ، تقوم خوارزمية Gram Schmidt ببناء أساس متعامد $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ لـ V :

Step1: $v_1 = u_1$

$$\text{Step2: Let } v_2 = u_2 - \text{proj}_{w_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \quad (6)$$

حيث: w_1 هو الفضاء الممتد بواسطة v_1 ، و $\text{proj}_{w_1} u_2$ هو الإسقاط المتعامد لـ u_2 على w_1 .

Step3: Let $v_3 = u_3 - \text{proj}_{w_2} u_3$

$$u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2, \quad (7)$$

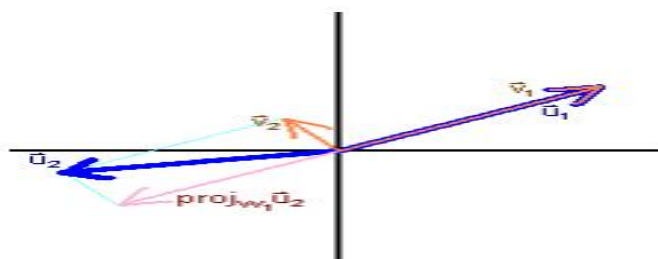
حيث w_2 هي المساحة الممتدة بواسطة v_1 و v_2 .

Step4: Let $v_4 = u_4 - \text{proj}_{w_3} u_4$.

$$u_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3, \quad (8)$$

حيث w_3 هي المساحة الممتدة بواسطة v_1, v_2 و v_3 .

واصل هذه العملية حتى v_n . المجموعة المتعامدة المتعامدة $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ تتكون من n متجهات مترابطة خطياً في V وبالتالي تشكل أساساً متعامداً لـ V . شكل 5



شكل 5. الأساس المتعامد. [CHELAB.2020]

أساس كثيرات الحدود المتعامدة لطريقة جرام-شميت

لتكن (P) و (Q) كثيرتا حدود. نعرّف الجداء القياسي على النحو التالي:

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx \quad (9)$$

حيث :

w ، x هي دالة الوزن (Weight Function) المعرفة على المجال $[a, b]$.

يقال إن متعددي حدود من الدرجة m و n على التوالي هما متعامدتان إذا تحقق الشرط التالي:

$$\langle p_m(x), p_n(x) \rangle = 0 \text{ si } m \neq n \quad (10)$$

يمكننا أن نبيّن أنه توجد سلسلة من كثيرات الحدود $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ من درجة أقل من أو تساوي (k) بحيث:

$$p_n(x) = x^n + p_{n-1}(x) \quad (11)$$

$$\langle p_n, p_m \rangle = 0, \text{ pour } m \leq n - 1$$

تُحقق كثيرات الحدود (p_n) علاقة التكرار إذا:

$$p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}(x), \text{ pour } n \geq 2$$

حيث :

$$p_0(x) = 1$$

$$a_n = \frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|_2^2} \quad (12)$$

$$b_n(x) = \frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-2} \rangle}{\|p_{n-2}\|_2^2} \quad (13)$$

هي عملية (schmidt) لمجموعة متعددة الحدود المتعامدة من الدرجة الأقل أو المساوية لـ (n) :

$$p_0(x) = 1 ; p_1(x) = (x - a_1) ; w(1) = 1 \quad (14)$$

$$p_i(x) = (x - a_i)p_{i-1}(x) - b_i p_{i-2}(x) \quad (15)$$

$$i = 2, 3, \dots, k$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^k a_i A_i(x)$$

$$\overline{p(x)} = \overline{a_0} p_0(x) + \overline{a_1}(x) p_0(x) \dots \dots \dots + \overline{a_k}(x) p_k(x) \quad (16)$$

$$\text{Where: } \tilde{a}_i = \frac{\sum_{r=0}^n w_r f(x_r) p_i(x_r)}{\sum_{r=0}^n w_r p_i^2(x_r)}$$

IV. النتائج

عتبة آدامز: 0.45

من خلال الشكل 6 فيمكن ملاحظة التغير الزمني لبلدية أولاد فايت باستعمال طريقة غرام سميث ، باستعمال التدرج الطيفية وعلى و من خلال اللون الابض والأسود و بالألوان.

p0 =

1

Elapsed time is 5.084555 seconds.

percenth =

100.0000

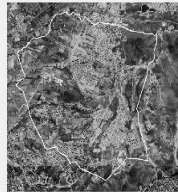
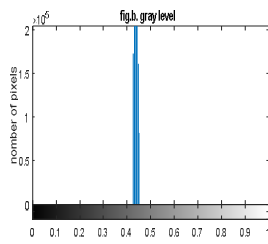


fig.a. image origine1



fig.a. Original image2

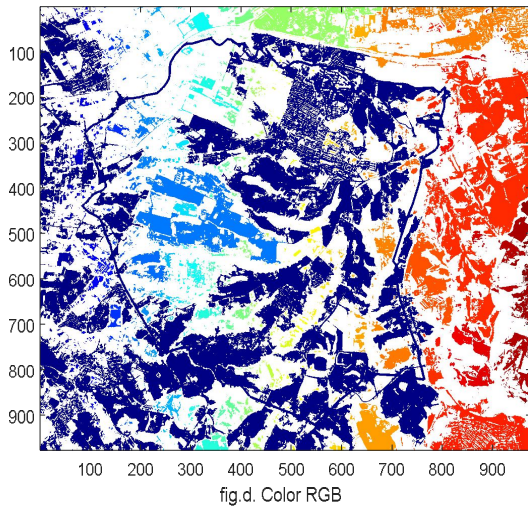
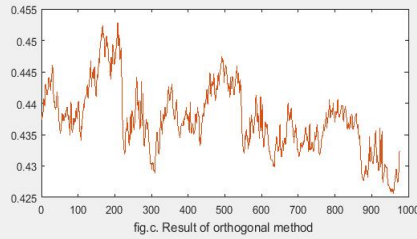


fig.c. orthogonal

الشكل 6. نتائج فحص التغيير الزمني لبلدية أولاد فايت باستعمال طريقة غرام سميث ، باستعمال التدرج الطيفية وعلى و من خلال اللون الابض والأسود و بالألوان

1.4. مقارنة بين طريقة التعامدية وطريقة آدامز في تحليل التطور العمراني :

1. لمحة عن الطريقتين:

- **طريقة التعامدية:** تعتمد هذه الطريقة على تحليل رياضي قائم على مفهوم التعامدية، مما يسمح بفصل التغيرات الهيكلية بدقة وتقليل التشويش (الضوضاء) في البيانات .

- **طريقة آدامز:** تُستخدم هذه الطريقة بشكل أساسي لاستخراج المعلومات من الصور الفضائية، حيث تعتمد على التدرجات الطيفية والتغيرات الزمنية، مما يجعلها أكثر حساسية للتغيرات في الإضاءة والتقلبات الطيفية .

2. تحليل نتائج الطريقتين استناداً إلى المنحنى :

نتائج طريقة التعامدية :

- المنحنى الناتج باستخدام هذه الطريقة أكثر استقراراً، حيث تتراوح القيم بين 0.425 و 0.455، مما يدل على استخراج دقيق للتغيرات الفعلية دون أن يتأثر بشكل كبير بالتشويش بدقة 100%.

- تعكس التقلبات في المنحنى المناطق التي شهدت تطوراً عمرانياً ملحوظاً، وليس مجرد تغييرات في الغطاء النباتي أو الإضاءة .

- توفر هذه الطريقة تمييزاً أفضل بين التحولات الطبوغرافية والتغيرات العمرانية الفعلية .

نتائج طريقة آدامز :

- تُظهر هذه الطريقة حساسية مفرطة للتغيرات الطيفية، مما يجعلها عرضة للتأثر بالتغيرات في الإضاءة والتأثيرات الموسمية، ما قد يؤدي إلى تفسير خاطئ للتغيرات الطبيعية على أنها تطور عمراني .

- يظهر المنحنى الناتج عن هذه الطريقة بشكل أكثر اضطراباً، مما يشير إلى زيادة مستوى التشويش أو التغيرات التي لا ترتبط بالضرورة بالتوسع العمراني .

- في بعض المناطق، قد يتم تضخيم التغيرات الطيفية دون أن تعكس بالضرورة زيادة فعلية في التوسع العمراني .

V. الخلاصة conclusion :

بعد التطبيق الرياضي على الصور خلال مرحلتين زمنيةتين وهما ادم مولتن وطريقة الاعمدة لغرام سميث ، ووفقاً للمنحنى ونتائج الصور المُحللة، اظهرت طريقة التعامدية نتائج أكثر دقة وموثوقية في تحديد التطور العمراني الفعلي بين 2005 و 2025 مقارنةً بطريقة آدامز. وعليه ينصح باستكمال استعمال طريقة الاعمدة وتطبيقها على صور متعددة.

وأخيراً وفي المستقبل ندعو الى مقارنة طريقة جرام سميث مع طرق الشبكية للوصول الى نتائج ادق في وقت مثالي.

References

Sites internet :

Aubin.P.1990. *Fuzzy differential inclusions, Problems of Control and Information Theory*, vol. 19, no. 1, pp. 55–67 .

Aubin.P, 1990.A survey of viability theory, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 28, no. 4, pp. 749–788.

Berkar.A and Laallam.Z.2021. *Diagnosis of impurities on Materials Using Numerical Analysis Methods (chebychev & newton methods)*. Memory. University Alger 1.p. 85.

Colombo.G and Křivan.V.1992. Fuzzy differential inclusions and nonprobabilistic likelihood, *Dynamic Systems and Applications*, vol. 1, no. 4, pp. 419–439.

Colombo.G and Křivan.V.1992. Fuzzy differential inclusions and nonprobabilistic likelihood, *Dynamic Systems and Applications*, vol. 1, no. 4, pp. 419–439.

Francisca Cánovas Orvay, M. T. 2012. *Adams Methods: Implementation As Predictor-Corrector Methods*.

Kloeden.E.P . 1991. Remarks on Peano-like theorems for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 44, no. 1, pp. 161–163.

<https://cartonnumerique.blogspot.com/p/imagerie-satellitaire.html?m=0>. [consulted]

https://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/312328/?utm_source=google&utm_medium=cpc&utm_campaign=HDW_MRKT_GBL_SUB_ADWO_PAI_DYNA_SPEC_X_X0000_June2021&gclid=EAIaIQobChMIrYbel93Y-QIVuIxoCR2XkQ-KEAAYASAAEgKe1PD_BwE. [consulted]

Memories and Thesis :

CHELABI. O, 2020 , *l'interaction entre l'etalement urbain et le reseade transport cas d'etude de la ville d'ouled fayet* . master, université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

RAHMANI a.w ,2017,*le plan d'occupation des sols (p.o.s) entre theorie et pratique cas d'etude : pos (au 13) ouled fayet-alger* , master , universite saad dahled – blida institue d'architecture et d'urbanisme.

Official documents :

APC : Assemblée populaire communal.

DHW : Direction d'habitat de la wilaya d'Alger.

Monographie de la commune d'Ouled Fayet 2011, établie par le service statistique.

ONS : office national des statistiques.

PDAU : Plan directeur d'aménagement et d'urbanisme d'Alger 2016.

POS : Plan d'occupation du sol U113 Ouled Fayet 2010.

RGPH : Recensement général de la population et de l'habitat 2008.