

حول وجود حلول لمسألة حدية كسرية حدية متعلقة بالمشتق الكسري بمفهوم كابيتو باستخدام طريقة التغير

On the existence solution for fractional boundary value problem with Caputo derivative using variational method

أمينة بوسنة¹

¹المدرسة العليا للأساتذة، قسم الرياضيات - القبة - (الجزائر)، amina.boucenna@g.ens-kouba.dz

تاريخ النشر: ديسمبر/2024

تاريخ القبول: 2024/12/23

تاريخ الإرسال: 2024/12/17

ملخص:

يهدف هذا العمل إلى دراسة وجود حلول لمسألة حدية و التي تظم مشتقا كسريا من نوع -كابيتو- حيث الطرف الثاني لهذه المعادلة التفاضلية الكسرية غير خطي، مع هذا الأخير فهو مرفق بشروط ابتدائية ملائمة و التي تستخدم فيها طريقة التغير لضمان وجد الحل على الأقل في فضاء انعكاسيا، قابلا للفصل و بناخيا.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية كسرية، طريقة التغير، المشتق الكسري لكابيتو، الوجود، شروط متجانسة.

Abstract:

The goal of this work is to study the existence of solution to a boundary value problem depends a Caputo fractional derivative, with the second term for this fractional differential equation is non linear, and associated with a suitable condition. Using a variational method , which guarentees a solution of our problem in a reflexive, separable and Banach space.

Key words: Fractional differential equation, Existence, variational method, Caputo's derivative, Existence, homogenous conditions.

مدخل: Introduction

تعد طريقة التغير من الطرق القوية و المهمة في التحليل غير خطي، و من السبل الناجحة في نظرية النقطة الحرجة. إن لمبدأ التغير تطبيقات مهمة في عدة مجالات، فعلى سبيل المثال: الحساب التفاضلي العام، و يعد من الوسائل القوية في التحليل التطبيقي و تكنولوجيا التقريبات و الفيزياء لصفة عامة.

ف نجد العديد من الأعمال و المقالات التي نشرت لوجود حلول لمعادلات تفاضلية ذات مشتقات كسرية متنوعة و هذا باستخدام طريقة النقطة الصامدة. في حين فإن الأعمال أو الجرائد العلمية التي إستخدمت طريقة التباير وهذا من خلال النقطة الحرجة، فهي قليلة مقارنة بالطريقة السابقة، لوجود حلول لمسائل حدية متعلقة و مرفقة بمشتقات غير طبيعية، أي كسرية، فهو ليس بالسهل دراسة مشكل التصغير و هذا لإيجاد حد أدنى لمسألة حدية كسرية في فضاء بناخي X ، أي:

$$\exists u_0 \in X: f'(u_0) = \inf_{u \in X} f(u).$$

و هذا كون التابع f قابلاً للمفاضلة و حده الأدنى هو u_0 من الفضاء X ، فينتج إنعدام المشتق للتابع f و التي تسمى عندئذ النقطة $u_0 \in X$ ، بالنقطة الحرجة و نجد أن:

$$\exists u_0 \in X: f'(u_0) = 0.$$

- سنقوم في هذا العمل بدراسة حلول للمسألة الحدية الكسرية التالية:

$$\begin{cases} D_b^\gamma - D_a^\gamma v(t) = \lambda_1 g(t, v(t)) + \lambda_2 \cdot h(t, v(t)), \\ v(b) = v(a) = 0, t \in [a, b], 0 \leq a < b < +\infty, 0 < \gamma < 1 \end{cases}$$

حيث $D_b^\gamma -$ ، D_a^γ المشتقين الكسرين على التوالي من اليمين و اليسار من نوع كابيتو.

- إن التابعين g و h في المسألة الحدية الكسرية السابقة هما مستمرين على $IR[a, b] \times IR$.

تمهيدات

سننتظر في هذه الفقرة، إلى أهم المفاهيم المعتمدة لحل المسألة الكسرية الحدية و المتعلقة بأحد أنواع المشتقات الكسرية و التي تعد الأقرب نوع إلى المشتق الاعتيادي، ألا وهو الطبيعي.

- سنقوم في هذا الجزء بتقديم ما يلي: التكامل الكسري لريمان- لوفيل، المشتق الكسري لكابيتو، مبدأ التباير و بالتحديد مبدأ التصغير لتابع: أنظر المراجع التالية ^(1,2,3,4,5,6,7,8).

تعريف 1: (التابع غاما) (Gamma).

نعرف التابع غاما وفق التكامل التالي:

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} z^{\gamma-1} e^{-z} dz, \gamma > 0, z \in IR.$$

تعريف 2: (التكامل الكسري لريمان-ليوفيل)

ليكن التابع v المعرفة على المجال $[a, b]$ نحو IR مستمرة (أو كمولا). يعطى التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل للتابع v من الرتبة الكسرية $\gamma > 0$ من اليسار و اليمين على التوالي وفق مايلي:

$$1) I_{a+}^{\gamma} v(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t (t-s)^{\gamma-1} v(s) ds, t > a,$$

و

$$2) I_{b-}^{\gamma} v(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^b (t-s)^{\gamma-1} v(s) ds, t < b.$$

تعريف 3: (المشتق الكسري لكابيتو)

ليكن التابع v المستمر المجال $[a, b]$ من IR نحو IR و قابل للاشتقاق ودالته المشتقة مستمرة

أي $f \in C^1([a, b], IR)$. يعرف المشتق الكسري لكابيتو من الرتبة γ مع

$n-1 < \gamma < n$ وهدا بدلالة التكامل الكسري لريمان ليوفيل، وفق التكاملات التالية:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\gamma} v(t) &= I_{a+}^{n-\gamma} D^n v(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_a^t (t-s)^{n-\gamma-1} v^{(n)}(s) ds, t > a, \\ D_{b-}^{\gamma} v(t) &= (-1)^n I_{b-}^{n-\gamma} D^n v(s) \text{ و} \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\gamma)} \int_t^b (s-t)^{n-\gamma-1} v^{(n)}(s) ds, t < b, \end{aligned}$$

مع $n = [\gamma] + 1$.

الآن سنقوم بعرض أهم النتائج الأساسية للمفاهيم السابقة المذكورة.

خواص:

(1) إن كل من التكامل الكسري لريمان ليوفيلو المشتق الكسري لكابيتو هي دوال خطية.

(2) في حالة $n = \gamma$ ، فإنه من أجل المتغير t من المجال $[a, b]$:

$$D_{a+}^{\gamma} v(t) = v^{(n)}(t) \text{ و } D_{b-}^{\gamma} v(t) = (-1)^n v^{(n)}(t)$$

(3) من أجل التابع v قابلاً للاشتقاق باستمرار t من المجال $[a, b]$ فالدينا:

$$*) D_{a+}^{\gamma} I_{a+}^{\gamma} v(t) = v(t)$$

$$*) D_{b-}^{\gamma} I_{b-}^{\gamma} v(t) = v(t)$$

$$*) I_{b-}^{n-\gamma} D_{b-}^{\gamma} v(t) = v(t) + \sum_{j=1}^n c_j (b-t)^j, t < b$$

$$*) I_{a+}^{\gamma} D_{a+}^{\gamma} v(t) = v(t) + \sum_{j=1}^n d_j (t-a)^j, t > a,$$

مع c_j و d_j ثوابت حقيقية، $n = [\gamma] + 1$

تعريف 4:

ليكن التابع v من الصنف C^1 على $[a, b]$ نحو IR لدينا:

$$1) D_{a+}^{\gamma} v(t) = d_{a+}^{\gamma} v(t) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j (t-a)^{j-a}, t > a,$$

$$2) D_{b-}^{\gamma} v(t) = d_{b-}^{\gamma} v(t) - \sum_{j=0}^{n-1} k_j (b-t)^{j-a}, t < b.$$

حيث $d_{a+}^{\gamma} v$ ، $d_{b-}^{\gamma} v$ هما المشتقين الكسرين على التوالي من اليسار و اليمين للتابع v من نوع

ريمان-ليوفيل¹

تعريف 5: (شرط بالي-سمائل $(PS)_C$)^{4, 5, 6}

ليكن X فضاء نباحيا، و ليكن التابعي $\emptyset$ من الصنف $C^1(X, IR)$.

نقول أن التابع $\emptyset$ يحقق اشرط بالي-سمائل عند مستوى C ، و الذي نختصره $(PS)_C$ ، إذا كان

من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ من X والتي تحقق:

$$|\varphi(x_n)| \leq C \text{ و } \varphi'(v_n) \rightarrow 0 \text{ في } X^*$$

لها متتالية مستخرجة متقاربة.

تعريف 6: (النقطة الحرجة) ^{7,4}

ليكن X فضاء بناخيا، وليكن V مجموعة مفتوحة جزئية من X . لنفرض أن التابع $\emptyset$ قابلا للمفاضلة على المفتوح V نحو IR . نسمي النقطة الحرجة للتابعي $\emptyset$ ، و لتكن u_* من V و التي تحقق:

$$\emptyset'(u_*) = 0$$

نظرية: ^{7,4}

ليكن X فضاء بناخيا، و ليكن التابعي $\emptyset: X \rightarrow IR$ من الصنف $C^1(X, IR)$ (قابلا للمفاضلة بإستمرار) ومحدود من الأدنى ويحقق شرط بالي -سمایل $(PS)_c$. إذن الحد الأدنى ل $\emptyset$ مدرك عند $u_0 \in X$ و u_0 هي نقطة حرجة ل $\emptyset$ أي:

$$\begin{aligned} 1) \emptyset(u_0) &= \inf_{t \in X} \emptyset(t) \\ 2) \emptyset'(u_0) &= 0. \end{aligned}$$

البناء التبايري: ^{5,6,4}

في هذا الجزء سنقدم الدعائم الأساسية للمسألة الحدية الكسرية، والتي تسمح لنا بإيجاد الحل لهذه الأخيرة عن طريق نظرية النقطة الحرجة.

تعريف ^{5,6,4}

نعرف الفضاء التابعي لسوبولاف من النوع الكسري (المتعلق بالمشق الكسري لكابيتو) بالفضاء T_0^γ مع $0 < \gamma < 1$ ، بالملاصقة (المجموعة المغلقة) للفضاء التابعي $C^\infty([a, b], IR)$ بالمجموعة الموالية:

$$T_0^\gamma = \{v \in L^2([a, b]), D_{0+}^\gamma v(t) \in L^2([a, b]) \text{ و } v(a) = v(b) = 0\},$$

و المزود بالنظيم الموالي (وفق متراجحة بوانكاري من النوع الكسري):

$$= (\int_a^b |D_{0+}^\gamma v(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \cdot \|v\|_\gamma = \|D_{0+}^\gamma v\|_{L^2(a, b)}$$

نتيجة: 5.6

إن الفضاء T_0^γ هو إنعكاسي، قابلا للفصل و بناخيا و هيلبرتيا.

ملاحظة:

يعرف الجداء السلمي و المرفق للنظيم السابق وفق العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{T_0^\gamma}: T_0^\gamma \times T_0^\gamma &\rightarrow IR \\ (u_1, u_2) &\rightarrow (u_1, u_2)_{T_0^\gamma} = (D_{0+}^\gamma u_1, D_{0+}^\gamma u_2) \\ &= \int_a^b D_{0+}^\gamma u_1(t), D_{0+}^\gamma u_2(t). \end{aligned}$$

مبرهنة: 5.6, 4

إذا كان: v_1 و v_2 على التوالي من الفضاءين التابعين T_0^γ و $C^\infty([a, b], IR)$ ، فإنه ينتج أن:

$$\int_a^b D_{0+}^\gamma v_1(t).v_2(t)dt = \int_a^b v_1(t).D_{T-}^\gamma v_2(t)dt.$$

نقدم الآن بإعطاء مفهوم الحل الضعيف للمسألة الحدية الكسرية لهذا العمل.

تعريف:

إن الحل الضعيف للمسألة الحدية ذات مشتق كسري وفق العلاقة التكاملية التالية:

$$\int_a^b [D_{a+}^\gamma v_1(t).D_{a+}^\gamma u(t) - \lambda_1 g(t, v(t).u(t) - \lambda_2 h(t, v(t).u(t))]dt = 0,$$

وهذا من أجل كل من u و v من الفضاء T_0^γ .

توطئة: 5

لدينا من T_a^γ $v \in$ أجل و من أجل $\frac{1}{2} < \alpha < 0$ ، لدينا المتباينات التالية:

$$1) \|u\|_{L^2} \leq A \|u\|_\gamma, A = \frac{b^\gamma}{\Gamma(\gamma + 1)}$$

$$2) \|u\|_\infty \leq B \|u\|_\gamma, B = \frac{b^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\gamma)[(\gamma-1).2+1]}$$

توطئة: 5

إن الفضاء T_0^γ يحقق الإنغماس المستمر و المتراص مع الفضاء $C^\infty([a, b], IR)$ ، أي

$$T_0^\gamma \rightarrow C^\infty([a, b], IR)$$

النتيجة الأساسية:

نظرية أساسية:

نفرض أن الشروط التالية محققة:

الشرط 1:

$$\exists \varphi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \exists R_1 > 0 ; 0 < G(t, x) \leq \varphi_1 x g(t, x)$$

من أجل x من IR مع $|x| \geq R_1$ و $t \in (a, b)$

الشرط 2:

$$\exists \varphi_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \exists R_2 > 0 ; 0 < H(t, x) \leq \varphi_2 x h(t, x)$$

من أجل x من IR مع $|x| \geq R_2$ و $t \in (a, b)$

الشرط 3:

$$\exists a_1, b_1, a_2, b_2 \in L^1(a, b), \exists o_1, o_2 \in (0, 2):$$

$$\begin{cases} G(t, y) \leq a_1(t)|y|^{o_1} + b_1(t) \\ H(t, x) \leq a_2(t)|x|^{o_2} + b_2(t) \end{cases}$$

$$1) \frac{1}{2} - \lambda_1 a_1^* B^{o_1} - \lambda_2 a_2^* B^{o_2} > 0 \quad \text{مع}$$

$$2) \frac{1}{2} - \lambda_2 a_2^* B^{o_2} > 0$$

$$3) \frac{1}{2} - \lambda_1 a_1^* B^{o_2} > 0$$

$$a_1^* = \|a\|_{L^1}, \quad a_2^* = \|a_2\|_{L^1}, \quad b_1^* = \|b_1\|_{L^1}, \quad b_2^* = \|b\|_{L^1} \quad \text{و}$$

عندئذ المسألة الحدية الكسرية من نوع كابيتو لعملنا هذا تقبل على الأقل حلا ضعيفا، أي الحل من

الفضاء T_0^∞ و نكتب:

$$\exists u_0 \in T_0^\infty : \emptyset'(u_0) = 0.$$

البرهان:

إن البرهان للنتيجة الأساسية لهذا المقال يعتمد على مبدأ التباير و عليه نقسم البرهان إلى

الخطوات التالية:

- لنعرف التابعي $\emptyset: T_0^\infty \rightarrow IR$ و التي تعطى عبارته وفق ما يلي:

$$\emptyset(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{T_0^\infty}^2 - \lambda_1 \int_a^b G(t, v(t)) dt - \lambda_2 \int_a^b H(t, v(t)) dt,$$

مع G و H الدوال الأصلية للدوال f و g على التوالي، أي:

$$G(t, v) = \int_a^v g(t, s) ds, \quad H(t, s) = \int_a^v h(t, z) dz.$$

- إن التابعي $\emptyset$ قابل للمفاضلة و تفاضلية تعطى ب:

$$\begin{aligned} \emptyset'(v)(u) &= (\emptyset'(v), u) = \\ &= \int_a^b D_{0+}^\gamma v(t) \cdot D_{0+}^\gamma u(t) dt - \lambda_1 \int_a^b g(t, v(t)) \cdot u(t) dt - \lambda_2 \int_a^b h(t, v(t)) \cdot u(t) dt \end{aligned}$$

ملاحظة:

من خلال عبارة المفاضلة ل $\emptyset$ ، يتضح أن النقطة الحرجة للتابعي $\emptyset$ هي الحل الضعيف للمسألة الحدية الكسرية المدروسة في هذا المقال.

الخطوة 1: إثبات أن $\emptyset$ يحقق شرط $(PS)_C$:

سننتج هنا نفس خطوات و طريقة البرهان في المقال⁵.

- لتكن $(x_n)_n$ متتالية T_0^γ والتي تحقق:

$$\emptyset'(x_n) \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad \emptyset(x_n) \rightarrow c,$$

و باستخدام الشرطين (1) و (2) للنتيجة الأساسية، ينتج أن المتتالية (x_n) محدودة، أي:

$$\begin{aligned} C \geq \emptyset(x_n) &\geq \frac{1}{2} \|x_n\|_\gamma^2 - \lambda_1 \varphi_1 \int_a^b g(t, x_n), x_n(t) dt - \lambda_2 \varphi_2 \int_a^b h(t, x_n) x_n dt \\ &\quad - c_1 \cdot b - c_2 \cdot b \\ &\geq \frac{1}{2} \|x_n\|_\gamma^2 - \lambda_1 \varphi_1 [\|x_n\|_\gamma^2 - \langle \emptyset'(x_n), x_n \rangle] \\ &\quad - \lambda_2 \varphi_2 [\|x_n\|_\gamma^2 - \langle \emptyset'(x_n), x_n \rangle] - (c_1 + c_2) \cdot b \\ C &\geq \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2 \right) \|x_n\|_\gamma^2 - (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \|\emptyset'(x_n)\| (T_a^\gamma)^* \cdot \|x_n\|_\gamma \\ &\quad - (c_1 + c_2) \cdot b \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2 \right) \|x_n\|_\gamma^2 - (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \|x_n\|_\gamma - (c_1 + c_2) \cdot b, \end{aligned}$$

و هذا كون توجد رتبة n_0 من IR ، بحيث $\|\phi'(x_n)\|(T^\infty)^* \leq 1$.

- و من جهة كون الفضاء T_0^∞ إنعكاسي، فإنه توجد متتالية متقاربة بضعف فيه و لدينا من جهة أخرى حسب نظرية الإنغماس المتراص بين الفضاءين T_0^∞ و $C([a, b], IR)$ ، فتصبح المتتالية $(x_n)_n$ متقاربة بقوة، أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$.
- وباستخدام التقارب بالهيمنة على التابعين المستمرين g و h ينتج أن: x_n متقاربة نحو x في الفضاء T_0^∞ .

الخطوة 2: إثبات أن ϕ محدود من الأدنى:

من خلال الشرط (3) للنظرية الأساسية لهذا العمل، و من خلال عبارة التابعي ϕ ، لدينا:

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \frac{1}{2} \|v\|_\infty^2 - \lambda_1 \int_a^b G(t, v(t)) dt - \lambda_2 \int_a^b H(t, v(t)) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_\infty^2 - \lambda_1 \int_a^b [a_1(t) \cdot |v(t)|^{o_1} + b_1(t)] dt \\ &\quad - \lambda_2 \int_a^b [a_2(t) \cdot |v(t)|^{o_2} + b_2(t)] dt \\ \phi(v) &= \frac{1}{2} \|v\|_\infty^2 - \lambda_1 a_1^* \|v\|_\infty^{o_1} - \lambda_1 b_1^* - \lambda_2 a_2^* \|v\|_\infty^{o_2} - \lambda_2 b_2^* \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_\infty^2 - \lambda_1 a_1^* B^{o_1} \|v\|_\infty^{o_1} - \lambda_1 b_1^* - \lambda_2 a_2^* B^{o_2} \|v\|_\infty^{o_2} - \lambda_2 b_2^*\end{aligned}$$

- نميز الحالات التالية:

الحالة 1: لما $o_1 = o_2 = 2$ ، فتصبح

$$\phi(v) = \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 a_1^* B^{o_1} - \lambda_2 a_2^* B^{o_2} \right) \|v\|_\infty^2 - \lambda_1 b_1^* - \lambda_2 b_2^*$$

حيث هذا المقدار الأخير يؤول إلى $(\infty +)$ لما $\|v\|_\infty \rightarrow (\infty +)$ و عليه التابعي ناقصي و هذا ما يؤول إلى أنه محدود من الأدنى.

الحالة 2: لما $0 < o_1 < o_2 < 2$ ، فينتج أن:

$$\phi(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_\infty^2 - \lambda_1 a_1^* B^{o_1} \|v\|_\infty^{o_1} - \lambda_2 a_2^* B^{o_2} \|v\|_\infty^{o_2} - \lambda_1 b_1^* - \lambda_2 b_2^*$$

فنجذ أن: $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \phi(v) = +\infty$ و بالتالي فهو ناقصي و عليه فهو محدود من الأدنى.

الحالة 3: لما $0 < o_1 < o_2 < 2$ فنجد أن:

$$\phi(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \lambda_2 a_2^* B^{o_2}\right) \|v\|_x^2 - \lambda_1 a_1^* B^{o_1} \|v\|_x^{o_1} - \lambda_1 b_1^* - \lambda_2 b_2^*$$

حيث العبارة هذه تقول إلى $(+\infty)$ لما $\|v\|_x$ يقترب من $(+\infty)$.

* ملاحظة:

فيما يخص الحالتين لما $0 < o_1 < o_2 < 2$ و $o_1 = o_2 = 2$ فتعالج بنفس الحالتين (2) و (3) السابقتين.

خلاصة: Conclusion

حسب نظرية النقطة الحرجة فإن التابعي ϕ يقبل حد أدنى و الذي بدوره هو نقطة حرجة (كون التفاضلية ϕ' مستمرة و التابعين g و f مستمرين) و عليه فالنقطة الحرجة هي حل للمسألة الكسرية الحدية من نوع كابيتو.

المراجع: Références

1. A.A. Kilbas (2006): H.M. SRIVASTAVA and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier science, Amsterdam.
2. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marchichev (1993): Fractional Integral and Derivatives: theory and applications, Gordon and Break.
3. Podlubny (1999) Fractional differential equations, Academic Press, San Diego.
4. Y. Jabri. The Mountain Press theorem Variants, Generalization and same Applications. Cambridge University Press, New York, 2003.
5. F. Jiao, Y. Zhou -2011): Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory, Computers and mathematics with applications, (62), 1199-1181.
6. A. Boucenna ,T. Moussaoui, (2015), Existence results for a fractional boundary value Problem via critical point theory, 54,1,47-64.
7. M. Badiale, E. Serra (2011): Semilinear elliptic equations for beginners, Springer-Verlag, New York.
8. K. Diethlem, (2010), the analysis of fractional differential equations, Springer, New York.