دراسة حلول لمسألة حدية كسرية من النوع كيرشوف بإستخدام نظرية ممر الجبل من النوع سيرامي.

Study Of Solutions To A Kirchhoff Type Fractional Boundary Value Problem Using Cerami Mountain Pass.

أمينة بوسنة[1]، عيادي سعاد [2]

[1] المدرسة العليا للأساتذة، قسم الرياضيات، مخبر النقطة الصامدة و تطبيقاتها ، القبة، (الجزائر)،
amina.boucenna@g.ens-kouba.dz
[2] كلية العلوم و التكنولوجيا، قسم علوم المادة، مخبر الصوتيات و الهندسة المدنية، جامعة الجيلالي بونعامة (الجزائر)،
souad.ayadi@univ-dbkm.dz

تاريخ الإرسال: 2024/01/15 **تاريخ النشر: جوان 2024**

Abstract:

The aim of this paper is to study the existence of solutions to a boundary value problem associated with a fractional non linear differential equation for a Kirchhoff type, Where the boundary conditions is homogeneous and the second term is continuous. This problem depends of Riemann-Liouville fractional derivatives, and we prove the existence of nontrivial solutions for this problem using a Cerami Mountain Pass theorem.

Key words: Boundary value problem for a Kirchhoff type, Fractional differential equation, Existence, Cerami Mountain Pass theorem.

ملخص:

إن الهدف من هذا المقال، هو دراسة إيجاد حلول لمسألة حدية مرفقة بمعادلة تفاضلية كسرية غير خطية من النوع كيرشوف، حيث الشروط الابتدائية متجانسة والطرف الثاني مستمر. إن هذه المسألة متعلقة بالمشتق الكسري بمفهوم ريمان –ليوفيل، ونبرهن وجود الحل غير التافه لهذه المألة وهذا باستخدام نظرية ممر الجبل من نوع السيرامي.

الكلمات المفتاحية: مسألة حدية من نوع كيرشوف، الوجود، معادلة تفاضلية كسرية، نظرية ممر الجبل من نوع سيرامي.

المدخل:

يعتبر الحساب الكسري أحد مجالات التحليل الرياضي و الذي يتطرق فيه إلى حساب التكامل برتب غير صحيحة في $\mathbb{R}$.

يعد هذا المجال قديما، حيث ولد منذ حوالي 300 سنة و بالضبط في عام 1695 و هذا من خلال الرسالة التي مر كيز دو لو بيتال بعثها (Marquis de L'Hopital) إلى غوتفريدويلهوملايبنبز

(GottriedWilhemLeibneiz) سائلا إياه عن ملاحظة تخص بحثه بحساب المشتق من الرتبة "n" للدالة f و المعرفة ب: $f(x) = x$، حيث كان السؤال: ما هي نتيجة الإشتقاق إذا كان $n = \frac{1}{2}$؟

فهذه الجملة ثم ميلاد التحليل الكسري، حيث نال هذا الأخير اهتمام العديد من الباحثين في العقود الأخيرة، فمن خلال المقالات والملتقيات العلمية للحساب الكسري (المشتق الكسري) يتضح أهميته في الجانب النظري وكذا التطبيق في عدة ميادين، المعادلات التفاضلية والفيزياء والكهرباء والبيولوجيا والدارات الكهربائية ونظرية الإحصاء والاحتمالات وغيرها من الظواهر التي فسرها المشتق الكسري.

لنعتبر المسألة الحدية الكسرية الموالية من النوع كيرشوف:

$$\begin{cases} (a + b\|u\|_a^2 D_{T-}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), & t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

مع $a, b > 0$ و $0 < \alpha \leq 1$ و التابع $f: [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مستمر و D_{0+}^{α}، D_{T-}^{α} هي المشتقات الكسرية على التوالي من اليمين و اليسار بمفهوم ريمان –ليوفيل و الطرف الثاني غير الخطي للمعادلة التفاضلية الكسرية يحقق الشروط التالية:

(A_1) توجد الثوابت $M > 0$، $u > 4$ بحيث:

$$|u| \geq M \to 0 < \mu F(t,u) \leq uf(t,u),$$

(A_2) $\lim_{u \to 0} \frac{f(t,u)}{au} = p(t)$ بإنتظام بالنسبة ل: $t \in [0,T]$ مع $p \in C([0,T], \mathbb{R})$ بحيث:

$$\|p\|_{\infty} < \frac{T^2(\alpha+1)}{T^2\alpha}, \alpha > \frac{1}{2}.$$

من خلال هذه الشروط السابقة و باستخدام نظرية ممر الجبل من النوع سيرامي، نضمن وجود النقطة الحرجة التي بدورها هي حل للمعادلة الكسرية (1.1) من النوع كيرشوف.

نجد في الأونة الأخيرة العديد من المقالات حول إيجاد ووحدانية الحلول للمعادلات التفاضلية الكسرية وهذا باستخدام نظرية النقطة الصامدة، النقطة الحرجة، وكذا طريقة التغاير.

ففي المقال (8)، درس كل من دنق (L. Ding)، لين (L. Lin)، و زونق (J.L.Zhang)، المعادلة غير المتجانسة من النوع كيرشوف التالية:

$$\begin{cases}(a+b\int \mathbb{R}^3|\nabla u|^2dt)\Delta u(t)+u(t)=K(t)f(u)+h(t), & t\in\mathbb{R}^3\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3), u>0,\end{cases} \quad (2)$$

مع التابع f خطيا، و تحت شروط معينة للتوابع f,g,h و بإستخدام المبدأ التغليري لإكلاند (EKeland'sVariational Principale) و نظرية ممر الجبل لإثبات وجود الحلول للمسألة الحدية (1.2) في أن حين كلا من وو (X.Wu)، و شانق (B.Cheng) في المقال (9) برهنوا وجود الحلول الموجبة و هذا من خلال إستخدام نظرية ممر الجبل المرفقة بشرط بالي- سمايل من النوع سيرامي (PS)، أما بالنسبة للمعادلة التفاضلية غير الخطية من النوع كيرشوف التالية:

$$\begin{cases}(a+b\int \Omega|\nabla u|^2dt)\Delta u(t)+u(t)=f(t,u), & in\Omega,\\ u\in H^1(\mathbb{R})^3, u>0, on\ \partial\Omega,\end{cases} \quad (3)$$

مع شروط ملائمة للتابع fو هذا بدراسة سلوك التابع f عند الصفر و اللانهائية.

في المقال (10)، درس المؤلفون المسألة الحدية الكسرية التالية:

$$\begin{cases}M(u(t))\left(D_{T-}^{\alpha}\Phi_p\left(D_{0+}^{\alpha}u(t)\right)+V(t)\Phi_p(u(t))\right)=f(t,u(t))+\lambda g(t)|u(t)|^{q-2}u(t),\\ t\in(0,T)\\ u(0)=u(T)=0\end{cases} \quad (4)$$

حيث: λ وسيط موجب، $p,q>1,\frac{1}{p}<\alpha\leq 1$و التوابع: V و g مستمرة على المجال $[0,T]$ و التابع $f\in C^1([0,T],\mathbb{R},\mathbb{R})$ و التابع $M(u(t))$ و معرف كما يلي:

$$M(u(t))=(a+b\int_0^T|0D_t^{\alpha}u(t)|^p\ dt\ )^{p-1},\ \ \alpha\geq 1.$$

في حين، كلا من شان و ليو في المقال (11)، فقد قاموا بدراسة وجود الحلول لمسألة دير كلي الكسرية من النوع كيرشوف مع $-p$ لا بلاس وفق العبارة التالية:

$$\begin{cases}(a+b\ \int_0^T|D_{0+}^{\alpha}u(t)|^pdt)^{p-1}\ D_T^{\alpha}\phi_{p\times}\left(D_{0+}^{\alpha}u(t)\right)=f((t),u(t)), & t\in(0,T)\\ u(0)=u(t)=0, & (5)\end{cases}$$

حيث $a,b>0,p>1$ ثوابت و التابع، $D_{0+}^{\alpha}f\in C^1([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ و D_{T-}^{α} المشتقات الكسرية من اليسار و من اليمين من نوع ريمان –ليوفيل على التوالي من الرتبة $\alpha\in(1/p,1]$ ،و التابع $\phi_p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و هو $-p$ لا بلاس و المعرف وفق العبارة التالية:

$$\phi_p(s)=|s|^{p-2},s\quad(s\neq 0),\ \ \phi_p(0)=0.$$

1. تمهيدات:

في هذه الفقرة، سنقدم مفهومي التكامل والمشتق الكسري بمفهوم ريمان –ليوفيل لتابع حقيقي f، بالإضافة لإعطاء نظرية ممر الجبل المرتبطة بشرط بالي- سمايل من النوع سيرامي.

1.1 تعريف (التكامل الكسري لريمان-ليوفيل) ([1], [2], [3])

نعرف التكامل من الرتبة الكسرية $\alpha > 0$ بمفهوم ريمان ليوفيل من اليسار و من اليمين على التوالي بالعلاقة التالية:

$$I_{a+}^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds, \quad t > a,$$

و

$$I_{b-}^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}u(s)ds, \quad t < b,$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هو التابع غاما(Gamma).

1.2 تعريف (المشتق الكسري لريمان –ليوفيل) ([1], [2], [3])

نعرف المشتق من الرتبة الكسرية $\alpha > 1$ بمفهوم ريمان.ليوفيل من اليسار و من اليمين على التوالي للتابع u التكامل المعطى كما يلي:

$$D_{a+}^{\alpha}u(t) = \frac{d^n}{dt^n}I_{a+}^{n-\alpha}u(t)$$

$$= \frac{1}{T(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds, \qquad t > a,$$

و

$$D_{b-}^{\alpha}u(t) = (-1)^n\frac{d^n}{dt^n}I_{b-}^{n-\alpha}u(t)$$

$$= \frac{(-1)^n}{T(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}u(s)ds, \quad t < b,$$

حيث: $n = [\alpha] + 1$.

ملاحظة:

من أجل $\alpha = n$ينتج أنه من أجل $t \in [a, b]$

$D_{b-}^{\alpha}u(t) = (-1)^n D^n u(t)$ و $D_{a+}^{\alpha}u(t) = D^n u(t)$.

1.3 تعريف (القيمة الحرجة): ليكن X فضاء بناخي و $U \subseteq X$ مجموعة مفتوحة و لنفرض أن $\psi : U \to \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة. النقطة الحرجة للتابعي ψ هي كل نقطة $u \in U$ حيث:

$$\psi'(u) = 0$$

إذا كان $\psi'(u) = 0$ و $\psi(u) = c$، إذن فنقول أن u هي نقطة حرجة للتابعي ψ من المستوى c . إذا كان، من أجل بعض قيم $c \in \mathbb{R}$ المجموعة $\psi^{-1}(c) \subset U$ تحوي على الأقل نقطة حرجة، فنقول أن c هي قيمة حرجة للتابعي ψ.

1.4 تعريف (شرط بالي سمايل من نوع سيرامي) [5]

ليكن X فضاء بناخي، و ليكن التابع الدالي $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ نقول أن التابع ψ يحقق شرط بالي سمالي من النوع سيرامي عند مستوى $c \in \mathbb{R}$ (للإختصار $((PS)_c)$)، إذا كان من أجل كل متتالية $(u_n) \subset X$ بحيث $\psi(u_n) \to c$ و $(1 + \|u_n\|x)\psi'(u_n) \to 0$ فإنها تحتوي على متتالية جزئية متقاربة (u_{n_k}).

1.4 نظرية (ممر الجبل من نوع سيرامي) [6]،[7]

ليكن X فضاء بناخي و ليكن $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ تحقق شرط $((PS)_c)$ نفرض أن:

(i) $\psi(0) = 0$

(ii) يوجد $\rho > 0$ و $\sigma > 0$ حيث $\psi(z) \geq \sigma$ من أجل كل $z \in X$ مع $\|z\|x = \rho$،

(iii) يوجد $z_1 \in X$ حيث $\|z_1\|x > \rho$ بحيث $\psi(z_1) \leq \sigma$

عندئذ ψ يقبل قيمة حرجة $c \geq \sigma$ بالإضافة c أن يمكن أن يحدد من الشكل التالي:

$$c = \inf_{ge \wedge z \in g([0,1])} \max \psi(z),$$

حيث $\wedge = \{g \in C([0,1], X): g(0) = 0, g(1) = z_1\}$.

2- البناء التغايري:

2.1 تعريف [4]

نعرف الفضاء ذي الشكل المشق الكسري E_0^α مع $0 < \alpha \leq 1$، بملاصقة الفضاء $C_0^\infty([0,T], \mathbb{R})$ و المزود بالنظيم

$$(1)\ \|u\|_\alpha = \|D_{0+}^\alpha u\|_{L^2} = \left(\int_0^T |D_{0+}^\alpha u(t)^2| dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

حيث، $E_0^\alpha = \{u \in L^2([0,T] \quad and \quad D_{0+}^\alpha u \in L^2([0,T]), u(0) = u(t) = 0\}$

2.2 توطئة:[4]الفضاء E_0^α هو فضاء إنعكاسي قابل للفصل و بناخي.

إن المجموعة E_0^αو المزودة بالجداء السلمي التالي:

$$(..,..): E_0^\alpha \times E_0^\alpha \to \mathbb{R}$$

$$(u,v) \to (u,v)_{E_0^\alpha} = (D_{0+}^\alpha u, D_{0+}^\alpha v)_{L^2} = \int_0^T D_{0+}^\alpha u(t), D_{0+}^\alpha v(t) dt.$$

تشكل فضاء هلبرتي.

2.3 توطئة [4] إذا كان $u \in E_0^\alpha$ و $v \in C_0^\infty([0,T])$، فإن:

$$\int_0^T D_{0+}^\alpha u(t)\ D_{0+}^\alpha v(t)\, dt = \int_0^T u(t)\, D_{T-}^\alpha v(t), dt.$$

بإستخدام التوطئة 3.2 يمكن تعريف الحل الضعيف للمسألة (1.1)

2.4 تعريف

إن الحل الضعيف للمسألة الحدية الكسرية (1.1) يعطى وفق العبارة التغايرية التالية:

$$\int_0^T \left[(a + b\|u\|_\alpha^2 D_{0+}^\alpha u(t) D_{0+}^\alpha v(t) - f\big(t, u(t)\big)v(t)\right] dt = 0,$$
$$for \quad all \quad u, v \in E_0^\alpha.$$

2.5 توطئة:[4] من $u \in E_0^\alpha$أجل، لدينا:

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{T^\alpha}{T(\alpha+1)} \|D_{0+}^\alpha u\|_{L^2}. \qquad (2)$$

بالإضافة إذا كان $\alpha > \frac{1}{2}$، لدينا:

(3)

$$\|u\|_\infty \leq \frac{T^{\alpha-\frac{1}{2}}}{T(\alpha)(2(\alpha-i)+1)^{\frac{1}{2}}} \|D_{0+}^\alpha u\|_{L^2},$$

حيث: $\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0,T]} |u(t)|$.

لنعرف التابع الدالي:

$$\psi: E_0^\alpha \to \mathbb{R}$$

$$u \to \psi(u) = \frac{a}{2}\|u\|_\alpha^2 + \frac{b}{4}\|u\|_\alpha^4 - \int_0^T F(t,u(t))dt,$$

مع $F(t,u) = \int_0^u f(t,s)ds$ و

$$(\psi'(u), v) =$$

$$(a + b\|u\|_\alpha^2)\int_0^T D_{0+}^\alpha u(t) D_{0+}^\alpha v(t)dt - \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt, \forall u, v$$

يمكننا استنتاج أن النقطة الحرجة للتابع الدالي ψ هي الحل الضعيف للمسألة الحدية الكسرية (1.1).

2.6 توطئة[4] الفضاء E_0^α منغمس بالتراص في الفضاء $C([0,T],\mathbb{R})$.

3- النتيجة الأساسية:

3.1 نظرية:

نفرض أن الشرطين (A_1) و (A_2) محققين، إذن المسألة الحدية الكسرية (1.1) تقبل على الأقل الحل في E_0^α.

البرهان: سنقوم بتجزئة البرهان إلى ثلاث خطوات:

الخطوة الأولى: إثبات أن ψ يحقق شرط بالي سمايل من النوع سيرامي عند مستوى $c \in \mathbb{R}$.

لتكن $(u_n) \subset E_0^\alpha$ بحيث $\psi(u_n) \to c, (1 + \|u_n\|_\alpha \psi'(u_n) \to 0$ إذا بإستخدام الفرضية (A_1) لدينا:

$$c(1 + +\|u_n\|_\alpha) \geq \psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n)u_n$$

$$\geq \frac{a}{2}\|u_n\|_\alpha^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|_\alpha^4 - \int_0^T F(t,u_n(t))dt$$

$$-\frac{1}{\mu}\left[(a + b\|u_n\|_\alpha^2)\int_0^T D_{0+}^\alpha u_n(t) D_{0+}^\alpha u_n(t)dt - \int_0^T f(t,u_n(t))u_n(t)dt\right]$$

$$\geq \frac{a}{2}\|u_n\|_\alpha^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|_\alpha^4$$

$$-\int_0^T F(t,u_n(t))dt - \frac{1}{\mu}\left[(a + b\|u_n\|_\alpha^2)\|u_n\|_\alpha^2 - \int_0^T f(t,u_n(t))u_n(t)dt\right]$$

$$\geq \frac{a}{2}\|u_n\|_\alpha^2 + \frac{b}{4}\|u_n\|_\alpha^4$$

$$-\int_0^T F(t,u_n(t))dt - \frac{a}{\mu}\|u_n\|_\alpha^2 + \frac{b}{\mu}\|u_n\|_\alpha^4 + \frac{1}{\mu}\int_0^T f(t,u_n(t))u_n(t)dt$$

$$\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^2 + b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^4$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_0^T \left[-\mu F(t,u_n(t)) + f(t,u_n(t))u_n(t)\right]dt$$

$$\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^2 + \frac{1}{\mu}\int_0^T \left[-\mu F(t,u_n(t)) + f(t,u_n(t))u_n(t)\right]dt$$

$$\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^2$$

$$+\frac{1}{\mu}(\int |u_k|$$

$$\geq M - \left[-\mu F(t,u_n(t)) + f(t,u_n(t))_{u_n}(t)\right]dt$$

$$+\int |u_k| \leq M - \left[-\mu F(t,u_n(t)) + f(t,u_n(t))_{u_n}(t)\right]dt$$

$$\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^2 + \frac{1}{\mu}\int |u_k| \leq M\left[-\mu F(t,u_n(t)) + f(t,u_n(t))_{u_n}(t)\right]dt$$

$$\geq a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^2 - c_1$$

مما يعني أن (u_n) محدودة. بالفعل لو كانت (u_n) غير محدودة فإنه توجد المتتالية الجزئية (u_{n_k}) من المتتالية، (u_n) بحيث $\|u_{n_k}\|_\alpha \to +\infty$ لما $k \to +\infty$ و منه نحصل على مايلي:

$$0 \geq \lim_{n\to+\infty}\left[-c(1+\|u_n\|_\alpha) + a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_\alpha^2 - c_1\right] = +\infty$$

مع $c > 0, c_1 > 0$ ثوابت حقيقية، و هذا تناقض.

سنبرهن الآن أن (u_n) متقاربة نحو (u) في E_0^α.

كون الفضاء E_0^αإنعكاسي، إذن توجد $u_n \to u$في الفضاء E_0^α بإستخدام الإنغماس بالتراص للفضاء $C([0,T],\mathbb{R})$ في E_0^αو من خلال التوطئة 6.2 يستلزم أن $u_n \to u$في الفضاء

$C([0,T],\mathbb{R})$لما $n \to +\infty$. و ينتج أنه يوجد $\mathbb{R} > 0$، بحيث $\|u_n\|_\infty \leq \mathbb{R}, \forall\, n$، مما يعني أن (u_n)محدودة بالعدد $R > 0$في $C([0,T],\mathbb{R})$.

و لدينا أيضا $u_n \to u$في $C([0,T],\mathbb{R})$ و من إستمرارية التابع fينتج أن:

$$f(t,u_n(t) \to f\big(t,u(t)\big), \forall\, t \in [0,T]$$

و

$$|f(t,u_n(t)| \leq sup|f(t,y) = g(t) \in L^1[0,1]|,$$

وبالاعتماد على نظرية الهيمنة للوبيغ نجد أن:

$$\int_0^T f\big(t,u_n(t)\big)dt \to \int_0^T f\big(t,u(t)\big)dt \quad as \quad n \to \infty (1)$$

لنحسب المقدار التالي:

$$\begin{aligned}(\psi'(u_n) - \psi'(u), u_n - u) &\geq (a + b\|u_n\|_\alpha^2 u_n - \|u\|_\alpha^2 + b(\|u_n\|_\alpha^2 \\ &- \|u\|_\alpha^2)\int_0^T D_{0+}^\alpha u(t) D_{0+}^\alpha (u_n(t) - u(t)))dt \\ &- \left|\int_0^T \Big(f\big(t,u_n(t)\big) - f\big(t,u(y)\big)\Big)dt\right| \|u_n - u\|_\infty\end{aligned}$$

بما أن (u_n)محدودة و $u_n \to u$في E_0^α ، و من جهة أخرى لدينا:

$$b(\|u_n\|_\alpha^2 - \|u\|_\alpha^2)\int_0^T D_{0+}^\alpha u(t) D_{0+}^\alpha (u_n(t) - u(t)))dt \to 0$$

لما $n \to \infty$و من خلال التقارب بإنتظام للمتتاليةu_n نحو u في$C([0,T],\mathbb{R})$ ينتج أن:

$$\left|\int_0^T \Big(f\big(t,u_n(t)\big) - f\big(t,u(y)\big)\Big)dt\right| \|u_n - u\|_\infty \to 0$$

لما و $n \to \infty$و عليه$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_\alpha{}^2 = 0$ أي (u_n) متقاربة بقوة نحوu في الفضاء E_0^α، أي أن التابع ψالدالي يحقق شرط بالي سمايل$((\mathrm{PS})_c)$.

الخطوة الثانية: إثبات أن التابع ψ يحقق الشرط الهندسي الأول من النظرية 3.2 لممر الجبل.

لدينا من الفرضية: (A_2)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 : (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$$

بحيث:

$$F(t,x) < \frac{a}{2}(\|p\|_\infty + \varepsilon)|x|^2 + \delta_\varepsilon |x|^4$$

بالفعل، لدينا:

$$\left|\frac{f(t,x)}{ax} - p(t)\right| < \varepsilon for |x| \leq \delta$$

$$\Longrightarrow f(t,x) \leq \varepsilon a|x| + a|x|p(t)$$

$$\Longrightarrow f(t,x) \leq \frac{a}{2}(\|p\|_\infty + \varepsilon)|x|^2$$

و من أجل كل $u \in E_0^\alpha$ و بإستعمال النتائج السابقة:

$$\psi(u) = \frac{a}{2}\|u\|_\alpha^2 + + \frac{b}{4}\|u\|_\alpha^4 - \int_0^T F\big(t,u(t)\big)dt$$

$$\geq \frac{a}{2}\left[1 - (\|p\|_\infty + \varepsilon)\frac{T^{2\alpha}}{T^2(\alpha+1)}\right]\|u\|_\alpha^2 + \frac{b}{4}\left[1 - \delta_\varepsilon \frac{T^{4\alpha}}{T^4(\alpha+1)}\right]\|u\|_\alpha^4$$

نختار ρ كبير بالقدر الكافي مع $\sigma = \frac{a}{2}\left[1 - (\|p\|_\infty + \varepsilon)\frac{T^{2\alpha}}{T^2(\alpha+1)}\right]\|u\|_\alpha^2 \geq 0$

الخطوة الثالثة: إثبات أن التابع ψ يحقق الشرط الهندسي الثاني من النظرية 3.2 لممر الجبل من النوع سيرامي.

إن الفرضية (A_1) تستلزم أنه يوجد:

$$\exists u > 4, \exists C_1 > 0: F(t,x) \geq C_1(|x|^{\mu} - 1)$$

و عليه فمن أجل $u \in E_0^{\alpha}$ مع $u \neq 0$ و $n > 0$، لدينا:

$$\psi(nu) = \frac{a}{2}\|u\|_{\alpha}^2 + \frac{b}{4}\|u\|_{\alpha}^4 - \int_0^T F(t, nu(t))dt$$

$$\leq \frac{an^2}{2}\|u\|_{\alpha}^2 + \frac{bn^4}{4}\|u\|_{\alpha}^4 - C_1 n^u \|u\|_{\mu}^{\mu} + C_1 T$$

إذن: $\psi(\mathrm{nu}) \to -\infty$ لما $n \to +\infty$

خلاصة:

إن شروط النظرية 3.2 محققة على التابع الدالي ψ و مما ينتج أن هذا الأخير يقبل نقطة حرجة و التي تعد الحل غير المعدوم للمسألة الحدية الكسرية (1.1) في الفضاء E_0^{α}.

Références :

1. *A.A. Kilbas (2006): H.M. SRIVASTAVA and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier science, Amsterdam.*
2. *S. G. SamKi, A. A. Kilbas, O. I. Marchichev (1993): Fractional Integral and Derivatives: theory and applications, Gordon and Break.*
3. *I. Podlubny (1999) Fractional differential equations, Academic Press, San Diego.*
4. *F. Jiao, Y. Zhou -2011): Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory, Computers and mathematics with applications, (62), 1199-1181.*
5. *M. Willem (1996): Minimax theorem, Birkhauser, Boston.*
6. *M. Badiale, E. Serra (2011): Semilinear elliptic equations for beginners, Springer-Verlag, New York.*
7. *P. H. Rabinowitz (1986): Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI.*
8. *L. Ding. L. Li, J. L. Zhang (2013): positive solutions for a nonhomogeneous Kirchhoff equation with the asymptotical nonlinearity in $\mathbb{R}^3$, 16-1.*
9. *B. cheng, X. Wu (2009): Existence results of positive solutions of Kirchhoff type problems, Nonlinear Analysis, 71 4892 – 4883.*
10. *M. A. Alyami, H. M. Alhirabi and A. Ghanmi, A Note on a Kirchhoff type Boundary Value Problem Involving Riemann-Liouville Fractional Derivative, Bol. Soc. Paran. Mat. Doi: 10.5269/bspm.63039.*
11. *T. Chen, W. Liu, Ground state solutions of Kirchhoff-type fractional Dirichlet problem with p-Laplacian, Adv. Dffier. Equi. 2018, 436.*