

إثبات صحة تخمين Fortune في حالة خاصة

A proof of Fortune's conjecture correctness in a particular case

حياة رزقي

¹ Emails: hayat.rezgui@g.ens-kouba.dz or rezguihayat@yahoo.fr² حياة رزقي، مخبر المعادلات التفاضلية غير الخطية، قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة بالقبة، القبة القديمة، الجزائر العاصمة³ Hayat REZGUI, EDPNL Laboratory

Department of Mathematics, Ecole Normale Supérieure de Kouba, Algiers, ALGERIA.

Doi 10.5281/zenodo.7990982

تاريخ القبول: 17 أفريل 2022

تاريخ الوصول: 06 نوفمبر 2021

الملخص (Abstract):

يُعتبر تخمين Fortune الذي يُنسب لصاحبه عالم الاجتماع والانثروبولوجيا زينلندي الجنسية *Reo Franklin Fortune* (27 مارس 1903 م - 25 نوفمبر 1979 م)، من أبرز التخمينات الرياضية التي لا تزال دون حل إلى يومنا هذا، رغم أنه يبدو تخميناً بسيطاً يخص الأرقام المحظوظة أو ما يسمى The fortunate numbers (وهي تختلف عن الأعداد المحظوظة The lucky numbers). إنه تخمين حول الأعداد الأولية، فحواه كالتالي:

" لقد توقع *Reo F. Fortune* أن جميع الأرقام المحظوظة هي أعداد أولية "

و بتاريخ 30 سبتمبر 2020م، أقر الباحث في علم الحساب *Neil James Alexander Sloane* أن جميع الأرقام المحظوظة التي عُثر عليها (يدويًا أو باستخدام الحواسيب الآلية عالية الدقة) حتى هذا التاريخ، هي أعداد أولية بالفعل و من غير المحتمل أن لا تكون الأرقام المحظوظة كلها أعدادا أولية (انظر آخر مرجع من مراجع هذه المقالة)، كما لم يتم إيجاد أي مثال مضاد (حتى الساعة) يُفند صحة تخمين *Fortune*.

الهدف من هذه المقالة هو إثبات صحة تخمين Fortune في حالة خاصة، من خلال دراسة العلاقة بين هذا التخمين و المجالات المفتوحة من الشكل $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ حيث P_n هو جداء الـ n أعداد الأولية الأولى $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ الأولى و $k \neq 0$ عدد طبيعي، و سيكون ذلك اعتمادًا على بضع متراجحات رياضية تحققها الأرقام المحظوظة.

الكلمات المفتاحية: تخمين Fortune، الأرقام المحظوظة، النظرية الأساسية للحساب، الأعداد الأولية.

Abstract

Fortune's conjecture, which is attributed to its owner the Zealander social anthropologist **Reo Franklin Fortune** (March 27, 1903 - November 25, 1979), is one of the most prominent mathematical conjectures that is still unsolved to this day, although it appears to be a simple conjecture regarding the so-called fortunate numbers (which are different from the lucky numbers). It's a conjecture about prime numbers. Its gist is:

"**Reo F. Fortune** predicted that all fortunate numbers are primes".

On September 30, 2020, *Neil James Alexander Sloane* declared that all the fortunate numbers found (manually or using high-resolution automated computers) to date are indeed prime numbers, it is unlikely that they are not all prime numbers and no counterexample has been found (to this day) to disprove the correctness of this conjecture.

The aim of this article is to prove the correctness of **Fortune's** conjecture in a special case by studying the relationship between this conjecture and the intervals $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$, where P_n is n^{th} prime factorial, n and k are two positive integers, and this will be based on a few mathematical inequalities that the fortunate numbers fulfil.

Keywords: *Fortune's* conjecture, fortunate numbers, the fundamental theorem of Arithmetic, prime numbers, prime factorial.

1-المدخل (introduction): قبل الولوج إلى موضوع المقالة، نشير إلى أنه من المثير للإعجاب و

الاستغراب في آن واحد، أن يكون صاحب هذا التخمين هو عالم اجتماع، و لا علاقة له بالرياضيات. جاء في [Go] أن تخمين **Fortune** قد ظهر لأول مرة في النسخة المطبوعة لـ [G] و كان ذلك عام 1980م (بعد وفاة **Reo F. Fortune**)، ثم تمت مناقشته بمزيد من التفصيل و التحليل في [Gu].

إن جميع الرياضياتيين الذين يستهويهم البحث عن حلٍ لتخمين **Fortune**، تُصادفهم عقبات و صعوبات كبيرة، بسبب قلة بل نُدرة مراجع الرياضيات التي تتناول الحديث عن هذا التخمين.

وبالرغم من ذلك، نهدف من خلال هذا العمل، إلى أن نُوجد مرجعاً جديداً مُهماً (هذه المقالة العلمية) باللغة العربية، يتناول هذا التخمين بكل تفاصيله والملاحظات التي تتعلق به، حتى تصبح هذه المقالة مرجعاً أساسياً لكل من يبتغي الإلمام بما يتعلق بتخمين **Fortune** أو الإبحار والغوص أكثر في هذا الموضوع.

تتكون هذه المقالة من أربعة أجزاء رئيسية، ابتداءً من المدخل وهو مقدمة عامة، ثم فقرة تمهيدية نتبى فيها الرموز الرياضية الضرورية لخوض موضوع المقالة. بعد ذلك سنتطرق لمختلف المتراجحات (المتباينات) الرياضية التي تحقّقها الأرقام المحظوظة و قد تم إثباتها في المرجع الرئيسي [R]. وفي فقرة موالية، سنبرهن على قضية أساسية في هذه المقالة، مفادها أن المجالات من الشكل $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ سابقة الذكر لا تشمل أي عدد أولي عندما يكون $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$ ، وهو ما سيقودنا إلى النتيجة التالية: إذا كان الرقم المحظوظ ذو المرتبة n أصغر تماماً من a_{n+1}^2 ، فإنه حتماً عدد أولي، ممّا يعني صحة تخمين **Fortune** في حالة $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$.

و تتمتع لهذه القضية، سنقدم أمثلة مضادة تثبت أن المجال المفتوح $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ قد يشمل أعداداً أولية في حالة $a_{n+k} > a_{n+1}^2$.

وسنهي المقالة بخاتمة نوجز فيها مختلف النتائج التي تم التوصل إليها في هذه المقالة، وكذا الآفاق التي نتوق إلى بلوغها مستقبلاً بُغية الإسهام في التوصل لحل نهائي لتخمين *Fortune*.

ترميز

من أجل كل عددين طبيعيين n و k غير معدومين، سنرمز في كل ما سيأتي، بـ a_n للعدد الأولي رقم n و بـ $P_n = a_1 a_2 \dots a_n$ لجداء الـ n أعداد الأولية الأولى، كما سنضع $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}] = I_{n,k}$ اختصاراً للكتابة.

1. الأرقام المحظوظة

تعريف

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نسمي الرقم المحظوظ (*The n^{th} fortunate number*) F_n المرتبة n ، و هو تعريفاً أصغر عدد طبيعي m ، $m \geq 2$ بحيث يكون العدد الطبيعي $m + P_n$ أولياً.

نتيجة

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، الرقم المحظوظ ذو المرتبة n : F_n هو عدد فردي.

قيم بعض الأرقام المحظوظة.

سنعطي فيما يلي قائمة الأرقام المحظوظة العشرين الأولى $[R]$ ، و كلها أعداد أولية:

n	F_n
1	3
2	5
3	7
4	13
5	23
6	17
7	19
8	23
9	37
10	61
11	67
12	61
13	71
14	47
15	107
16	59
17	61
18	109
19	89
20	103

2-المواد والطرائق (Materials and methods):

1.3 متراجحات رياضية تحققها الأرقام المحظوظة

في هذه الفقرة، سنقوم بسرد بضع متراجحات تحققها الأرقام المحظوظة، وجميعها مذكور مع الإثبات في المرجع الرئيسي لهذه المقالة، ألا وهو [R].

المتراجحة الأولى: $a_{n+1} \leq F_n$ ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

المتراجحة الثانية: $F_n \leq 1 + P_n$ ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

المتراجحة الثالثة: إذا تحققت المتراجحة $F_n < a_{n+1}^2$ فإن F_n أولي.

قضية 1

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. عندئذ فإن المجال المفتوح $I_{n,1}$ لا يحتوي على أي عدد أولي.

إثبات

لنفرض جدلاً (بالخلف) أنه يوجد على الأقل عدد أولي x في المجال المفتوح $I_{n,1}$. عندئذ يكون:

و منه، بحسب النظرية الأساسية للحساب (The fundamental theorem of Arithmetic) [K],[M] فإن $x' = x + P_n$ ، حيث $a_{n+1} < x' < a_{n+2}$ ، إذن x' غير أولي لأنه محصور تمامًا بين عددين أوليين متتابعين. و ينتج من المسلمة الشهيرة *Bertrand's postulate* [Ra] أن:

$$x' = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} \cdot a_{n+1}^{\beta_{n+1}}$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ هي أعداد طبيعية.

و لكن، من كون $x = x' + P_n$ أوليًا

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_n \text{ ينتج حتماً أن: } \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

$$\text{و بالتالي: } x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}}$$

و ينتج من المسلمة الشهيرة *Bertrand's postulate* [Ra] أن:

$$x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}} < a_{n+2} < 2 \cdot a_{n+1}$$

و عليه، يكون: $\beta_{n+1} \in \{0, 1\}$.

إن الحالة $\beta_{n+1} = 1$ مفروضة، لأنه في هذه الحالة، يكون: $a_{n+1} = x'$ (عدد أولي)

و هذا يناقض كون x' غير أولي.

إذن تبقى فقط الحالة $\beta_{n+1} = 0$ ، و هنا يصبح لدينا: $x' = 1$ ، و هذا تناقض لأن x' محصور تمامًا بين عددين أوليين متتابعين.

و هكذا، توصلنا إلى تناقض، إذن: المجال المفتوح $I_{n,1}$ لا يحتوي على أي عدد أولي.

قضية 2 (تعميم للقضية السابقة):

ليكن n عدداً طبيعياً مثبتاً غير معدوم، و ليكن k عدداً طبيعياً غير معدوم بحيث: $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$. عندئذ فإن المجال المفتوح $I_{n,k}$ لا يحتوي على أي عدد أولي.

إثبات

نفرض جلاً (بالخلف) أنه يوجد على الأقل عدد أولي x في المجال المفتوح $I_{n,k}$. عندئذ يكون:

$x = x' + P_n$ ، حيث $a_{n+k} < x' < a_{n+k+1}$ ، إذن x' غير أولي لأنه محصور تماماً بين عددين أوليين متتابعين.

و منه، بحسب النظرية الأساسية للحساب، فإن x' يكتب على الشكل:

$$x' = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} \cdot a_{n+1}^{\beta_{n+1}} \dots a_{n+k}^{\beta_{n+k}}$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+k}$ هي أعداد طبيعية.

و لكن، من كون $x = x' + P_n$ أوليًا و $P_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$ ينتج حتماً أن: $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

$$\text{و بالتالي: } x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\beta_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\beta_{n+k}}$$

إن الأعداد الطبيعية $\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{n+k}$ تحقق حتماً: $\beta_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{n+1, n+k}$ و ذلك لأن:

$$\forall i = \overline{n+1, n+k}: a_i^{\beta_i} \leq x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\beta_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\beta_{n+k}} < a_{n+k+1} < a_{n+1}^2 \leq a_i^2$$

و من جهة أخرى، لا يمكن لعددتين مختلفتين β_i و β_j من المجموعة $\{\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{n+k}\}$ أن يساويا 1 معاً،
و إلا لكان لدينا:

$$a_{n+1}^2 \leq a_i \cdot a_j \leq x' < a_{n+1}^2 \quad (\text{و هذا تناقض})$$

و عليه فإن إحدى الحالتين التاليتين فقط يمكنها أن تتحقق:

إما

$$(1) \quad \beta_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k} \quad \text{و هنا يصبح لدينا: } x' = 1 \quad \text{و هذا تناقض لأن } x' \text{ محصور تماماً بين عددين}$$

أوليين متتابعين.

أو

$$(2) \quad \exists j \in \{n+1, n+2, \dots, n+k\} : \beta_j = 1, \beta_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k}, i \neq j$$

و هنا يصبح لدينا: $x' = a_j$ (عدد أولي) و هذا يناقض فرضية أن x' غير أولي.

إذن الحالتان السابقتان مرفوضتان أيضاً، و بالتالي، لا يوجد أي عدد أولي x في المجال المفتوح $I_{n,k}$.

3- النتائج (Results):

النتيجة 1:

نستخلص من القضيتين السابقتين (قضيتي 1 و قضيتي 2) أن المجالات المفتوحة من الشكل $[P_n + a_{n+k+1}, P_n + a_{n+k}] I_{n,k}$ لا تحوي أي عدد أولي عندما يكون: $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$ ، حيث $k \neq 0$ و $n \neq 0$ عددان طبيعيان.

النتيجة 2 (إثبات صحة تخمين Fortune في حالة $F_n < a_{n+1}^2$)

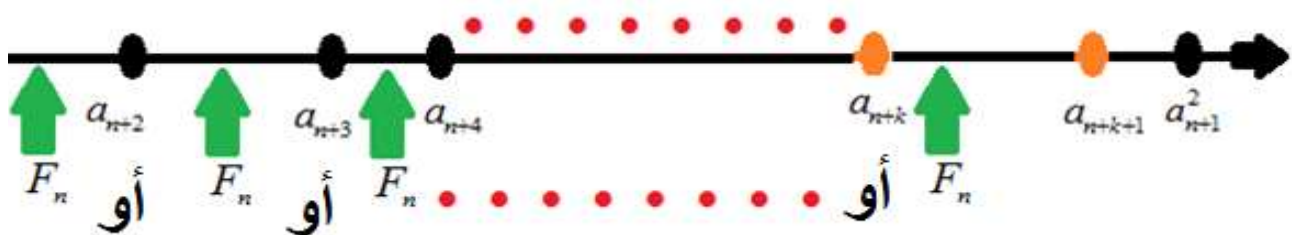
تمنحنا النتيجة 1 نتيجة أخرى، ألا وهي صحة تخمين Fortune في حالة $F_n < a_{n+1}^2$ (و قد تم إثبات صحة هذا التخمين في هذه الحالة باستخدام طريقة أخرى في [R]):

إثبات صحة تخمين Fortune في حالة $F_n < a_{n+1}^2$: بفرض $F_n < a_{n+1}^2$ ، و لنثبت أن العدد F_n أولي.

لكون العدد الطبيعي a_{n+1}^2 غير أولي، تنتج لدينا حالتان:

الحالة 1.

يوجد عدد طبيعي $k \neq 0$ ، بحيث: $a_{n+1} \leq a_{n+k} \leq F_n \leq a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$ (كما هو موضح في الشكل 1).



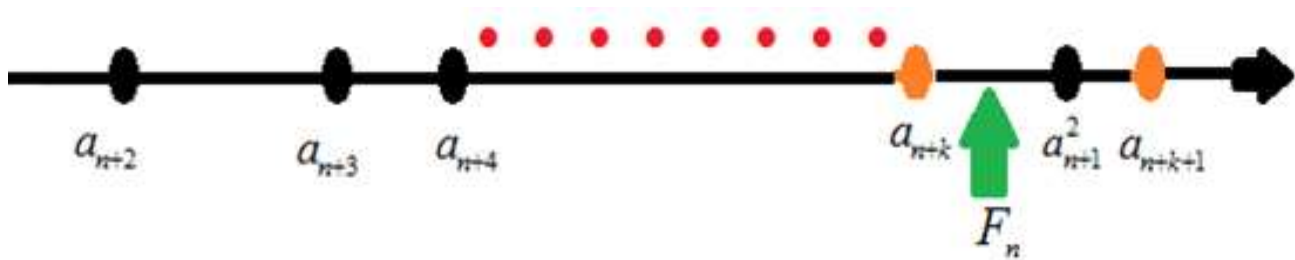
الشكل 1.

وبالتالي:

بما أن العدد الطبيعي $P_n + F_n$ أولي و $P_n + a_{n+1} \leq P_n + a_{n+k} \leq P_n + F_n \leq P_n + a_{n+k+1} < P_n + a_{n+1}^2$ أي أن: $(P_n + F_n) \in [P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ ، فمن القضية (قضية 2) ينتج أن: $F_n = a_{n+k}$ أو $F_n = a_{n+k+1}$ ، مما يعني أن F_n أولي، ومنه صحة تخمين Fortune في الحالة 1.

الحالة 2.

يوجد عدد طبيعي $k \neq 0$ ، بحيث: $a_{n+1} \leq a_{n+k} \leq F_n < a_{n+1}^2 < a_{n+k+1}$ (كما هو موضح في الشكل 2).



الشكل 2.

باتباع نفس خطوات إثبات قضية 2، لدينا: $F_n + P_n$ عدد أولي و $a_{n+k} \leq F_n < a_{n+1}^2 < a_{n+k+1}$. بحسب النظرية الأساسية للحساب، فإن F_n يكتب على الشكل:

$$F_n = a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \dots a_n^{\gamma_n} \cdot a_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \dots a_{n+k}^{\gamma_{n+k}}$$

حيث $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+k}$ هي أعداد طبيعية.

ولكن، من كون $F_n + P_n$ أوليًا و $P_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$ ينتج حتماً أن: $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$.

وبالتالي: $F_n = a_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\gamma_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\gamma_{n+k}}$.

إن الأعداد الطبيعية $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_{n+k}$ تحقق حتماً: $\gamma_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{n+1, n+k}$ ، وذلك لأن:

$$\forall i = \overline{n+1, n+k}: a_i^{\gamma_i} \leq F_n = a_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\gamma_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\gamma_{n+k}} < a_{n+1}^2 \leq a_i^2$$

و من جهة أخرى، لا يمكن لعددتين مختلفتين γ_i و γ_j من المجموعة $\{\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_{n+k}\}$ أن يساويا 1 معاً، وإلا لكان لدينا:

$$a_{n+1}^2 \leq a_i \cdot a_j \leq F_n < a_{n+1}^2 \quad (\text{و هذا تناقض})$$

وعليه فإن إحدى الحالتين التاليتين فقط يمكنها أن تتحقق:

إما

$$(1) \quad \gamma_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k} \text{ و هنا يصبح لدينا: } F_n = 1 \text{ و هذا تناقض لأن } F_n \geq 2 \text{ تعريفاً.}$$

أو

$$(2) \quad \exists j \in \{n+1, n+2, \dots, n+k\}: \gamma_j = 1, \gamma_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k}, i \neq j \text{ و هنا يصبح لدينا:}$$

$$F_n = a_j \text{ (عدد أولي).}$$

إذن الحالة 2) فقط هي المقبولة و بالتالي، F_n عدد أولي، و منه صحة تخمين *Fortune* في الحالة 2 أيضا.

2. بعض الأمثلة المضادة، التي تبين إمكانية وجود أعداد أولية في المجالات $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ ، $I_{n,k} =]P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}[$

في حالة $a_{n+k} > a_{n+1}^2$:

المثال المضاد 1.

من أجل $n=1$ و $k=8$ ، لدينا بالفعل: $a_{n+k} > 9 = a_2^2 = a_{n+1}^2$ ، و كذلك: $23 = a_9 = a_{n+k}$

$$I_{1,8} =]P_1 + a_9, P_1 + a_{10}[=]2 + 23, 2 + 29[=]25, 31[$$

إن العدد الأولي 29 ينتمي إلى المجال المفتوح $]25, 31[$.

المثال المضاد 2.

من أجل $n=2$ و $k=14$ ، لدينا بالفعل: $a_{n+k} > 25 = a_3^2 = a_{n+1}^2$ ، و كذلك: $53 = a_{16} = a_{n+k}$

$$I_{2,14} =]P_2 + a_{16}, P_2 + a_{17}[=]6 + 53, 6 + 59[=]59, 65[$$

إن العدد الأولي 61 ينتمي إلى المجال المفتوح $]59, 65[$.

المثال المضاد 3.

من أجل $n=3$ و $k=58$ ، لدينا بالفعل: $a_{n+k} > 49 = a_4^2 = a_{n+1}^2$ ، و كذلك: $283 = a_{61} = a_{n+k}$

$$I_{3,58} =]P_3 + a_{61}, P_3 + a_{62}[=]30 + 283, 30 + 293[=]313, 323[$$

إن العدد الأولي 317 ينتمي إلى المجال المفتوح $]313, 323[$.

و للمزيد من الأمثلة المضادة مع الشرح الوافي، يمكن الاطلاع على المرجع [R].

3. خلاصة (conclusion):

في هذه المقالة، تم إثبات صحة تخمين *Fortune* (F_n : الرقم المحفوظ ذو المرتبة n ، هو عدد أولي) في

حالة $F_n < a_{n+1}^2$.

و يبقى إثبات صحته أو خطئه في حالة $F_n \geq a_{n+1}^2$ ، غير منجز إلى غاية كتابة هذه السطور، رغم محاولات

حديثة من باحثين و هؤلاء في نظرية الأعداد.

يجدر التنويه هنا إلى أن صاحبة هذه المقالة، قد نجحت في كتابة برنامج على الحاسوب، يقوم بإيجاد الأرقام

المحفوظة الأقل من حد معين (نتيجة محدودة قدرة الحواسيب المستعملة حالياً) و قد كانت جميعها أعداداً أولية

بالفعل (انظر ملحق المرجع [R]).

نأمل أن لا يطول انتظارنا حتى نحصل في المستقبل القريب على حواسيب بمقدرتها تخطي أي عدد أو رقم

نريد تخطيه، و بهذا سنتمكن من حلّ معضلات عديدة في الرياضيات و قد يكون تخمين *Fortune* هو أحدها.

4-المراجع (References):

[G] Gardner M.

Mathematical games, Sci. Amer. (December 1980) 18-28. (Column based on contributions by R. K. Guy).

[Go] Golomb Solomon W.

The evidence for *Fortune's* conjecture, *Mathematics Magazine*, 1981, Vol. 54, No. 4, pp. 209-210.

[Gu] Guy Richard K.

Unsolved problems in intuitive Mathematics, Vol. I, Number Theory, Springer, 1981.

[K] Kaluzhnin L. A.

The Fundamental theorem of Arithmetic, ©English translation, Mir Publishers, Moscow, 44 pages, 1979.

[M] Maier E. A.

A proof of the fundamental theorem of Arithmetic, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 71, No. 10, 1964, pp. 1116-1117.

[Ra] Ramanujan S.

A proof of *Bertrand's* postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11, 1919, 181-182.

[R] Rezgui H.

New explorations and remarkable inequalities related to *Fortune's* conjecture and fortunate numbers.

Submitted, March 2022.

[S] Site: <https://oeis.org/A005235>