

إثبات صحة تخمين Fortune في حالة خاصة

A proof of *Fortune's* conjecture correctness in a particular case

أ. حياة رزقي

تاريخ الإرسال: 6 نوفمبر 2021

تاريخ القبول: 17 أبريل 2022

المُلخَص (Abstract)

يُعتبر تخمين *Fortune* الذي يُنسب لصاحبه عالم الاجتماع والانثروبولوجيا زينلندي الجنسية *Franklin Fortune (Reo)* (27 مارس 1903 م - 25 نوفمبر 1979 م)، من أبرز التخمينات الرياضية التي لا تزال دون حلّ إلى يومنا هذا، رغم أنه يبدو تخميناً بسيطاً يخصّ الأرقام المحظوظة أو ما يسمى (The fortunate numbers) (وهي تختلف عن الأعداد المحظوظة The lucky numbers). إنّه تخمين حول الأعداد الأولية، فحواه كالتالي:

"لقد توقّع *Reo F. Fortune* أنّ جميع الأرقام المحظوظة هي أعداد أوليّة."

وبتاريخ 30 سبتمبر 2020م، أقرّ الباحث في

علم الحساب (*Neil James Alexander*)*Sloane* أنّ جميع الأرقام المحظوظة التي عُثِر

عليها (يدويًا أو باستخدام الحواسيب الآليّة

عاليّة الدقّة) حتّى هذا التاريخ، هي أعداد أوليّة

بالفعل و من غير المحتمل أن لا تكون الأرقام

المحظوظة كلّها أعدادا أوليّة (انظر آخر مرجع

من مراجع هذه المقالة)، كما لم يتمّ إيجاد أي

مثال مضادّ (حتى السّاعة) يُفنّد صحة تخمين

Fortune.

الهدف من هذه المقالة هو إثبات صحة تخمين *Fortune* في حالة خاصة، من خلال دراسة العلاقة بين هذا التخمين والمجالات المفتوحة من الشكل $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ حيث P_n هو جداء الـ n أعداد الأولية $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ الأولى و $k \neq 0$ عدد طبيعي، وسيكون ذلك اعتمادًا على بضع متراجحات رياضية تحقّقها الأرقام المحظوظة.

الكلمات المفتاحيّة Key-words : تخمين

Fortune، الأرقام المحظوظة، النّظريّة

الأساسيّة للحساب، الأعداد الأولية.

Abstract

Fortune's conjecture, which is attributed to its owner the Zealander social anthropologist **Reo Franklin Fortune** (March 27, 1903 - November 25, 1979), is one of the most prominent mathematical conjecture about prime numbers. Its gist is:

"**Reo F. Fortune** predicted that all fortunate numbers are primes".
On September 30, 2020, *Neil James Alexander Sloane* declared that all the fortunate numbers found (manually or using high-resolution automated computers) to date are indeed prime numbers, it is unlikely that they are not all prime numbers and no counterexample has been found (to this day) to disprove the correctness of this conjecture.

The aim of this article is to prove the correctness of *Fortune's* conjecture in a special case by studying the relationship between this conjecture and the intervals $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$, where P_n is n^{th} prime factorial, n and k are two positive integers, and this will be based on a few mathematical inequalities that the fortunate numbers fulfil.

Keywords: *Fortune's* conjecture, fortunate numbers, the fundamental

conjectures that is still unsolved to this day, although it appears to be a simple conjecture regarding the so-called fortunate numbers (which are different from the lucky numbers). It's a theorem of Arithmetic, prime numbers, prime factorial.

1. المدخل Introduction

قبل الولوج إلى موضوع المقالة، نشير إلى أنه من المثير للإعجاب والاستغراب في آن واحد، أن يكون صاحب هذا التخمين هو عالم اجتماع، ولا علاقة له بالرياضيات. جاء في [Go] أن تخمين *Fortune* قد ظهر لأول مرة في النسخة المطبوعة لـ [G] وكان ذلك عام 1980م (بعد وفاة *Reo F. Fortune*)، ثم تمت مناقشته بمزيد من التفصيل والتحليل في [Gu].

إن جميع الرياضياتيين الذين يستهويهم البحث عن حلٍ لتخمين *Fortune*، تُصادفهم عقبات وصعوبات كبيرة، بسبب قلّة بل ندرة مراجع الرياضيات التي تتناول الحديث عن هذا التخمين.

وبالرغم من ذلك، نهدف من خلال هذا العمل، إلى أن نوجد مرجعاً جديداً مُهمّاً (هذه المقالة العلمية) باللغة العربية، يتناول هذا التخمين بكل تفاصيله والملاحظات التي تتعلق به، حتى تصبح هذه المقالة مرجعاً أساسياً لكل من يبتغي الإلمام بما يتعلق بتخمين *Fortune* أو الإبحار والغوص أكثر في هذا الموضوع.

[R]. وفي فقرة موالية، سنبرهن على قضية أساسية في هذه المقالة، مفادها أن المجالات من الشكل $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ سابقة الذكر لا تشمل أي عدد أولي عندما يكون $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$ ، وهو ما سيقودنا إلى النتيجة التالية: إذا كان الرقم المحفوظ ذو المرتبة n أصغر تمامًا من a_{n+1}^2 ، فإنه حتما عدد أولي، مما يعني صحة تخمين Fortune في حالة $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$.

وتتمه لهذه القضية، سنقدّم أمثلة مضادة تثبت أن المجال المفتوح $[P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ قد يشمل أعدادًا أولية في حالة $a_{n+k} > a_{n+1}^2$. وسنهي المقالة بخاتمة نوجز فيها مختلف النتائج التي تم التوصل إليها في هذه المقالة، وكذا الآفاق التي نتوق إلى بلوغها مستقبلاً بغية الإسهام في التوصل لحل نهائي لتخمين Fortune. **ترميز**

من أجل كل عددين طبيعيين n و k غير معدومين، سنرمز في كل ما سيأتي، بـ a_n للعدد الأولي رقم n وبـ $P_n = a_1 a_2 \dots a_n$ لجداء الـ n الأعداد الأولية الأولى، كما سنضع

تتكوّن هذه المقالة من أربعة أجزاء رئيسية، ابتداءً من المدخل وهو مقدمة عامة، ثم فقرة تمهيدية تنبئ فيها الرموز الرياضية الضرورية لخوض موضوع المقالة. بعد ذلك سنتطرق لمختلف المتراجحات (المتباينات) الرياضية التي تحقّقها الأرقام المحفوظة وقد تم إثباتها في المرجع الرئيسي $I_{n,k} = [P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ اختصاراً للكتابة.

2. الأرقام المحفوظة

تعريف

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نسمّي الرقم المحفوظ F_n (The n^{th} fortunate number) ذا المرتبة n ، وهو تعريف أصغر عدد طبيعي m ، $m \geq 2$ بحيث يكون العدد الطبيعي $m + P_n$ أولياً.

نتيجة

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، الرقم المحفوظ ذو المرتبة n : F_n هو عدد فردي.

قيم بعض الأرقام المحفوظة.

سنعطي فيما يلي قائمة الأرقام المحفوظة العشرين الأولى [R]، وكلها أعداد أولية:

n	F_n
1	3
2	5
3	7
4	13
5	23
6	17
7	19
8	23
9	37
10	61
11	67
12	61
13	71
14	47
15	107
16	59
17	61
18	109
19	89
20	103

3. المواد والطرائق Materials and

methods

1.3 متراجحات رياضية تحقّقها الأرقام

المحظوظة

في هذه الفقرة، سنقوم بسرد بضعة متراجحات تحقّقها الأرقام المحظوظة، وجميعها مذكورة مع الإثبات في المرجع الرئيسي لهذه المقالة، ألا وهو [R].

المتراجحة الأولى: $a_{n+1} \leq F_n$ ، من أجل كل

عدد طبيعي n غير معدوم.

المتراجحة الثانية: $F_n \leq 1 + P_n$ ، من أجل

كل عدد طبيعي n غير معدوم.

المتراجحة الثالثة: إذا تحقّقت المتراجحة

$$F_n < a_{n+1}^2 \text{ فإن } F_n \text{ أولي.}$$

قضية 1

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. عندئذ

فإنّ المجال المفتوح $I_{n,1}$ لا يحتوي على أي

عدد أولي.

إثبات:

لنفرض جدلاً (بالخلف) أنه يوجد على الأقل عدد أولي x في المجال المفتوح $I_{n,1}$. عندئذ يكون:

حيث $x = x' + P_n$ ، $a_{n+1} < x' < a_{n+2}$ ، إذن x' غير أولي لأنه محصور تماماً بين عددين أوليين متتابعين.

ومنه، بحسب النظرية الأساسية للحساب (The fundamental theorem of Arithmetic) [K],[M]

فإن x' يكتب على الشكل:

$$x' = a_1^{\beta_1} . a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} . a_{n+1}^{\beta_{n+1}}$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ هي أعداد طبيعية.

ولكن، من كون $x = x' + P_n$ أولياً

و $P_n = a_1 . a_2 \dots a_n$ ينتج حتماً أن:

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

وبالتالي: $x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}}$.

وينتج من المسلمة الشهيرة *Bertrand's postulate* (Ra) أن:

$$x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}} < a_{n+2} < 2.a_{n+1}$$

وعليه، يكون: $\beta_{n+1} \in \{0,1\}$.

إن الحالة $\beta_{n+1} = 1$ مرفوضة، لأنه في هذه الحالة، يكون: $x' = a_{n+1}$ (عدد أولي)

وهذا يناقض كون x' غير أولي.

إذن تبقى فقط الحالة $\beta_{n+1} = 0$ ، وهنا يصبح لدينا: $x' = 1$ ، وهذا تناقض لأن x' محصور تماماً بين عددين أوليين متتابعين.

وهكذا، توصلنا إلى تناقض، إذن: المجال المفتوح $I_{n,1}$ لا يحتوي على أي عدد أولي.

قضية 2 (تعميم للقضية السابقة):

ليكن n عدداً طبيعياً مثبتاً غير معدوم، و ليكن k عدداً طبيعياً غير معدوم بحيث:

$$a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$$

عندئذ فإن المجال المفتوح $I_{n,k}$ لا يحتوي على أي عدد أولي.

إثبات:

لنفرض جدلاً (بالخلف) أنه يوجد على الأقل عدد أولي x في المجال المفتوح $I_{n,k}$. عندئذ يكون:

حيث $x = x' + P_n$ ، $a_{n+k} < x' < a_{n+k+1}$ ، إذن x' غير أولي لأنه محصور تماماً بين عددين أوليين متتابعين.

ومنه، بحسب النظرية الأساسية للحساب، فإن x' يكتب على الشكل:

$$x' = a_1^{\beta_1} . a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} . a_{n+1}^{\beta_{n+1}} \dots a_{n+k}^{\beta_{n+k}}$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+k}$ هي أعداد طبيعية.

ولكن، من كون $x = x' + P_n$ أولياً و

$P_n = a_1 . a_2 \dots a_n$ ينتج حتماً أن:

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

وبالتالي: $x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\beta_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\beta_{n+k}}$.

إنّ الأعداد الطّبيعيّة $\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{n+k}$ تحقق حتمًا: $\beta_i \in \{0,1\}, \forall i = \overline{n+1, n+k}$ ، و

ذلك لأنّ:

$$\forall i = \overline{n+1, n+k}: a_i^{\beta_i} \leq x' = a_{n+1}^{\beta_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\beta_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\beta_{n+k}} < a_{n+k+1} < a_{n+1}^2 \leq a_i^2$$

النتيجة 1:

نستخلص من القضيتين السابقتين

(قضيّة 1 و قضيّة 2) أن المجالات المفتوحة

من الشكل $[P_n + a_{n+k+1}, P_n + a_{n+k}]$ لا

تحتوي أي عدد أولي عندما يكون: $a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$ ،

حيث $k \neq 0$ و $n \neq 0$ عددان طبيعيين.

النتيجة 2 (إثبات صحّة تخمين Fortune

في حالة $F_n < a_{n+1}^2$)

تمنحنا النتيجة 1 نتيجةً أخرى، ألا وهي

صحّة تخمين Fortune في حالة $F_n < a_{n+1}^2$ و)

قد تم إثبات صحّة هذا التخمين في هذه الحالة

باستخدام طريقة أخرى في [R]:

إثبات صحّة تخمين Fortune في حالة

$F_n < a_{n+1}^2$: بفرض $F_n < a_{n+1}^2$ ، ولنثبت أنّ

العدد F_n أولي.

لكون العدد الطّبيعي a_{n+1}^2 غير أولي، تنتج

$$\exists j \in \{n+1, n+2, \dots, n+k\}: \beta_j = 1, \beta_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k}, i \neq j$$

لدينا حالتان:

الحالة 1.

يوجد عدد طبيعي $k \neq 0$ ، بحيث:

$$a_{n+1} \leq a_{n+k} \leq F_n \leq a_{n+k+1} < a_{n+1}^2$$

موضّح في الشكل (1).

و من جهة أخرى، لا يمكن لعددتين مختلفتين

β_j و β_i من المجموعة $\{\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{n+k}\}$

أن يساويا 1 معًا، وإلا لكان لدينا:

$$a_{n+1}^2 \leq a_i \cdot a_j \leq x' < a_{n+1}^2 \quad (\text{وهذا تناقض})$$

وعليه فإنّ إحدى الحالتين التاليتين فقط

يمكنها أن تتحقّق:

إمّا

$$(1) \quad \beta_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k} \quad \text{وهنا يصبح}$$

لدينا: $x' = 1$ وهذا تناقض لأنّ x' محصور

تمامًا بين عددين أوليين متتابعين.

أو

(2)

وهنا يصبح لدينا: $x' = a_j$ (عدد أولي) و

هذا يناقض فرضيّة أنّ x' غير أولي.



الشكل 1.

وبالتالي:

بما أن العدد الطبيعي $P_n + F_n$ أولي و $P_n + a_{n+1} \leq P_n + a_{n+k} \leq P_n + F_n \leq P_n + a_{n+k+1} < P_n + a_{n+1}^2$ أي أن: $(P_n + F_n) \in [P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}]$ ، فمن القضية (قضية 2) ينتج أن: $F_n = a_{n+k+1}$ أو $F_n = a_{n+k}$ ، مما يعني أن F_n أولي، ومنه صحة تخمين *Fortune* في الحالة 1.

الحالة 2.

يوجد عدد طبيعي $k \neq 0$ ، بحيث: $a_{n+1} \leq a_{n+k} \leq F_n < a_{n+1}^2 < a_{n+k+1}$ (كما هو موضح في الشكل 2).



الشكل 2.

$$\forall i = \overline{n+1, n+k}: a_i^{\gamma_i} \leq F_n = a_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\gamma_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\gamma_{n+k}} < a_{n+1}^2 \leq a_i^2$$

ومن جهة أخرى، لا يمكن لعددتين مختلفتين

γ_i و γ_j من المجموعة $\{\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_{n+k}\}$

أن يساويا 1 معًا،

وإلا لكان لدينا:

$$(و هذا) \quad a_{n+1}^2 \leq a_i \cdot a_j \leq F_n < a_{n+1}^2$$

(تناقض)

وعليه فإن إحدى الحالتين التاليتين فقط

يمكنها أن تتحقق:

إما

$$(1) \quad \gamma_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k} \text{ وهنا يصبح}$$

لدينا: $F_n = 1$ وهذا تناقض لأن $F_n \geq 2$

تعريفًا.

أو

باتباع نفس خطوات إثبات قضية 2، لدينا:

$$a_{n+k} \leq F_n < a_{n+1}^2 < a_{n+k+1} \text{ و } F_n + P_n \text{ عدد أولي و}$$

بحسب النظرية الأساسية للحساب، فإن

F_n يكتب على الشكل:

$$F_n = a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \dots a_n^{\gamma_n} \cdot a_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \dots a_{n+k}^{\gamma_{n+k}}$$

حيث $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+k}$ هي أعداد طبيعية.

ولكن، من كون $F_n + P_n$ أوليًا و

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_n \text{ ينتج حتماً أن:}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$$

$$\text{وبالتالي: } F_n = a_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \cdot a_{n+2}^{\gamma_{n+2}} \dots a_{n+k}^{\gamma_{n+k}}$$

إن الأعداد الطبيعية $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_{n+k}$

تحقق حتمًا: $\gamma_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{n+1, n+k}$ ، و

ذلك لأن:

$$\{j \in \{1, 2, \dots, n+k\} : \gamma_j = 1, \gamma_i = 0, \forall i = \overline{n+1, n+k}, i \neq j\} \quad (2)$$

، وهنا يصبح لدينا:

من أجل $n=3$ و $k=58$ ، لدينا بالفعل:

$$283 = a_{61} = a_{n+k} > 49 = a_4^2 = a_{n+1}^2$$

$$F_n = a_j \text{ (عدد أولي).}$$

إذن الحالة (2) فقط هي المقبولة وبالتالي،

F_n عدد أولي، ومنه صحة تخمين *Fortune* في

الحالة 2 أيضا.

إن العدد الأولي 317 ينتمي إلى المجال

$$I_{3,58} =]313, 323[$$

وللمزيد من الأمثلة المضادة مع الشرح الوافي،

يمكن الاطلاع على المرجع [R].

6. خاتمة Conclusion في هذه المقالة،

تم إثبات صحة تخمين *Fortune* (F_n): الرقم

المحفوظ ذو المرتبة n ، هو عدد أولي في حالة

$$F_n < a_{n+1}^2$$

ويبقى إثبات صحته أو خطئه في حالة

$$F_n \geq a_{n+1}^2 =]P_1 + a_9, P_1 + a_{10}[=]2 + 23, 2 + 29[=]25, 31[$$

السطور، رغم محاولات حثيثة من باحثين و

هُوّة في نظرية الأعداد.

يجدر التنويه هنا إلى أن صاحبة هذه

المقالة، قد نجحت في كتابة برنامج على

الحاسوب، يقوم بإيجاد الأرقام المحفوظة

الأقل من حدّ معين (نتيجة محدوديّة قدرة

الحواسيب المستعملة حاليا) وقد كانت

جميعها أعداداً أوليّة بالفعل (انظر ملحق

$$I_{2,14} =]P_2 + a_{16}, P_2 + a_{17}[=]6 + 53, 6 + 59[=]59, 65[$$

نأمل ألا يطول انتظارنا حتى نحصل في

المستقبل القريب على حواسيب بمقدورها

تخطّي أي عدد أو رقم نريد تخطّيه، وبهذا

سنتمكّن من حلّ معضلات عديدة في

5. بعض الأمثلة المضادة، التي تبين

إمكانية وجود أعداد أوليّة في المجالات

$$I_{n,k} =]P_n + a_{n+k}, P_n + a_{n+k+1}[$$

$$: a_{n+k} > a_{n+1}^2$$

المثال المضادّ 1.

من أجل $n=1$ و $k=8$ ، لدينا بالفعل:

$$23 = a_9 = a_{n+k} > 9 = a_2^2 = a_{n+1}^2$$

إن العدد الأولي 29 ينتمي إلى المجال المفتوح

$$I_{1,8} =]25, 31[$$

المثال المضادّ 2.

من أجل $n=2$ و $k=14$ ، لدينا بالفعل:

$$53 = a_{16} = a_{n+k} > 25 = a_3^2 = a_{n+1}^2$$

إن العدد الأولي 61 ينتمي إلى المجال المفتوح

$$I_{2,14} =]59, 65[$$

A proof of *Bertrand's* postulate, Journal of the Indian Mathematical Society, 11, 1919, 181-182.

[R] Rezgui H.

New explorations and remarkable inequalities related to *Fortune's* conjecture and fortunate numbers.

Submitted, March 2022.

[S] Site: <https://oeis.org/A005235>

الرياضيات وقد يكون تخمين *Fortune* هو أحدها.

المراجع References

[G] Gardner M.

Mathematical games, Sci. Amer.

(December 1980) 18-28. (Column based on contributions by R. K. Guy).

[Go] Golomb Solomon W.

The evidence for *Fortune's* conjecture, Mathematics Magazine, 1981, Vol. 54, No. 4, pp. 209-210.

[Gu] Guy Richard K.

Unsolved problems in intuitive Mathematics, Vol. I, Number Theory, Springer, 1981.

[K] Kaluzhnin L. A.

The Fundamental theorem of Arithmetic, ©English translation, Mir Publishers, Moscow, 44 pages, 1979.

[M] Maier E. A.

A proof of the fundamental theorem of Arithmetic, The American Mathematical Monthly, Vol. 71, No. 10, 1964, pp. 1116-1117.

[Ra] Ramanujan S.