

هزاز باولي تحت تأثير مجال مغناطيسي في فضاء دي سيتر مضاد غير التبادلي

لخضر صك²⁹ ومختار فالك³⁰ ومصطفى مومني^{31,32,33}

Pauli Oscillator under Magnetic Field in Noncommutative Anti-deSitter Space

L. Sek, M. Falek and M. Moumni

تاريخ الإرسال: 06 نوفمبر 2021

تاريخ القبول: 16 نوفمبر 2021

extended uncertainty principle originating from a non-commutative Anti-deSitter space. We use the Nikiforov-Uvarov method to solve the system and to obtain analytical expressions for both the energy eigenvalues and the eigenfunctions.

Key-words: Pauli Oscillator, Magnetic, deSitter Space.

المدخل Introduction: في السنوات الأخيرة، يوجد اهتمام متزايد في تقليص الفجوة الموجودة بين في نظرية المجال الكمي ونظرية النسبية العامة وهما الركيزتان الأساسيتان للفيزياء الحديثة، وقد تم اقتراح العديد من السيناريوهات لحل التباين في تفسير التفاعلات الموجودة بينهما. ونذكر من بين هذه الجهود توسيع نظرية المجال الكمومي إلى الزمكان المنحني، وهو أول تقريب لنظرية الجاذبية الكمومية. في هذه الحالة، قد يحل ما يسمى بمبدأ عدم التعيين الموسع (Extended Uncertainty Principle اختصارا EUP) ليحل

الملخص Abstract: ندرس تحليليا معادلة باولي للهزاز التوافقي في فضاء ثنائي الأبعاد تحت تأثير حقل مغناطيسي. ونعتبر وجود حد أدنى للأطوال ينتج من مبدأ عدم التعيين الموسع في الزخم (أو كمية الحركة) صادر عن فضاء من نوع دي-سيتر المضاد مع إضافة الخاصية غير

التبادلية للإحداثيات في هذا الفضاء. نستخدم طريقة نيكيفوروف و إيفاروف لحل معادلة النظام- ليتم الحصول على العبارات التحليلية لكل من القيم الذاتية للطاقة ودوال الموجة الذاتية. الكلمات المفتاحية: هزاز باولي، مغناطيس، فضاء دي سيتر.

ABSTRACT

We study analytically the Pauli equation for a harmonic oscillator in two dimensions under the influence of a uniform magnetic field. We consider the existence of minimum length as a consequence of an

²⁹Laboratory of Photonic Physics and Nanomaterials, University of Biskra, Algeria

³⁰ibid

³¹ibid

³²PRIMALAB, University of Batna1, Algeria

³³Corresponding author: m.moumni@univ-biskra.dz

لكتابة نماذج فضاءات (AdS) لمعادلة شرودينجر، وقد مكنت هذه الطريقة من إيجاد الحل الدقيق لمعادلة شرودينجر في فضاء كيفي الأبعاد لجسيم حر وكذلك للهزاز التوافقي [6]. إننا نجد في السنوات الأخيرة قدرا متزايدا من الاهتمام في دراسة الحلول الدقيقة لهذا النوع من المسائل في الحالة العادية [7-10] وكذلك في سياق ميكانيكا الكم المشوهة بمبدأ عدم التعيين المعمم (Generalized Uncertainty Principle اختصارا GUP)، ونذكر هنا دراسة معادلة شرودينجر في حالة الكمون الكولومبي مع حد أدنى للأطوال، سواء في بعد واحد [11-13] أم في ثلاثة أبعاد [14-16].

من جهة أخرى، حظي الفضاء غير التبادلي باهتمام متزايد في نظريات المجال والنظريات الوترية (String theory) [17]. كان سنايدر (Snyder) أول من شرح مبدئياً عدم التغيير بين إحداثيات الزمان والمكان [18] ويعطي هذا المبدأ سيناريوهات محفزة في سلسلة نظريات توحيد التفاعلات المسماة النظرية M [19-20] وكذلك الأمر في علم الكونيات الحديث [21-23]. يمكن العثور على دراسات مكثفة تعني بشأن التكامل بين العلاقات غير التبادلية لميكانيكا الكم العادية والهندسة الكلاسيكية [24-26]. يضاف إلى ذلك أن تغيير العلاقات العادية وعلاقات عدم التعيين المستوحاة من

سنقوم في عملنا هذا بدمج هذه الظواهر أي فضاء (AdS) والفضاء غير التبادلي في إطار معادلة باولي (Pauli) لهزاز توافقي تحت تأثير

محل مبدأ هايزنبرغ (Heisenberg) المعتاد، ويتميز هذا المبدأ الموسع بشكل أساسي بوجود مقياس طول أدنى من رتبة ثابت بلانك (Planck) [1-2]. يهدف هذا الحد الأدنى للأطوال إلى إحداث قطع للطول عند القيم متناهية الصغر بحيث لا نحصل على حدود متباعدة للخصائص الفيزيائية، والذي يشكل أحد أكبر المشكلات في فيزياء الحقول سواء الكمية أم الجاذبية.

لا يوجد سوى عدد قليل من الحلول الدقيقة المتاحة في سياق نظرية الكم المشوهة باستخدام EUP. إن قائمة المشكلات التي تم حلها تحليليا محدودة للغاية على مستوى ميكانيكا الكم النسبية؛ على سبيل المثال، تم دراسة هزاز ديراك (Dirac) وهزاز كلاين-غوردن (Klein-Gordon) أحادية البعد في فضاء دي-سيتر المضاد (Anti-deSitter Space اختصارا AdS) في المرجع [3]. أما في ظل وجود طول أدنى ناتج عن EUP، فقد تمت دراسة هزاز ديراك ثلاثي الأبعاد في [4] والحل الدقيق لهزاز بوزوني (Bosonic Oscillator) في بعد واحد يخضع لتأثير مجال كهربائي موحد في فضاء AdS أيضاً [5]. بالنسبة للحالة غير النسبية، فهي أيضاً ذات أهمية كبيرة ولا تزال غير مستكشفة نظراً لعدم إمكانية اشتقاق معادلة شرودينجر (Schrödinger) غير النسبية من معادلة كلاين-فوك-غوردن (Klein-Fock-Gordon) المتغيرة نسبياً. لكن يمكننا تجاوز هذه المحدودية باستخدام صيغة (EUP) نظرية الأوتار والجاذبية الكمومية والنسبية الخاصة لا يزال محور بحث مثير للغاية في السنوات الأخيرة [27-28].

$$\begin{aligned}[L_i, P_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} P_k, \\ [L_i, X_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} X_k, [L_i, L_j] \\ &= i\hbar \epsilon_{ijk} L_k\end{aligned}$$

يتميز نموذج AdS بجبر مشوه به حد أدنى للأطوال ويؤدي إلى علاقات هايزنبرغ المعدلة التالية:

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \lambda (\Delta X_i)^2)$$

حيث اخترنا الحالات التي تحقق العلاقة $\langle X_i \rangle = 0$

للتبسيط، نفرض وجود خواص متماثلة المناحي أو الاتجاهات $X_i = X$ ، فإن العلاقات السابقة لنموذج AdS تعطي حداً أدنى للزخم (أو كمية الحركة):

$$(\Delta P_i)_{min} = \hbar \sqrt{\lambda}$$

في الأجزاء التالية، سيتم استخدام المؤثرات غير التبادلية X_i و P_i لتحقيق جبر (AdS). يمكن عندها الحصول على الحلول الدقيقة لمعادلة باولي المشوّهة في فضاء ثنائي البعد مع (EUP)، وهذا بتمثيل هذه المؤثرات بدلالة نظيراتها الاعتيادية x_i و p_i التي تحقق علاقات التبادل العادية في فضاء الموضع. يتم هذا الانتقال بين الحالات العادية ونظيراتها المشوّهة من خلال التحويلات التالية:

بحيث يكون مجال تغير x هو $-\infty$ إلى ∞ الذي يعطي المجال العادي للإحداثيات الكارتيزية $-\infty$ إلى ∞ عند غياب التشوه أي $\lambda = 0$.

II. طريقة نيكيفوروف-إيفاروف:

حقل مغناطيسي في بعدين وتكون فصوله كما يلي: نقدم في القسم الثاني تحليلاً لنموذج (AdS) بينما نوضح في القسم الثالث طريقة نيكيفوروف - إيرانوف (Nikiforov-Uvarov) اختصاراً (NU) المستخدمة في حل معادلة النظام. ثم نعرض في قسمه الرابع الحسابات الدقيقة لكل من القيم الذاتية للطاقة والقيم الذاتية لدوال الموجة. سنعطي الملاحظات الختامية في القسم الخامس. ا. عرض للعلاقات المشوّهة في ميكانيك الكم في الحالات ثلاثية الأبعاد، يتم تحديد جبر هايزنبرغ المشوه الذي يؤدي إلى EUP للفضاء AdS من خلال علاقات التبديل التالية [29-30]:

$$\begin{aligned}[X_i, X_j] &= 0, \\ [P_i, P_j] \\ &= -i\hbar \lambda \epsilon_{ijk} L_k, [X_i, P_j] \\ &= i\hbar (\delta_{ij} - \lambda X_i X_j)\end{aligned}$$

ويمثل λ ثابت التشوه وهو موجب ومتناهي الصغر. مثلاً، في سياق الجاذبية الكمّية، يعتبر λ مرتبطاً بمعامل السلم للكون المتسع ويتناسب مع الثابت الكوني $\lambda = -3a^{-2}$ حيث a نصف قطر AdS [29].

يتميز مؤثر العزم الحركي L_K بالعلاقات التالية [29-30]:

$$L_K = \epsilon_{ijk} X_i P_j$$

وهو يتوافق مع الجبر المعتاد لمؤثرات العزم الحركية:

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1 - \lambda r^2}} \quad (6-a)$$

$$P_i = -i\hbar \sqrt{1 - \lambda r^2} \partial x_i \quad (6-b)$$

$$k = \Lambda - \pi'(s)$$

لنحصل على $\pi(s)$ بصيغة حلّ لمعادلة تربيعية:

$$\pi(s) = \left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tau}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma} + \sigma k}$$

تجدر الإشارة إلى أنه عند حساب $\pi(s)$ ، يكون تحديد المعامل k هو النقطة الأساسية، ويتم إيجاده من خلال الإشارة إلى أن الحدّ الموجود أسفل الجذر التربيعي في المعادلة (13) يجب أن يكون مربعا تاما لكثير حدود، مما يعطي معادلة عامة تربيعية للمعامل k . نستخدم المعادلة (10) وعلاقة رودريغيز (Rodriguez) لتقييم الحلول المعبرة عن كثيرات الحدود $y_n(s)$:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)]$$

حيث C_n هو ثابت التنظيم وتحقق الدالة $\rho(s)$ العلاقة التالية:

$$\frac{d}{ds} [\sigma(s) \rho(s)] = \tau(s) \rho(s)$$

تشير هذه المعادلة الأخيرة إلى كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية التي تتميز بالعديد من الخصائص المهمة ومنها خاصية التعامد التي تعبر عنها العلاقة التالية:

$$\int_a^b y_n(s) y_m(s) \rho(s) ds = 0 \text{ if } m \neq n$$

لقد تم استحداث طريقة نيكيفوروف-إيفاروف (NU) أساسا لحل المعادلات التفاضلية الهندسية الفائقة. حيث تمكّنا هذه الطريقة من تحويل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية إلى شكل المعادلات المعبرة عن الدوال الهندسية الفائقة (Hypergeometric function)، وهذا باستعمال تحويل للإحداثيات:

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0$$

حيث تكون $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ كثيرات الحدود من الدرجة الثانية كحد أقصى، وتكون درجة كثير الحدود $\tilde{\tau}(s)$ أقل تماما من 2 [32-31]. إذا استخدمنا التحليل أدناه:

$$\psi(s) = \phi(s) y(s)$$

تصبح المعادلة (7) كما يلي [32]:

$$\sigma(s) y''(s) + \tau(s) y'(s) + \Lambda y(s) = 0$$

حيث:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \& \pi(s) \\ &= \sigma(s) \frac{d}{ds} (\ln \phi(s)) \end{aligned}$$

ونعرف الحدّ Λ بالشكل:

$$\Lambda_n + n\tau' + \frac{n(n+1)}{2} \sigma'' = 0 \& n \in \mathbb{N}$$

يتم إيجاد القيم الذاتية للطاقة من المعادلة أعلاه، ويتم ذلك أولا بتحديد القيم Λ_n وكذلك عبارة $\pi(s)$ عن طريق تعريف المعامل:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{y}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

حيث يرمز $\theta^{\mu\nu}$ إلى موتر (Tensor) ضد متناظر ويلعب نفس دور الثابت $\hbar$ في ميكانيكا الكم المعتادة.

للحفاظ على واحدية (Unitarity) النظرية وهو شرط أساسي في كل نظرية فيزيائية لا تعارض مبدأ السببية (Causality)، نختار

$$\begin{aligned}\theta_{12} &= -\theta_{21} = \theta_3 \\ &= \theta ; \vec{r} \\ &\rightarrow \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar}\end{aligned}$$

يمكننا الآن الانتقال إلى معادلة شرودينجر التي تكتب كما يلي:

$$\begin{aligned}\left[\frac{p^2}{2m} + V(r) \right] \Psi(r) \\ = E\Psi(r)\end{aligned}$$

حيث $V(r)$ هو عبارة الطاقة الكامنة التي تعبر في حالتنا عن كمون الهزاز التوافقي:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

نضيف إليها الطاقة الناتجة عن كمون شعاعي $\vec{A}$ باستعمال كتابة ديراك $P^2 = \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$ ونعتبره يحقق عيار كولومب (Coulomb) بحيث نكتبه بدلالة الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ كما يلي:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \\ &= \frac{B}{2} (-y, x, 0)\end{aligned}$$

III. معادلة شرودينجر في وجود الحقل المغناطيسي:

قبل الشروع في حل معادلة شرودينجر نقوم بتعريف بعض العلاقات الخاصة بالفضاء غير التبديلي.

يتميز الفضاء غير التبديلي بأن مؤثري الإحداثيات الخاصة به تكون غير تبديلية مخالفة في ذلك خصائص إحداثيات الفضاء العادي. وتفي الإحداثيات في هذه الحالة بالعلاقات التالية:

$\theta^{0\nu} = 0$ ، مما يعني أن الزمن يبقى كمعامل وأن عدم التبديل يؤثر فقط على المؤثرات الفضائية فقط دون الزمنية. في حالتنا هذه، يعطى جداء أي دالتين مكافئاً لجداء مويال (Moyal product) التالي:

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) \\ = \exp \left[\frac{i}{2} \theta_{ab} \partial x_a \partial y_b \right] f(x) g\end{aligned}$$

حيث f و g دالتان كفييتان ويفترض أنهما قابلتان للتفاضل بلا حدود.

يمكن التعبير عن مؤثري الانتقال والزخم في هذا النموذج بالتحويلين [40-42]:

$$\begin{aligned}x_i &\rightarrow x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j ; p_i \\ &\rightarrow p_i, i = 1, 3\end{aligned}$$

نختار في دراستنا هذه موتر $\theta^{\mu\nu}$ ثابتاً ونختار المعلم بحيث يكون لدينا:

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ijk} \theta_k \text{ and } \theta_3 = \theta$$

يمكننا عندها إعادة كتابة التحويل (19) إلى الشكل المكثف التالي:

وكذلك كون الفضاء من نوع دي سيتر المضاد وهذا باستخدام التحويلات الموضحة في العلاقتين (5b, 6a).
تصبح معادلة شرودينجر حينها كما يلي:

يمكننا الآن تعويض عبارة P^2 في معادلة شرودينجر (22) ويلزمنا أن نأخذ بعين الاعتبار الخاصية غير التبادلية للفضاء التي تدرج باستعمال التحويل المبين في العلاقة (20)

$$\left[\left(\sqrt{1 - \lambda r^2} \vec{p} - \frac{e}{2c} \vec{B} \right) \times \left(\frac{\vec{r}}{\sqrt{1 - \lambda r^2}} + \frac{\vec{\theta} \times \sqrt{1 - \lambda r^2} \vec{p}}{2\hbar} \right)^2 + m^2 \omega^2 \left(\frac{\vec{r}}{\sqrt{1 - \lambda r^2}} \right)^2 \right] \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (25)$$

بعد تبسيط هذه المعادلة (25) نحصل على الشكل التالي:

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \left(m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4c^2} - \frac{eB\theta m\omega\lambda}{2c} - m\omega\hbar\lambda \right) \left[(1 - \lambda r^2) p^2 + \eta \frac{r^2}{1 - \lambda r^2} + i\hbar\lambda(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \frac{\beta}{\alpha} L_z - \varepsilon \right] \psi(\vec{r}) = 0$$

حيث تعطى مختلف المعاملات المتواجدة بها بالعبارات التالية:

$$\beta = \frac{eB}{c} + m\omega\lambda\theta + \frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar} + \frac{eB\theta^2 m\omega}{4c\hbar} \lambda + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2 \hbar}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha} \left(2mE + \frac{eBm\omega}{c} \theta + 2m\omega\hbar \right)$$

$$\left[\left(\sqrt{1 - \lambda r^2} \frac{d}{dr} \right)^2 + \frac{1 - \lambda r^2}{r^2} \left(r \frac{d}{dr} - l \right) - \frac{\eta r^2}{\hbar^2 (1 - \lambda r^2)} + \epsilon \right] R(r) = 0$$

حيث:

$$\epsilon = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{eBm\omega\theta}{c\hbar^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{l\beta}{\hbar} \right)$$

نقوم بإجراء التحويل التالي:

$$R(\rho) = \rho^\mu g(\rho); \quad \rho = \sqrt{1 - \lambda r^2}$$

لنحصل على الشكل التالي للمعادلة (32):

تعطي هذه العلاقة حلين ممكنين ويلزمنا اختيار الحل الذي يحقق عدم تفرد الحلول الفيزيائية. بالرجوع إلى العلاقة (34)، نرى أن الحل المقبول هو الحل الموجب تماما. لذا نكتب:

$$\mu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\eta}{\hbar^2 \lambda^2}}$$

نضع:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{\lambda} - 2\mu \quad 3)$$

نلاحظ ان المعادلة (35) تتضمن ثلاث نقاط مفردة (Singularities) وهي $\rho = 0, 1, -1$ ولذا يلزمنا استعمال التحويل التالي $S = 2\rho^2 - 1$ لكتابتها على شكل معادلة تحتوي على عدد أقل من التفردات:

$$\alpha = 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2}$$

بالرجوع إلى شكل المعادلة أعلاه (26)، من الأفضل استعمال الإحداثيات القطبية (r, φ) . كما أن وجود الحد L_z بشكل منفصل بها يمكننا من فصل الحل الزاوي الخاص به ويحتوي هذا الأخير على العدد الكمي المداري l :

$$\psi(r, \varphi)$$

$$= \exp(il\varphi) R(r); \quad l \in \mathbb{N}$$

وبالتالي تصبح المعادلة (26) من الشكل التالي:

$$\left[(1 - \rho^2) \frac{d^2}{d\rho^2} + 2 \left(\frac{\mu}{\rho} - (\mu + 1)\rho \right) \frac{d}{d\rho} - \frac{l^2 \rho^2}{1 - \rho^2} + \frac{\epsilon}{\lambda} - 2\mu \right] g(\rho) = 0$$

ينتج هذا الشكل المبسط للمعادلة من حرية اختيار المعامل μ في العبارة (34)، والذي نختاره يحقق الشرط الموالي:

$$\mu(\mu - 1) - \frac{\eta}{\hbar^2 \lambda^2} = 0 \quad 4)$$

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= 1 - s^2; \tilde{\sigma}(s) \\ &= \frac{1}{4}[-(l^2 \\ &\quad + \epsilon')s^2 - 2l^2s \\ &\quad + (\epsilon' - l^2)] \\ \tilde{\tau}(s) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left(\mu + \frac{3}{2}s\right)\end{aligned}$$

نتبع الآن خطوات الطريقة المبينة سابقا وبعد التعويض في المعادلة (13)، نجد:

يحدد المعامل k من اعتبار الحدّ تحت الجذر مربعا تاما كما ذكرناه سابقا، ونجد عندما قيمتين:

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\epsilon'}{4} + \frac{l}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right); k_2 \\ &= \frac{\epsilon'}{4} \\ &\quad - \frac{l}{2}\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

بالنسبة للحلول $\pi(s)$ فإننا نتحصل على الحلول التالية:

$$\begin{aligned}\pi(s) \\ &= \begin{cases} \pi_{1,3} = \frac{1}{2}[(2\mu \mp l + 1)s \\ \pi_{2,4} = \pm \frac{l}{2}(s \end{cases}\end{aligned}$$

حيث ترتبط القيمتان π_1 و π_2 بالحل k_1 وأما π_3 و π_4 ، فتتعلقان بالحل k_2 .

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d^2}{ds^2}\right. \\ &\quad + \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\right) - \left(\mu + \frac{3}{2}s\right)}{1 - s^2} \frac{d}{ds} \\ &\quad \left. - \frac{(l^2 + \epsilon')s^2 + 2l^2s - (\epsilon' - 3l^2)}{4(1 - s^2)^2}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

لنجد معادلة تكتب على شكل (7)، وبالتالي يمكننا استخدام طريقة نيكيفوروف-إيفاروف لحلها مع كثيرات الحدود التالية:

$$\begin{aligned}\pi(s) &= \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\right)(s - 1)}{2} \\ &\quad \pm \left[\frac{1}{2} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + l^2 - (4k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \epsilon' \right) s^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - l^2 \right) s \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + l^2 - (4k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \epsilon' \right) \right) \right]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_n &= k^2 - \frac{l}{2} \\ &= n \left(n + \mu + l + \frac{1}{2} \right), n \\ &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

اذن بالعودة إلى العبارات التي تربط بين مختلف المعاملات بعضها ببعض وبين قيم الطاقة وهي (27) و (28) و (29) و (30) و (33) و (37) و (38)،

نجد العبارة النهائية للقيم الذاتية للطاقة:

العادية عند إزالة معاملي التشوهات أي بوضع $\lambda = 0$ و $\theta = 0$

ننتقل الآن إلى الدوال الذاتية للموجة حيث يلزمنا بداية أن نأخذ عبارة π_4 من عبارة الجزء $\phi(s)$ والذي يعرف من العلاقة (10) كما يلي:

$$\phi(s) = (1 - s)^{l/2}$$

بالاعتماد على شكل عبارة $\sigma(s)$ في (40)، وعلاقة رودريغز (14) نجد الحد $y(s)$:

$$y_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [(1 - s^2)^n \rho(s)]$$

$$\rho(s) = (1 + s)^{\left(\mu - \frac{1}{2}\right)} (1 - s)^l$$

نلاحظ أن المعادلة (48) هي عبارة كثيرات حدود جاكوبي (Jacobi) [43]، فنكتب:

$$y_n(s) \equiv P_n^{(l, \mu - 1/2)}(s)$$

وبالتالي يمكن كتابة $g(s)$ كما يلي:

يجب على الحلول المتحصل عليها أن تعطي الحلول المعروفة عند غياب التشوه ($\lambda \rightarrow 0$)، لذا الحل المناسب هو π_4 :

$$\begin{aligned}\tau(s) &= - \left(\mu + \frac{3}{2} + l \right) s \\ &\quad + \left(\mu - \frac{1}{2} - l \right)\end{aligned}$$

وبالتالي نجد عبارة Λ_n من المعادلتين (11) و (12):

$$\begin{aligned}E &= \left[(2n + l + 1) \hbar \sqrt{\alpha \left(\left(\omega - \frac{\tilde{\omega}}{4} \theta - \frac{\hbar \lambda}{2m} \right) + \alpha \frac{\lambda \hbar^2}{2m} (4n(n + l + 1) + 2l + 1) \right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{ml\theta}{2} \left((\omega - \tilde{\omega})^2 + \frac{\omega \hbar}{m} \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar} \theta \right) \lambda \right) - \hbar(\omega + l\tilde{\omega}) \left(1 + \frac{m\omega}{\hbar} \theta \right) \right]\end{aligned}$$

مع اعتبار $\tilde{\omega} = eB/2mc = \omega_c/2$ حيث ω_c هو تردد المسرع الدوراني (Cyclotron). نشير هنا إلى أن هذه العبارة تعطي عبارة الطاقات

حيث يعرف المعامل μ في (38)، و C_n هو ثابت التّنينيم (Normalization Constant) الذي يضمن أن قيمة احتمال إيجاد النّظام في كل الحالات الممكنة هو مساو للوحدة [30]:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{2^{l+1} \pi r dr}{(1 - \lambda r^2)^{1/2}} R^*(r) R(r) = 1$$

لإيجاد قيمة هذا الثّابت وبالتالي كتابة العبارة الكاملة والنّهائية لدوال الموجة (51)، نستخدم

$$\Rightarrow C_n = \sqrt{\frac{\lambda}{2^l \pi} \frac{n! \left(2n + l + \mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \mu + \frac{1}{2}\right)}}$$

وهو ما يعطينا الصيغة النّهائية للدوال الذاتية (أو دوال الموجة) للنظام عند تعويضنا هذه العبارة في العلاقة (51).

الخلاصة Conclusion: في هذا العمل قمنا بدراسة معادلة شرودينجر ثنائية الأبعاد في وجود كمون الهزاز التّوافقي مرفقا بتأثير حقل مغناطيسي خارجي في إطار ميكانيك الكم المشوّهة في فضاء دي سيتر المضاد (AdS) ومع إضافة الخاصية غير التبادلية للفضاء.

استعملنا طريقة نيكيفوروف-إيفاروف لحل معادلة النّظام حيث تمكنا من إيجاد الصيغ التحليلية لكل من القيم الذاتية للطاقة

$$g(s) = C_n (1 - s)^{l/2} P_n^{(l, \mu-1/2)}(s)$$

ويكون الشّكل العام لدالة الموجة بدلالة المتغيرين القطبيين r و φ مستنتجا من العبارات (14) و (31) و (34) و (50) ليعطى بالعبارة:

$$\Psi(r, \varphi) = C_n 2^{l/2} e^{il\varphi} (1 - \lambda r^2)^{\mu/2} (\lambda r^2)^{l/2} P_n^{(l, \mu-1/2)} - 2\lambda r^2$$

خصائص كثيرات حدود جاكوبي وبالتحديد شرط التّعامد بينها [37]:

$$\int_{-1}^1 dy (1-y)^a (1+y)^b \left[P_n^{(a,b)}(y) \right]^2 = \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+n+1) \Gamma(b)}{n! (a+b+2n+1) \Gamma(a+1)}$$

لنجد عبارته النّهائية كما يلي:

والدوال الذاتية للموجة وكتبنا هذه الأخيرة بدلالة كثيرات حدود جاكوبي.

تبين عبارات الطّاقات الذاتية ونظيراتها الدوال الموجة وجود تصحيحات تضاف إلى العبارات الممثلة للحالة العادية (أي دون تشوهات) وترتبط هذه التّصحيحات بمعاملي التّشوه λ و θ المعبرين عن مبدأ عدم التّعين الموسع والخاصية غير التبادلية للفضاء على التّوالي. يمكن التّحقق من هذه العبارات

بحساب نهاياتها عند إزالة التشوهات حيث نجد
العبارات المميزة للفضاء العادي.

المراجع References

- [1].S. Mignemi, *Extended uncertainty principle and the geometry of (anti)-de Sitter space*, Mod. Phys. Lett. A **25**, 1697 (2010)
- [5]. *in the presence of minimal uncertainty in momentum*. Few-Body Syst. **60**, 36 (2019)
- [6].M. Hadj Moussa and M. Merad, *Relativistic oscillators in generalized Snyder model*. Few-Body Syst. **59**, 44 (2018)
- [7].B. Hamil, M. Merad and T. Birkandan, *Applications of the extended uncertainty principle in AdS and dS spaces*. Eur. Phys. J. Plus **134**, 278 (2019)
- [8].J.A. Reyes and M. del Castillo-Mussot, *1D Schrödinger equations with Coulomb-type potentials*. J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 2017 (1999)
- [9].Y. Ran, L. Xue, S. Hu and R.-K. Su, *On the Coulomb-type potential of the one-*
- [2].M. Falek, N.Belghar and M. Moumni, *Exact solution of Schrödinger equation in (anti-) de Sitter spaces for hydrogen atom*, Eur; Phys. J. Plus **135**, 335 (2020)
- [3].B. Hamil and M. Merad, *Dirac and Klein–Gordon oscillators on anti-de Sitter space*. Eur. Phys. J. Plus **133**, 174 (2018)
- [4].B. Hamil and M. Merad, *Dirac equation dimensional Schrödinger equation*. J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 9265 (2000)
- [10]. A.N. Gordeyev and S.C. Chhajlany, *One-dimensional hydrogen atom: a singular potential in quantum mechanics*. J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 6893 (1997)
- [11]. H.N.N. Yopez, C.A. Vargas and A.L.S. Brito, *The one-dimensional hydrogen atom in momentum representation*. Eur. J. Phys. **8**, 189 (1987)
- [12]. P. Pedram, *A note on the one-dimensional hydrogen atom with minimal length uncertainty*. J. Phys. A **45**, 505304 (2012)
- [13]. K. Nouicer, *Coulomb potential in one dimension with minimal length: a path integral approach*. J. Math. Phys. **48**, 112104 (2007)

-
- [14]. T.V. Fityo, I.O. Vakarchuk and V.M. Tkachuk, *One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length*. J. Phys. A **39**, 2143 (2006)
- [15]. F. Brau, *Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom*. J. Phys. A **32**, 7691 (1999)
- [16]. S. Benczik, L.N. Chang, D. Minic and T. Takeuchi, *Hydrogen-atom spectrum under a minimal-length hypothesis*. Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005)
- [17]. R. Akhoury and Y.P. Yao, *Minimal length uncertainty relation and the hydrogen spectrum*. Phys. Lett. B **572**, 37 (2003)
- [18]. M.Falek and M. Merad, *DKP Oscillator in a Noncommutative Space*, Comm.Theor. Phys. **50**, 587 (2008)
- [19]. H. S. Snyder, *Quantized space-time*, Phys. Rev. **71**, 38 (1947)
- [20]. T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, *M theory as a matrix model: a conjecture*, Phys. Rev. D **55**, 5112–5128 (1997)
- [21]. N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **1999**, 32 (1999)
- [22]. F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele, and M. Peloso, *Cosmological perturbations and short distance physics from noncommutative geometry*, JHEP **2002**, 49 (2002)
- [23]. R. Brandenberger and P.-M. Ho, *Noncommutative spacetime, stringy spacetime uncertainty principle, and density fluctuations*, Phys. Rev. D **66**, 023517 (2002)
- [24]. B. Vakili, N. Khosravi and H. R. Sepangi, *Bianchi spacetimes in noncommutative phase space*, Class. Quant.Grav. **24**, 931 (2007)
- [25]. J. Gamboa, M. Loewe and J. C. Rojas, [28]. B. Mirza and M. Mohadesi, *The Klein-Gordon and the Dirac oscillators in a noncommutative space*, Comm. Theor. Phys. **42**, 664 (2004)
- [26]. *Noncommutative quantum mechanics*, Phys. Rev. D **64**, 067901 (2001)
- [27]. M. Przanowski and J. Tosiek, *The Weyl-Wigner-Moyal formalism. III. The generalized Moyal product in the curved phase space*, Acta Phys. Pol. B **30**, 179 (1999)
- [29]. D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, *Can spacetime be probed below the string size?* Phys. Lett. B **216**, 41 (1989)

- [30]. G. Amelino-Camelia, N. E. Mavromatos, J. Ellis and D. V. Nanopoulos, *On the space-time uncertainty relations of Liouville strings and D-branes*, Mod. Phys. Lett. A **12**, 2029 (1997)
- [31]. S. Mignemi, *Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space*, Class. Quant. Grav. **29**, 215019 (2012)
- [32]. M.M. Stetsko; *Dirac oscillator and nonrelativistic Snyder–de Sitter algebra*, J. Math. Phys. **56**, 012101 (2015)
- [33]. B. Bolen and M. Cavaglià; *(Anti–)de Sitter black hole thermodynamics and the generalized uncertainty principle*, Gen. Relativ. Gravit. **37**, 1255 (2005)
- [34]. H. Egrifes, D. Demirhan and F. Buyukkili, *Exact solutions of the Schrodinger equation for two “deformed” hyperbolic molecular potentials*, Phys. Scripta **59**, 195 (1999)
- [35]. A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhauser, Basel, 1988)
- [36]. S. Jing, F. Zuo and T. Heng, *Deformation quantization of noncommutative quantum mechanics*, JHEP **0410**, 049 (2004).
- [37]. J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J.C. Rojas, *Noncommutative Quantum Mechanics: The Two-Dimensional Central Field*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2555 (2002)
- [38]. J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J.C. Rojas, *The Landau problem and noncommutative quantum mechanics*, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2075 (2001)
- [39]. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic, New York, 1980).