



طريقة لحساب الأمواج الموجهة في ألياف بصرية غير دائرية المقطع في حالة التوجيه الضعيف

بورغدة عبد الوهاب¹، رزقي حياة² و شوتري عبد العزيز³
المدرسة العليا للأساتذة - القبة، الجزائر،
مخبر المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وتاريخ الرياضيات.

ملخص: توجد عدة نماذج رياضية وطرق عددية لحساب الأمواج الموجهة في ألياف بصرية ذات مقاطع بأشكال مختلفة وخاصة الدائرية منها لكن التطبيقات إقتصرت في غالب الأحيان على الألياف الدائرية المقطع. في هذا العمل بعد اختيار النموذج الرياضي وتبرير اختياره مقارنة مع النماذج الأخرى، سنركز على كيفية حساب الأمواج الموجهة في ألياف بصرية ذات مقاطع غير دائرية الشكل كالمثلثية والمضلعة لما لها من أهمية عملية في صناعة الألياف البصرية.

الكلمات المفتاحية: الألياف البصرية، الموجات الموجهة، التوجيه الضعيف، الحقل الكهرومغناطيسي، معادلات ماكسويل، العناصر المنتهية.

Abstract: There are several mathematical models and numerical methods for calculating guided modes propagating in optical fibers with sections of different shapes, especially circular ones, but applications are often limited to these last fibers. In this work, after selecting the mathematical model and justifying its choice in comparison with other models, we will focus on how to calculate guided modes that may propagate in non-circular section fibers such as triangular and polygon ones. We are interested in these fibers because of their possible practical use in manufacturing optical fibers.

1 مقدمة

الليف البصري يشير إلى الوسط والتكنولوجيا المرفقة لنقل معلومات كالنبضات الضوئية من خلال خيط أو ليف زجاجي أو بلاستيكي. يمكن لحزمة الألياف البصرية أن تتكون من بضعة ألياف ويمكن لعدد الألياف فيها أن يكون كبيرا. يمكننا القول أن الليف البصري عبارة عن بنية عازلة كهربائيا رقيقة جدا تدعى اللب محاطة بطبقة مشابهة تدعى بالغمد (انظر الشكل 1 (أ)) وتوجد طبقة خارجية تشكل غلافا لوقاية الليف من المؤثرات الخارجية.

¹ e-mail:bouregghda@ens-kouba.dz

² e-mail:rezgui@ens-kouba.dz

³ e-mail:choutri@ens-kouba.dz

تقوم الألياف البصرية بنقل البيانات على شكل جزيئات ضوئية أو فوتونات على شكل نبضات. لكل من لب وغمد الليف البصري معامل انكسار مختلف يجعل الضوء الوارد بزاوية معينة ينحني. عندما يتم إرسال إشارات الضوء من خلال ليف ضوئي، تنعكس عن اللب والغمد في سلسلة من الانعكاسات المتعرجة وتنسجم في عملية تسمى الانعكاس الداخلي الكلي. نذكر بأن معامل الانكسار هو حاصل قسمة سرعة الضوء في الفراغ (299792.458 كم/ثانية) على سرعة الضوء في وسط معين، فهو يقيس مقدار انكسار الضوء في الوسط المحدد.

لا تنتقل الإشارات الضوئية بسرعة الضوء بسبب عدم نقاء الطبقات الزجاجية أو البلاستيكية المكونة للليف، بل تنتشر بحوالي 30% أبطأ من سرعة الضوء. لتجديد أو تقوية إشارة الضوء أثناء إنتشارها في الليف الضوئي نحتاج أحيانا إلى أجهزة مكررة للإشارة على مسافات متباعدة وذلك بتحويلها إلى إشارات كهربائية ثم معالجتها وإعادة بعثها على شكل إشارة ضوئية من جديد.

2 النمودج الفيزيائي (Physical Model)

الليف الضوئي كما سبق ذكره عبارة عن بنية مكونة من لب دقيق محاط بغمد. يفترض، بغية إجراء دراسة رياضية تحليلية وعددية لانتشار الضوء فيه، أن يكون طوله كبيرا جدا وبالتالي يمكن اعتباره رياضيا غير منته في اتجاه الانتشار وكذلك الغمد غير منته في كل الاتجاهات العمودية على محور الانتشار. هذه الفرضيات، المعهودة في أدبيات الضوئيات، تعتبر طبيعية لكون أبعاد اللب صغيرة جدا بالمقارنة بأبعاد الغمد من جهة، ومن جهة أخرى طول الموجة الضوئية صغير جدا بالمقارنة بطول الليف بالإضافة إلى كون الحقول الكهرومغناطيسية للموجات الضوئية تتناقص أسيا خارج لب الليف.

يمكن تمثيل مقطع عرضي لليف ضوئي (أنظر الشكل 1 (ب)) بمنطقتين: Ω و $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ ، ما يميز بين المنطقتين هو قيمة معامل الانكسار فيها. Ω عبارة عن مجموعة مفتوحة محدودة من المعلم $\mathbb{R}^2$ تمثل لب الليف و $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ تمثل غمد الليف. من الواضح أن هذه المناطق تكون معينة جيدا بمجرد معرفة صورة أو ملمح معامل انكسار الليف. معامل الانكسار يعرف عادة بتابع حقيقي n متعلق بمتغيرين (x, y) بحيث $n \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ و $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} n(x, y) > 0$. بالإضافة إلى ذلك، نفترض أن الألياف الضوئية التي تم اعتبارها هي ذات غمد متجانس أي أن

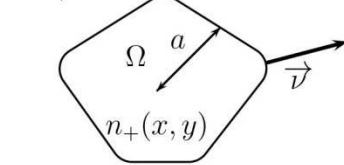
$$n(x, y) =: n_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}.$$

وهذا يعني أن معامل الانكسار يكون ثابتا خارج منطقة لب الليف البصري قيمته n_∞ . وعلاوة على ذلك، فمن المعروف في أدبيات الاختصاص (أنظر [1, 6, 11, 12]) أنه من أجل ضمان انتشار الأمواج الموجهة في الليف الضوئي، نفترض أن معامل الانكسار يحقق الشرط الآتي:

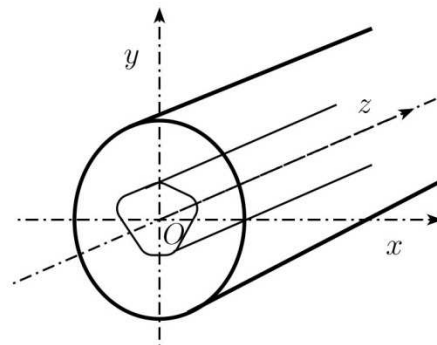
$$n_+ > n_\infty$$

$$n_+ = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} n(x, y)$$

$$n_\infty$$



(ب): مقطع عرضي في ليف بصري



الشكل 1: (أ) ليف بصري

3 المعادلات الرياضية (Mathematical Equations)

نهتم في هذا العمل بتعيين الموجات الموجهة التي يمكنها الانتشار في الألياف البصرية وهي الحلول غير المدومة لجملة معادلات ماكسويل "Maxwell"

$$(1) \quad \mathbb{R}^3 \text{ في } \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times E = -i\omega\mu H \\ \nabla \times H = i\omega\epsilon E \end{array} \right.$$

من الشكل

$$(2) \quad F(x, y, z) = F(x, y)e^{-i\beta z},$$

حيث:

• F يمثل E أو H و $\nabla \times F$ هو مؤثر $\text{rot } F$ (دوران الشعاع F).

• ϵ هي النفاذية الكهربائية المفترض أنها غير متعلقة بـ z .

• μ النفاذية المغناطيسية المفترض أنها ثابتة أي $\mu(x, y) = \mu_0$.

• β هي ثابت الانتشار وتعبر على سرعة الانتشار.

• ω هي التردد الزاوي.

• $E = (E_1, E_2, E_3)$ هو الحقل الكهربائي.

• $H = (H_1, H_2, H_3)$ هو الحقل المغناطيسي.

تعريف:

الموجة: عبارة عن حل متناسق بالنسبة للزمن ووفق وجهة الانتشار لجملة "ماكسويل" (1) من شكل المعادلة (2).

الموجة الموجهة: يقال عن موجة أنها موجهة إذا انتشرت بدون خمود وظلت طاقتها محدودة وحبيسة منطقة لب الليف أي أن:

$$\beta \in \mathbb{R} \text{ و } E, H \in (L^2(\mathbb{R}^2))^3$$

في هذه الحالة يقال أن الموجة موجهة في الاتجاه z .

التوجيه الضعيف: يقال أن شروط حالة التوجيه الضعيف محققة إذا كان العدد الموجي "التردد" k (الذي صيغته $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$) حيث ϵ_0 و μ_0 يمثلان النفاذية الكهربائية و المغناطيسية على التوالي في الفراغ، وهو من معطيات المسألة) كبيرا بما يكفي ومعامل انكسار كل من لب وغمد الليف الضوئي متقاربين جدا. في حالة الألياف الضوئية ذات الغمد المتجانس، تحت شروط التوجيه الضعيف، معامل الانكسار n يحقق ما يلي:

$$\exists a \in \mathbb{R}^{*+}; n(x) = n_{\infty}, \quad \forall x; |x| > a \quad \bullet \quad n \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2).$$

$$\bullet \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^2} n(x) > 0, \text{ حيث } x \text{ يمثل } (x, y)$$

تحت شروط التوجيه الضعيف، يمكن إثبات (أنظر [5, 13]) أن المركبات الطولية H_3, E_3 يمكن إهمالها والمركبات العرضية E_1, E_2, H_1 و H_2 هي حلول المسألة، ذات القيم الذاتية، السلمية الآتية:

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} \text{إيجاد } \lambda \in]0, V^2[\text{ و } u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ (} u \neq 0 \text{) بحيث:} \\ \mathbb{R}^2 \text{ في } -\Delta u + q(x)u = -\lambda u \end{array} \right|$$

حيث

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta^2 - k^2 n_\infty^2 \\ V^2 &= k^2 (n_+^2 - n_\infty^2) \\ q(x) &= -k^2 (n^2(x) - n_\infty^2) \end{aligned}$$

نذكر بأن $n(x) = n_\infty$ إذا كان $|x| \geq a$ حيث:• a هو وسيط ثابت يميز بعد مقطع لب الليف.• V هو التردد المنظم أو النظامي وهو معطى في المسألة.

في مقال صدر مؤخرا (أنظر [5]) نجد تبريرا رياضيا دقيقا لاستخلاص، في حالة التوجيه الضعيف، المسألة ذات القيم الذاتية السلمية انطلاقا من جملة معادلات "ماكسويل" في الحالة العامة. نجد أيضا في الأدبيات الكثير من الأعمال المتعلقة بالدراسة النظرية والعددية (أنظر [1, 6, 9, 12, 14]) لهذه المسألة ذات القيم الذاتية المطروحة في المعلم $\mathbb{R}^2$ كاملا. هناك نتائج حول وجود وعدد حلول المسألة المطروحة وارتباطها بالمواصفات الضوئية والهندسية. كما أن هناك عدة طرق لإيجاد هذه الحلول منها ما هو تحليلي في حالات خاصة كالأنابيب الضوئية ذات المقطع الدائري (أنظر [11, 13]) ومنها ما يعتمد على الطرق العددية لحل المسألة. في هذا الإطار نذكر الطريقة التكاملية والطريقة التي تعتمد على العناصر المنتهية ولكل طريقة نقاط قوتها وضعفها. الطريقة التكاملية (أنظر [4, 6, 8]) تعتمد على تمثيل تكاملي لحلول المسألة على حافة لب الليف وتبقى المسألة مطروحة على كل المعلم $\mathbb{R}^2$ ولكن بالمقابل على معامل الانكسار أن يكون ثابتا في غمد الليف وأيضا ثابتا في لبه. أما بالنسبة للطريقة التي تعتمد على العناصر المنتهية فهي عكس الأولى حيث يمكن لمعامل الانكسار أن يكون غير ثابت في لب الليف ولكن لا يمكن حساب حلول المسألة إلا على ميدان محدود من المعلم $\mathbb{R}^2$.

إذن عند حساب الأمواج الموجهة باستعمال طريقة العناصر المنتهية من خلال المسألة (3) تطرح إشكالية عدم محدودية مجال العمل وهو $\mathbb{R}^2$. هناك عدة طرق لتجاوز هذه العقبة من بينها:

1. نقتصر في الحساب على ميدان محدود Ω_R من الفضاء $\mathbb{R}^2$ حيث Ω_R ، في حالة المقطع الدائري، قرص نصف قطره R يشمل لب الليف وفي هذه الحالة نفرض أن $u/(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R) = 0$ علما أن u يتناقص أسيا عند الابتعاد عن اللب. في هذه الحالة نكتب المسألة بشرطها الحدي الذي يدعى بشرط ديركلت "Dirichlet" على النحو الآتي:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} \text{إيجاد } \lambda \in]0, V^2[\text{ و } u \in H^1(\Omega_R) \text{ (} u \neq 0 \text{) بحيث:} \\ \Omega_R \text{ في } -\Delta u + q(x)u = -\lambda u \\ S_R \text{ على } u = 0 \end{array} \right|$$

حيث S_R هو حافة الميدان Ω_R .

2. اقتصار الحساب على الميدان Ω_R بطريقة (أنظر [3]) تختلف عن الطريقة الأولى فيما يخص الشرط الحدي، حيث يعوض الشرط $u/(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R) = 0$ بشرط متعلق بسلسلة نشر فوريي "Fourier" لحل المسألة خارج الميدان المحدود Ω_R .

3. الطريقة المقترحة في هذا العمل (أنظر [7]) مثل سابقتها تعتمد على اقتصار حساب الحلول على ميدان محدود ويخالفهما في الشرط الحدي. الشرط الحدي المقترح في هذه الحالة هو شرط من نوع روبن "Robin" وهو شرط مزيج متوازن من شرط "Dirichlet" وشرط نيومان "Newman". تكتب المسألة الحدية الواجب حلها عدديا في هذه الحالة على النحو الآتي:

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} \text{إيجاد } \lambda \in]0, V^2[\text{ و } u \in H^1(\Omega_R) \text{ (} u \neq 0 \text{) بحيث:} \\ \Omega_R \text{ في } -\Delta u + q(x)u = -\lambda u \\ S_R \text{ على } \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sqrt{\lambda}u = 0 \end{array} \right|$$

تبرير النموذج الرياضي المتبع

إذا قمنا بدراسة وتحليل النماذج الثلاثة السابقة الذكر، يمكننا إصدار الملاحظات الآتية:

1. النموذج الأول (الشرط الحدي لـ "Dirichlet") ينتج حلولاً غير فيزيائية وهذا راجع لعملية البتر التي تجري على ميدان حلول المسألة والشرط الحدي القاسي نسبياً الذي يجب أن يحققه الحل على حافة هذا الميدان وخاصة إذا كانت الحافة لا تبتعد كثيراً عن لب الليف.
2. النموذج الثاني المقترح (أنظر [3]) ينتج لنا مسألة ذات قيم ذاتية غير خطية يصعب حلها عددياً وبرمجتها.
3. النموذج الذي نقترحه (أنظر [7]) مزود بشرط حدي يمكن استعماله لتحويل المسألة المطروحة إلى مسألة ذات قيم ذاتية عامة يسهل حلها عددياً. يتميز بغياب الحلول غير الفيزيائية وهذا ما تبينه تجارب المحاكات العددية.

4 طرح المسألة

سوف نقوم الآن بدراسة انتشار الموجات الموجهة في ليف غير دائري المقطع، تحت شروط التوجيه الضعيف، من خلال النموذج الذي قمنا بتبنيه. نجد (أنظر [7]) دراسة مفصلة للطريقة المتبعة والإنشآت الرياضية اللازمة لتطبيق هذه الطريقة في حساب الموجات الموجهة في ليف بصري تحت الشروط المطلوبة وهي شروط التوجيه الضعيف. في البداية نقوم بسرد مختصر لخطوات هذه الطريقة ثم نضع من خلالها برنامجاً عددياً، باستعمال طريقة العناصر المنتهية، لدراسة انتشار الموجات الموجهة في ليف بصري غير دائري المقطع.

في هذه الحالة علينا بحل المسألة (5) عددياً على ميدان محدود Ω_R من المعلم $\mathbb{R}^2$ وبشرطه الحدي من نوع "Robin" على الحافة S_R وهذا من أجل قيمة معطاة لـ V .

بتطبيق طريقة العناصر المنتهية على الصيغة التفاضلية للمسألة (5) نحصل على الجملة الجبرية الآتية:

من أجل قيمة حقيقية معطاة لـ V ،

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} \text{إيجاد } X \in \mathbb{R}^n \text{ و } \lambda \in]0, V^2[\text{ بحيث:} \\ AX + \lambda BX + \sqrt{\lambda} CX = 0. \end{array} \right.$$

حيث عناصر المصفوفات A ، B و C معرفة بـ:

$$a_{ij} = \int_{\Omega_R} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega_R} quv$$

$$b_{ij} = \int_{\Omega_R} uv$$

$$c_{ij} = \int_{\partial\Omega_R} uv d\sigma$$

حيث $i, j = 1, 2, \dots, n$

هذه المسألة ذات القيم الذاتية (6) المتحصل عليها غير خطية بالنسبة للقيم الذاتية λ . وعليه فإن الطرق التكرارية التقليدية لحل المسائل ذات القيم الذاتية لا يمكن تطبيقها مباشرة. لذا يجب إعادة صياغة هذه المسألة بطريقة أخرى، وللقيام بذلك نقوم بالتحويل الآتي (أنظر [7]):

نضع :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} B^{-1} AX, \quad Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

لنعتبر الآن المسألة ذات القيم الذاتية العامة الآتية:

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} \text{إيجاد } Z \in \mathbb{R}^{2n} \text{ و } \lambda \in]0, V^2[\text{ بحيث:} \\ \tilde{A}Z = \sqrt{\lambda} \tilde{B}Z. \end{array} \right.$$

حيث

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -C & -B \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن إثبات (أنظر [7]) وجود تكافؤ بين المسألتين (6) و (7) بالمعنى الآتي:

إذا كانت الثنائية (λ, x) حلاً للمسألة (6) فإن الثنائية (λ, Z) حلاً للمسألة (7) وبالمقابل إذا كانت الثنائية (λ, Z) حلاً للمسألة (7) و $Z = (z_1, z_2)^t$ فإن الزوج (λ, z_1) حلاً للمسألة (6). ولحساب القيم الذاتية للمسألة الجبرية المتحصل عليها نستعمل طريقة أرنولدي "Arnoldi" وهي عبارة عن طريقة تكرارية لحساب القيم الذاتية. وهي من الطرق التي تعتمد على تفكيك المصفوفة المعنية بحساب قيمها الذاتية على شكل جداء يدعى QR.

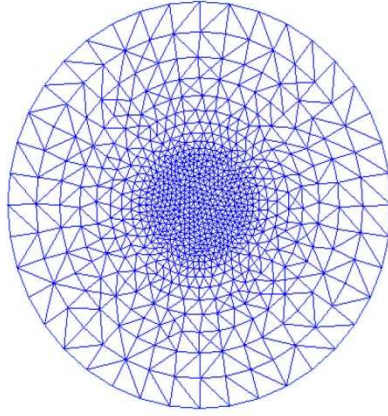
5 بعض نتائج المحاكاة

نقدم في هذا العمل بعض التجارب العددية لمحاكاة ظاهرة انتشار الموجات الموجهة في ألياف بصرية ذات مقاطع بأشكال مختلفة. للقيام بذلك قمنا بإنشاء برنامج معلوماتي باستعمال برنامج FreeFem++ الملائم لمسائل المعادلات التفاضلية الجزئية والذي يعتمد على طرق العناصر المنتهية (أنظر [10]). لقد أخذنا في البداية ليفاً بصرياً دائري المقطع قصد المقارنة لتوفر النتائج التحليلية والحسابات بالطرق العددية، ثم أخذنا ليفاً بصرياً مثلث المقطع وآخر مربع المقطع كما قمنا بتجربة أخذنا فيها مزدوجة بصرية مكونة من ليفين مثلثي المقطع داخل غمد ذي مقطع رباعي الشكل. عند اختيار المواصفات الضوئية والهندسية للألياف البصرية أثناء تجارب المحاكاة العددية التي قمنا بها لضبط البرنامج الذي قمنا بوضعه، سهرنا في البداية على أن تمكننا التجارب من المقارنة مع نتائج لأعمال سابقة، ولذلك أخذنا مساحة مقطع اللب متساوية في كل أشكال المقاطع المستعملة. حسبنا في كل حالة ثابت الانتشار بالنسبة للموجة الموجهة الرئيسية والموجة الموجهة الثانية.

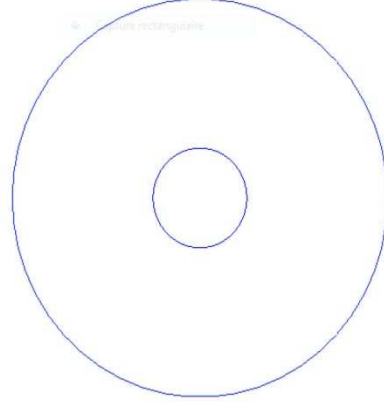
1. ليف بصري دائري المقطع

الهدف الأساسي من التجارب في هذه الحالة هو ضبط البرنامج المنشأ من خلال المقارنة مع النتائج المتوفرة في الأدبيات. للقيام بذلك قمنا بأخذ المواصفات الضوئية والهندسية الآتية:

- نصف قطر لب الليف: $a = 1. \mu m$
 - معامل انكسار اللب: $n_+ = 1.5085$
 - معامل انكسار الغمد: $n_\infty = 1.5000$
 - نصف قطر البتر: $R = 4a$, هذه القيمة مختارة بحيث البتر لا يؤثر على قيمة ثابت الانتشار وشكل الحقل الكهرومغناطيسي.
 - التردد المنظم: $V = 2$, هذه القيمة لا تمكن وفق الأدبيات إلا من ظهور الموجة الرئيسية وهذا ما لاحظناه أثناء تجاربنا.
- في هذه الحالة الشكل 2 يمثل الميدان الذي تجرى فيه الحسابات حيث (أ) هو المقطع العرضي لليف و(ب) يمثل التشبيك الذي تتطلبه طريقة العناصر المنتهية.



(ب) : تشبيك المقطع الدائري

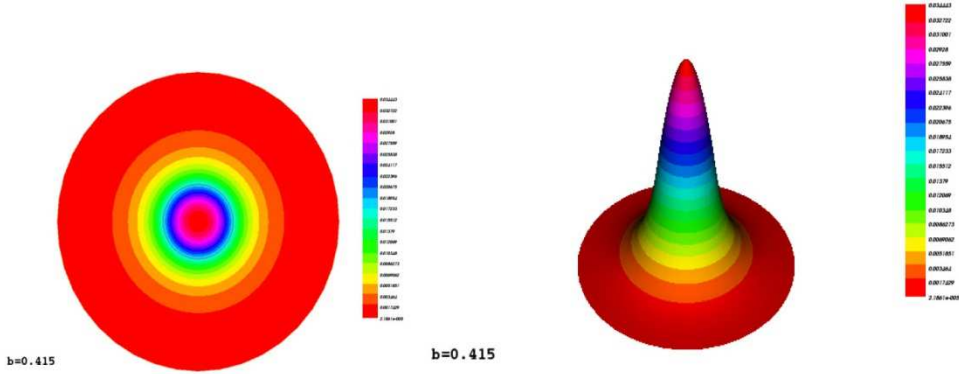


الشكل 2 (أ) : المقطع العرضي للليف الدائري

بهذه المواصفات تحصلنا على قيمة ثابت الانتشار المنظم $b = 0.415$ حيث b يحسب بالصيغة

$$b = \frac{(\beta^2 - n_{\infty}^2 k^2) a^2}{V^2},$$

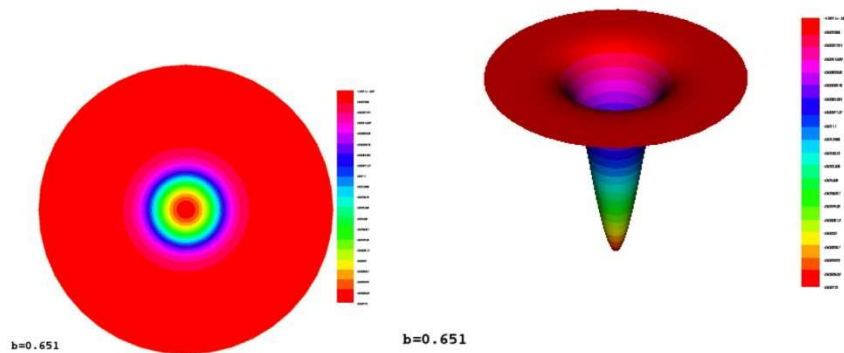
وهي قيمة قريبة من القيمة المتحصل عليها تحليليا 0.41625 [6]. وقد قمنا بتمثيل (أنظر الشكل 3 (أ)) الحقل الكهرومغناطيسي (بثلاثة أبعاد) المرفق بهذه القيمة وكذلك الخطوط المتساوية القيم بالنسبة للطاقة في هذا الحقل وهي عبارة عن مسقطه على المستوي (أي ممثل ببعدين) كما هو مبين في الشكل 3 (ب).



(ب) : مسقط الحقل على المستوي

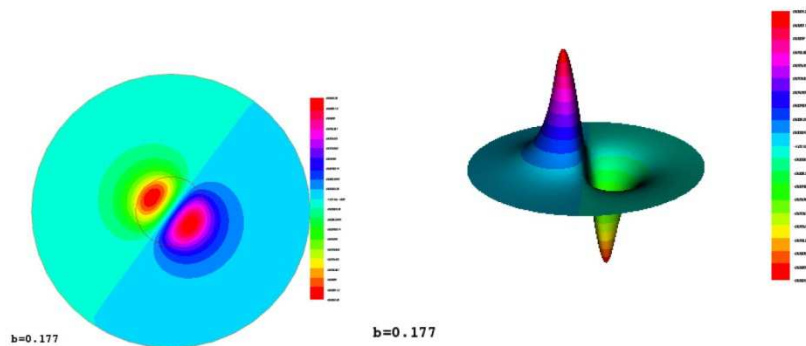
الشكل 3 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

إذا أردنا الحصول على الموجة الموجهة الثانية بالإضافة إلى الموجة الموجهة الرئيسية يمكننا تغيير قيمة التردد المنظم V والحفاظ على بقية المواصفات الضوئية والهندسية. بأخذ $V = 3$ ، تجارب المحاكاة تبين وجود موجة أساسية بسرعة انتشار 0.651 حيث الشكل 4 يمثل حقلها الكهرومغناطيسي وموجة ثانية بسرعة انتشار قيمتها مضاعفة 0.177 والشكلان 5 و6 يمثلان الحقلين الكهرومغناطيسيين المرفقين بهذه القيمة المضاعفة.



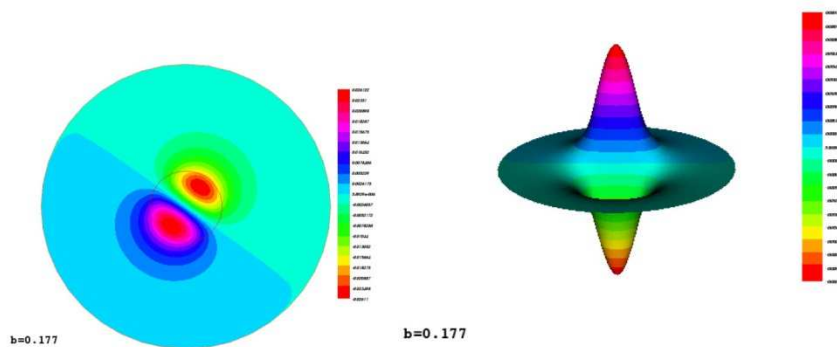
الشكل 4 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

(ب) : مسقط الحقل على المستوى



الشكل 5 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

(ب) : مسقط الحقل على المستوى



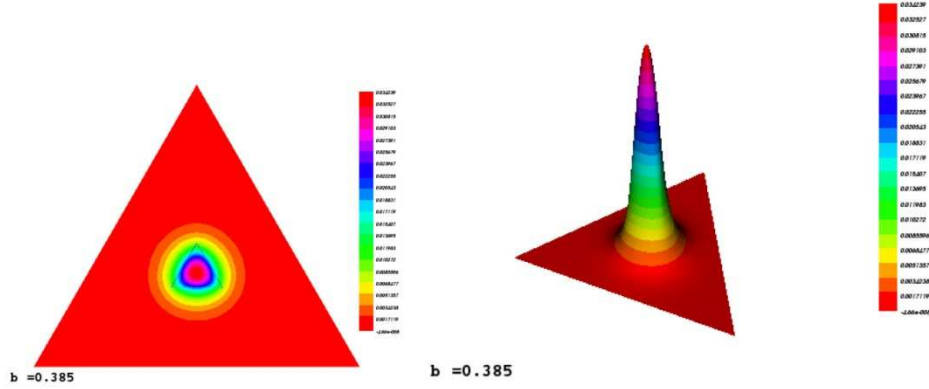
الشكل 6 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

(ب) : مسقط الحقل على المستوى

من خلال هذه النتائج المتحصل عليها أثناء محاكاتها لانتشار الموجات الموجهة في ليف بصري دائري المقطع، نلاحظ أنها مطابقة أو قريبة جداً مما هو موجود في أدبيات الاختصاص. نلاحظ أنه من أجل $V = 2$ لم نحصل إلا على الموجة الموجهة الأساسية ومن أجل $V = 3$ حصلنا بالإضافة إلى الموجة الموجهة الأساسية على الموجة الثانية وهذا يتماشى مع الأدبيات التي تحدد ظهور الموجة الثانية انطلاقاً من قيمة $V = 2.405$ (أنظر [13]).

2. ليف بصري مثلث المقطع

بعدما ثبتت نجاعة البرنامج الذي قمنا بإنشائه لمحاكاة انتشار الموجات الموجهة في ليف بصري دائري المقطع، نقوم الآن باستعماله لمحاكاة انتشار الموجات الموجهة في ليف بصري مثلثي المقطع. نحافظ في هذه الحالة على المواصفات الضوئية ونغير شكل مقطع لب الليف وعمده حيث يكون مقطع اللب مثلثا متساوي الأضلاع مساحته تساوي مساحة مقطع اللب الدائري. من أجل ذلك أخذنا ضلع مقطع اللب $ci = 2a\sqrt{\pi/\sqrt{3}}$ وضلع مقطع الغمد $ce = 6ci$ وبأخذ $V = 2$ حصلنا على سرعة انتشار تقدر بـ $b = 0.385$.

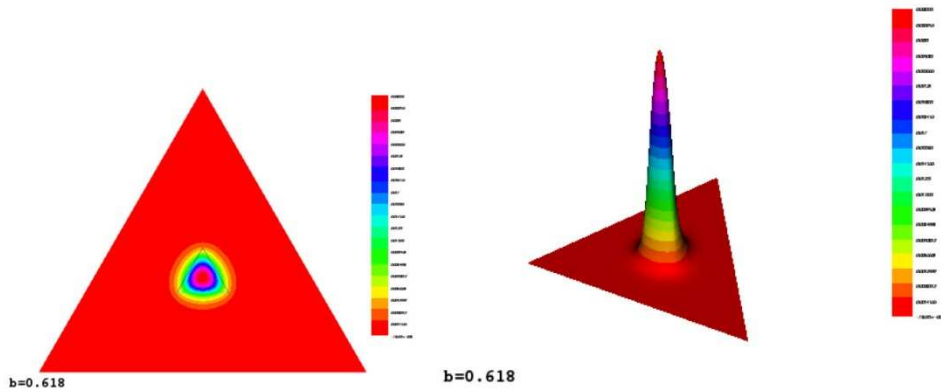


(ب) : مسقط الحقل على المستوي

الشكل 7 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

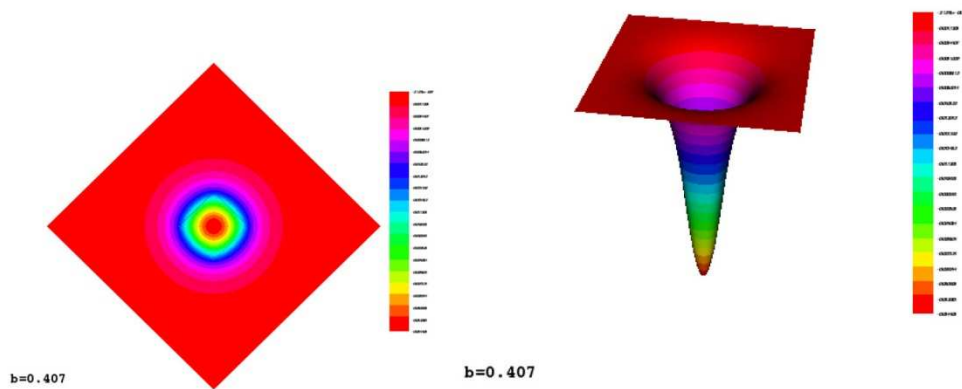
الملاحظة الأولية من هذه التجربة هي أن حقل الموجة الموجهة الأساسية الكهرومغناطيسي لم يتأثر كثيرا من الناحية الشكلية (أنظر الشكل 3 و7) بينما هناك تغير في قيمة سرعة انتشارها.

أما بالنسبة لـ $V = 3$ فالقيم المتحصل عليها هي $b = 0.618$ بالنسبة لسرعة انتشار الموجة الموجهة الأساسية و0.172 بالنسبة لسرعة انتشار الموجة الثانية ذات القيمة المضاعفة. يمكن تقديم نفس الملاحظة السابقة فيما يخص قيمة سرعة الانتشار وشكل الحقل الكهرومغناطيسي المرفق بها إذا قورنا بما تحصلنا عليه في حالة الليف الدائري المقطع (أنظر الأشكال 4، 5 و6 والأشكال 8، 9 و10).



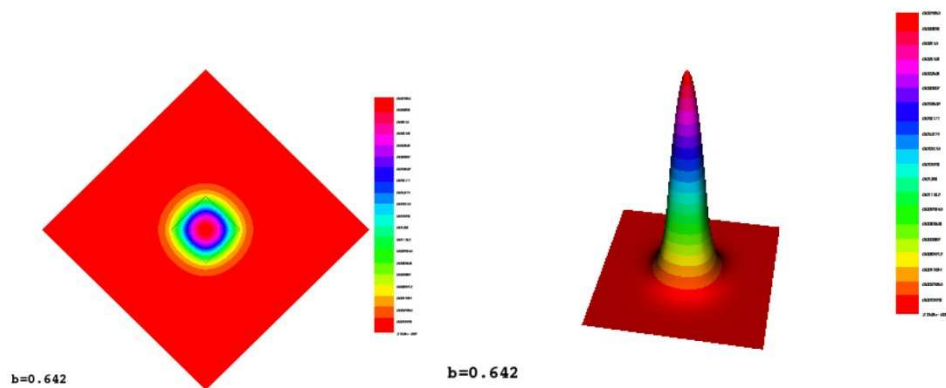
(ب) : مسقط الحقل على المستوي

الشكل 8 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

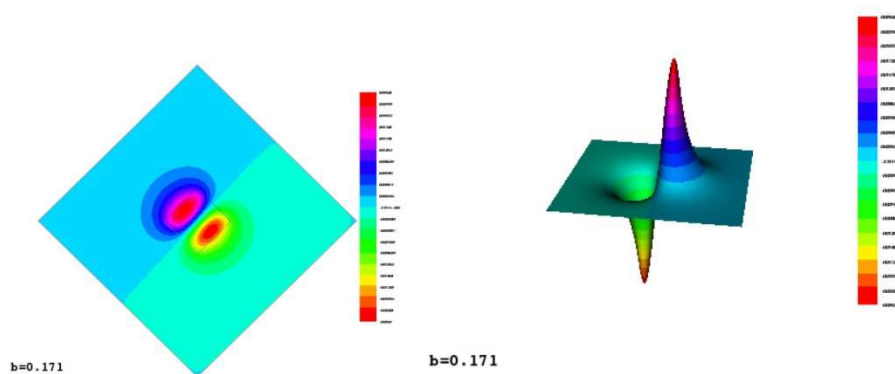


الشكل 11 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوي

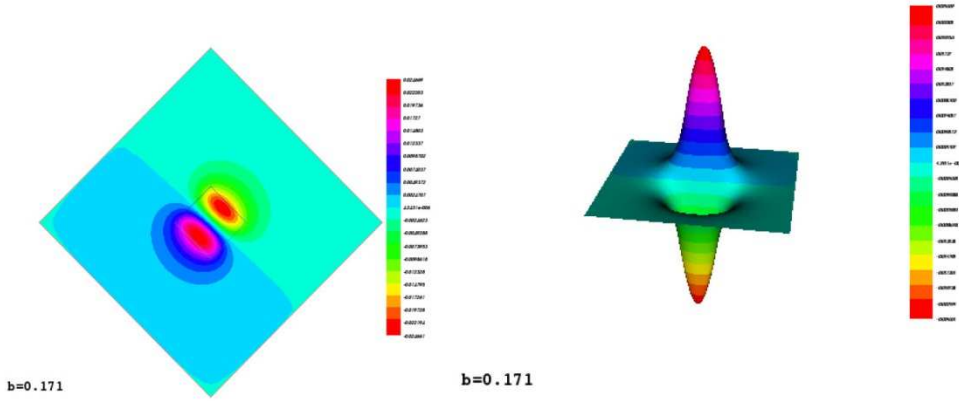
ومن أجل $V = 3$ تحصلنا على سرعة انتشار $b = 0.642$ بالنسبة للموجة الموجهة الأساسية ومثلنا حقلها الكهرومغناطيسي بثلاثة أبعاد وبعبدين في الشكل 12 (أ) و(ب). كما تحصلنا على سرعة انتشار تقدر بـ $b = 0.171$ قيمتها مضاعفة ومثلنا الحقلين الكهرومغناطيسيين المرفقين بها في الشكلين 13 و14.



الشكل 12 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوي



الشكل 13 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوي



الشكل 14 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوي

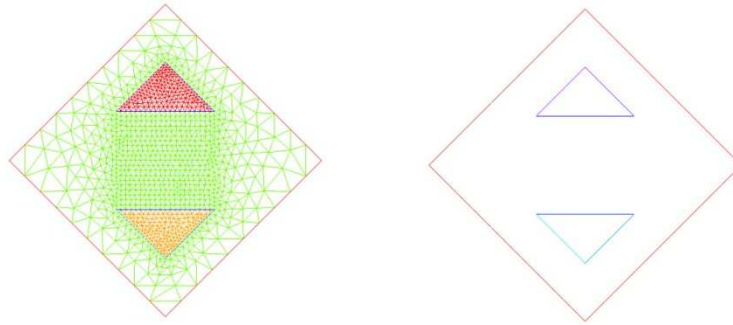
النتائج الحسابية المتحصل عليها في هذه التجربة تمكنا على غرار ملاحظة التجربة السابقة من القول أن الحقول الكهرومغناطيسية لم تتأثر كثيرا من الناحية الشكلية وهناك تغير على مستوى قيم سرعة انتشار الموجات الموجهة سواء الأساسية منها أو الثانوية، ويبدو ذلك جليا من خلال قيم سرعات الانتشار وأشكال الحقول الكهرومغناطيسية المرفقة المتحصل عليها في كل التجارب السابقة. لقد اتخذنا الليف البصري الدائري المقطع كمرجع لمقارنة النتائج المتحصل عليها أثناء محاكاة انتشار الموجات الموجهة في مختلف الألياف التي اعتبرناها في تجاربنا لامتلاكنا في الأدبيات كما ذكرنا سابقا لنتائج دقيقة تخص الليف الدائري المقطع. من خلال نتائج التجارب التي سردناها يمكن أن نلاحظ أن نتائج الليف المربع المقطع أقرب لنتائج الليف الدائري المقطع إذا ما قورنت بتلك المتعلقة بالليف المثلث المقطع، وهذا أمر متوقع لأنه من الناحية الشكلية (شكل مقطع لب الليف) المربع أقرب للدائرة من المثلث. يمكننا استنتاج أنه إذا اعتبرنا ليفا بصريا مقطع ليه مضلع فإنه كلما ازداد عدد أضلاعه كلما اقتربت نتائج الحسابات فيه من نتائج الليف الدائري المقطع طبعا مع مراعاة مساحة اللب.

4. مزدوجة ألياف مثلثية المقطع

إذا أردنا التعمق أكثر في دراسة تأثير شكل لب الألياف على انتشار الموجات الموجهة من ناحية قيمة سرعة الانتشار وشكل الحقل الكهرومغناطيسي يمكننا أن نقوم بتجارب لمحاكاة انتشار الموجات الموجهة في بنية ناتجة عن مزوجة ليفين بصريين (تدعى مزدوجة بصرية) وليكونا مثلثي مقطع اللب. وعليه فإننا، في هذه الفقرة، نعتبر بنية ضوئية مكونة من ليفين بصريين كل واحد منهما ذو لب مقطعه مثلث الشكل لهما نفس معامل الانكسار سواء في اللب أو في الغمد. للمقارنة مع النتائج المتاحة لدينا سوف نعتبر كلا من الليفين البصريين له المواصفات الضوئية والهندسية المستعملة في التجارب السابقة. هناك معامل جديد يدخل في الحساب، يتعلق الأمر بالمسافة التي تفصل بين لبَي الليفين التي تدعى بمسافة التزاوج وهي عنصر مؤثر في حالة تزاوج الألياف البصرية. نعتبر الآن بنية ضوئية بالمواصفات الآتية:

- مقطع لب الليفين مثلث متساوي الأضلاع مساحته π ومعامل الانكسار فيه $n = 1.5085$.
- غمدا الليفين بنفس معامل الانكسار $n = 1.5000$ ، يمكن اعتبارهما غمدا واحدا يشمل اللبين وشكل مقطعه رباعي يلائم تغيير مسافة التزاوج بينهما.
- التردد المنظم $V = 2$ ، حيث نهتم فقط بالموجة الموجهة الأساسية.

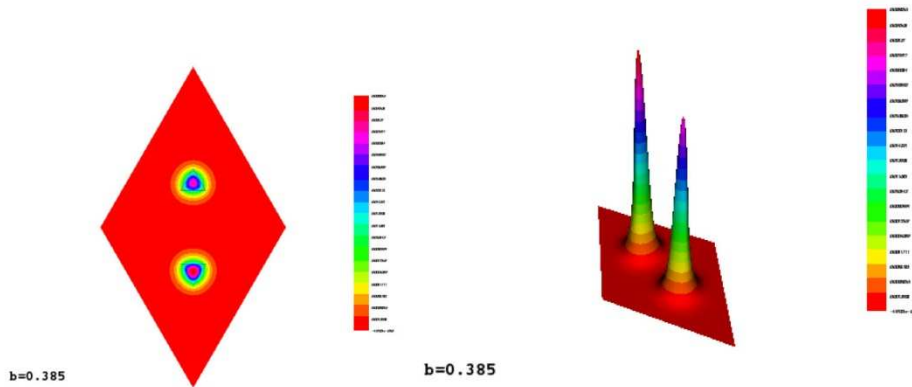
في هذه الحالة الشكل 15 (أ) و(ب) يمثل المقطع العرضي للمزدوجة البصرية والتشبيك الذي تتطلبه طريقة العناصر المنتهية.



الشكل 15 (أ): المقطع العرضي للمزدوجة البصرية

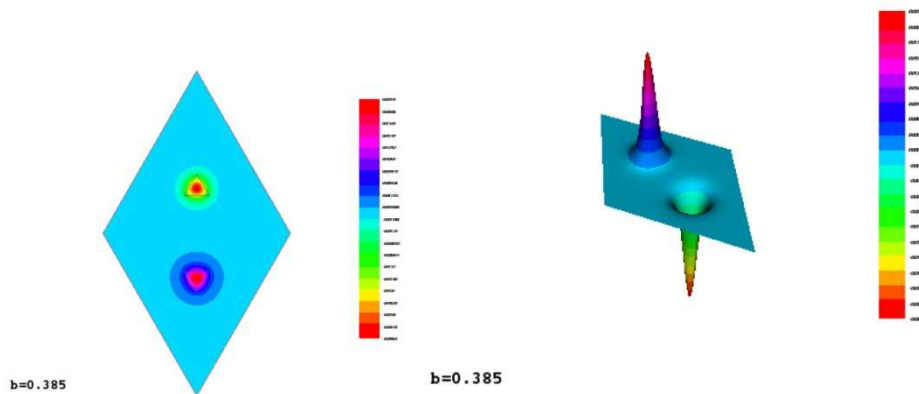
(ب): تشبيك مقطع المزدوجة البصرية

نقوم الآن بمحاكاة انتشار الموجات الموجهة في مزدوجة بصرية مكونة من ليفين متماثلين مع مراقبة مدى تأثير النتائج المتحصل عليها بمسافة التزاوج بينهما. في البداية أخذنا مسافة التزاوج $d = 8\mu m$ وهي المسافة التي تفصل بين لبّي الليفين فحصلنا على سرعة انتشار تقدر بـ $b = 0.385$ مضاعفة ومثلنا الحقل الكهرومغناطيسي المرفق في الشكلين 16 و 17.



الشكل 16 (أ): الحقل الكهرومغناطيسي

(ب): مسقط الحقل على المستوي

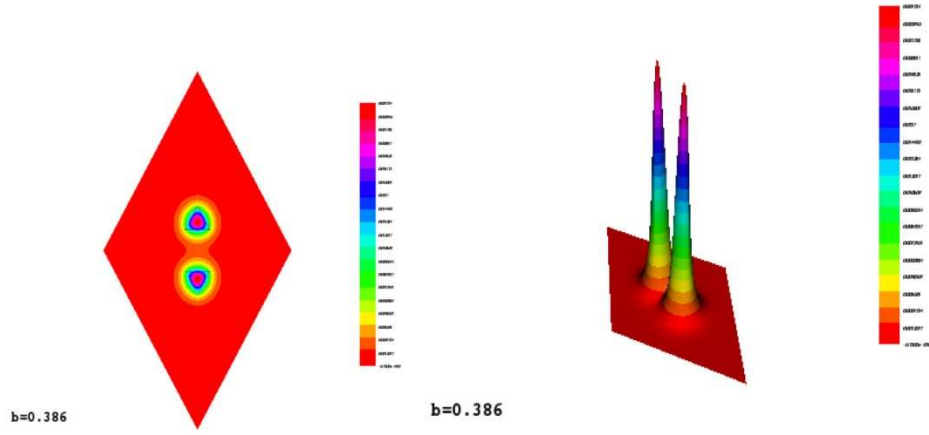


الشكل 17 (أ): الحقل الكهرومغناطيسي

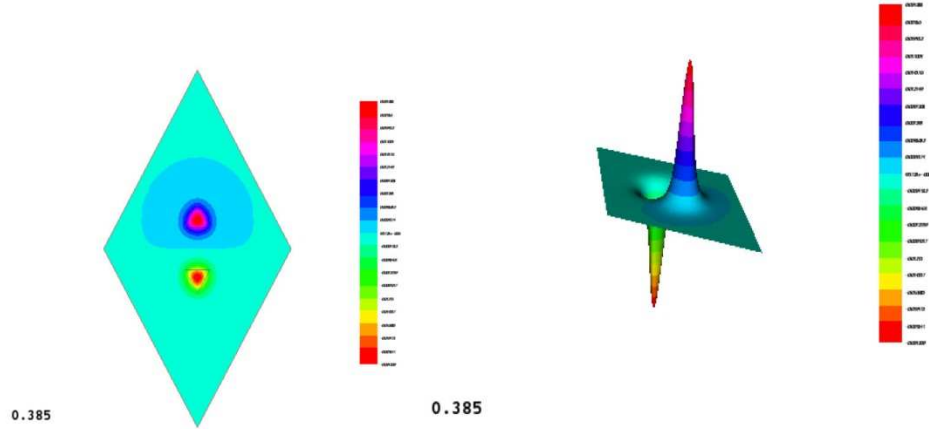
(ب): مسقط الحقل على المستوي

الملاحظة التي يمكن إيدأؤها إنطلاقاً من النتائج المتحصل عليها في هذه التجربة، هي أن مسافة المزاوجة بين اللبّين المأخوذة في البنية التي اعتبرناها تجعل انتشار الموجات الموجهة في البنية يشبه انتشارها في ليفين بصريين منفصلين تماماً من ناحية قيمة

سرعة الانتشار وهي نفسها وأيضا نفس شكل الحقل الكهرومغناطيسي. هذا يعني أنه من أجل مسافة المزوجة $d = 8\mu m$ في حالتنا ليس هناك أي أثر للمزوجة وهذا يدفعنا إلى أخذ مسافة أصغر منها وملاحظة ما الذي يحدث. وبالفعل، هذا ما قمنا به حيث أخذنا في التجربة الموالية مسافة مزوجة بين اللين $d = 4\mu m$ وكانت النتائج كما يلي: لاحظنا تغيرا طفيفا في قيمة سرعة انتشار الموجة الموجهة الأساسية التي لم تعد مضاعفة بل أصبحت قيمتين: الأولى $b = 0.386$ والثانية $b = 0.385$ ولاحظنا اقتراب الحقلين الكهرومغناطيسيين من بعضهما البعض والشكلان 18 و19 يبينان ذلك.

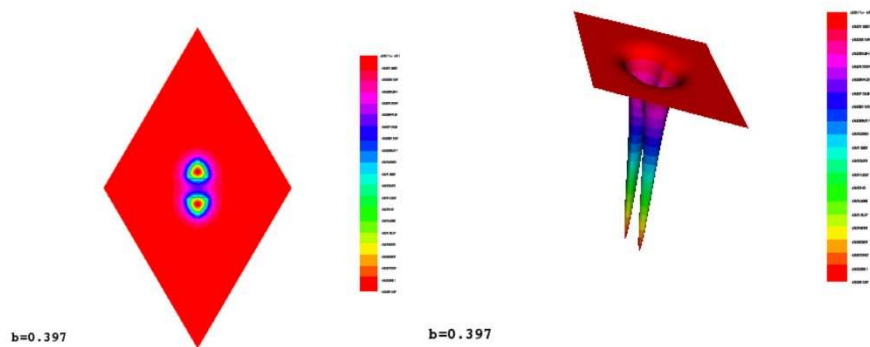


الشكل 18 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوى



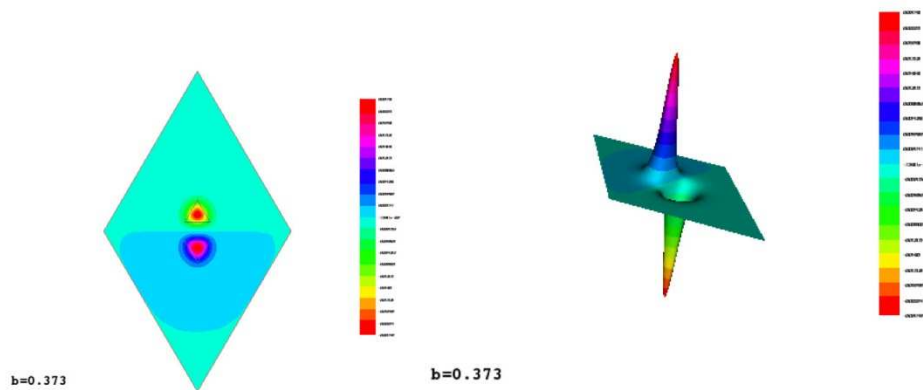
الشكل 19 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوى

بعد هذه التجربة، أردنا معرفة ما الذي يحدث إذا أخذنا مسافة مزوجة أصغر من هذه الأخيرة، وهذا ما دفعنا إلى أخذ $d = 2\mu m$ ومراقبة التغيرات الطارئة. ما حصلنا عليه في هذه التجربة يبرز تغيرا واضحا في قيمة سرعة انتشار الموجة الموجهة الأساسية التي أصبحت: الأولى $b = 0.397$ والثانية $b = 0.373$ وبين تداخلا أو تلاهما طفيفا للحقلين الكهرومغناطيسيين المرفقين بالقيمتين ويبدو ذلك جليا في الشكلين 20 و21.



الشكل 20 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

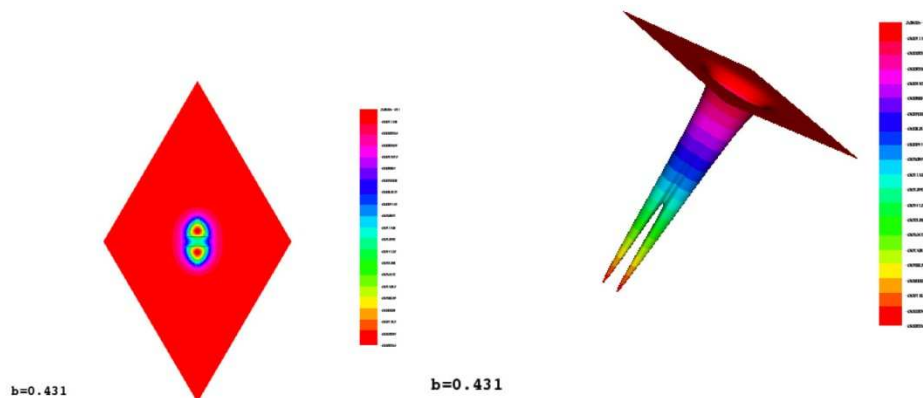
(ب) : مسقط الحقل على المستوي



الشكل 21 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

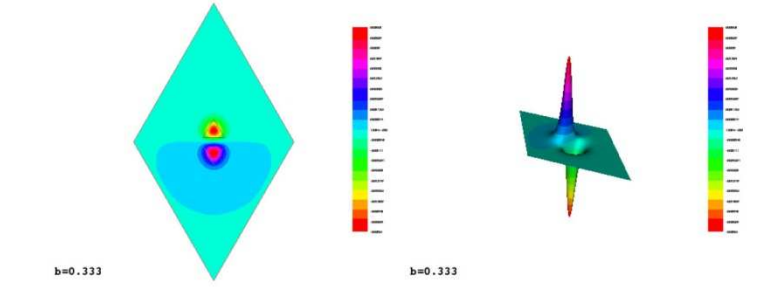
(ب) : مسقط الحقل على المستوي

للقوف أكثر على هذه الظاهرة أي تأثر انتشار الموجات الموجهة في مزدوجة ألياف بصرية بمسافة المزوجة فيها قمنا بتجربتين إضافيتين حيث أخذنا $d = 1\mu m$ و $d = 0.4\mu m$. الشكلان 22 و 23 يوضحان النتائج المتعلقة بالمسافة الأولى والشكلان 24 و 25 بالنسبة للمسافة الثانية.

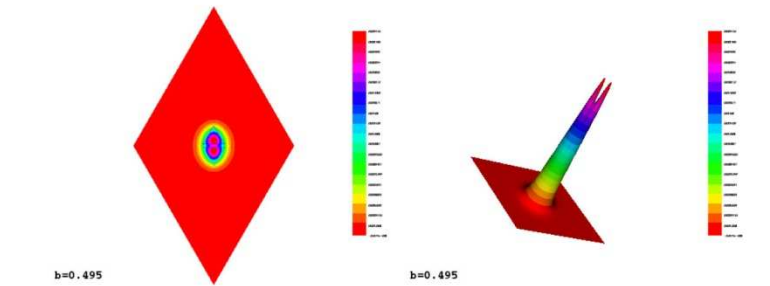


الشكل 22 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي

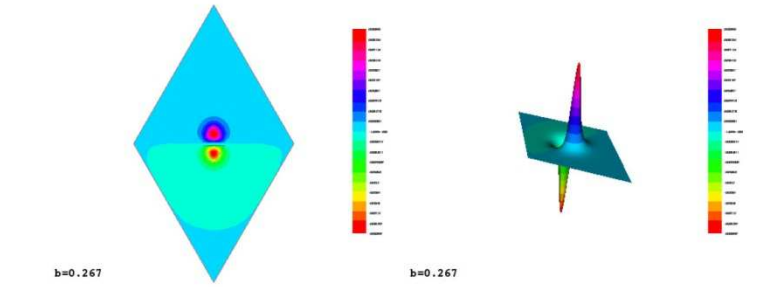
(ب) : مسقط الحقل على المستوي



الشكل 23 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوى



الشكل 24 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوى



الشكل 25 (أ) : الحقل الكهرومغناطيسي (ب) : مسقط الحقل على المستوى

التجربتان الأخيرتان على غرار التجربتين السابقتين لهما توكدان تغير سرعة انتشار الموجة الموجهة الأساسية مع تغير مسافة المزاوجة الفاصلة بين لبي الليفين وتلاحم الحقلين الكهرومغناطيسيين الخاصين بالليفين البصريين. يمكن بسهولة ملاحظة أن إحدى سرعتي الانتشار الخاصة بالبنية تكبر قيمتها كلما صغرت مسافة المزاوجة وأن سرعة الانتشار الثانية تصغر معها (أي تصغر مع مسافة المزاوجة).

الخاتمة

من خلال هذا العمل قمنا بدراسة انتشار الموجات الموجهة التي يمكن أن تنتشر في ليف بصري ذي مقطع شكله كفي حيث أجرينا تجارب محاكاة انتشار الموجات في ألياف بصرية ذات مقطع دائري، مثلثي ومربع. في هذه التجارب حسينا، في كل حالة، سرعات انتشار الموجات الموجهة الأساسية والثانية وعينا الحقلين الكهرومغناطيسية المرفقة. وقمنا أيضا بمحاكاة انتشار الموجات الموجهة في مزدوجة بصرية وراقبنا تأثره بمسافة المزاوجة بين الليفين المشكلين للمزدوجة البصرية. في الأخير يمكننا استعمال البرنامج الذي قمنا بإنشائه لإنجاز التجارب المذكورة في هذا العمل من أجل حساب الموجات الموجهة العليا أي التي تأتي بعد الموجة الأساسية والثانية وذلك من أجل قيم أكبر للتردد V مثلا. ويمكن استعماله أيضا من أجل دراسة ظاهرة التزاوج بين ليفين مختلفين من ناحية المواصفات الضوئية والهندسية أو أكثر.

المراجع

- [1] Barucq H., Bekkey C. & Djellouli R., *Mathematical analysis and solution methodology for an inverse spectral problem arising in the design of optical waveguides*, Inverse Problems in Science and Engineering, 2019, VOL. 27(8), 1081–1119
- [2] Bonnet A.S. & Djellouli R., *Etude mathématique des modes Guidé d'une fibre optique, résultats complémentaires et extension au cas de couplage*, Rapport interne du C.M.A.P. No 182, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1988).
- [3] Bonnet A.S. & Gmati N., Spectral approximation of a boundary condition for an eigenvalue problem, SIAM J. Numer. Anal., 32(4), (1995) 1263-1279.
- [4] Choutri A. & Boureghda A., A numerical integral method for compute the guided modes in an optical half coupler in the scalar case, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 54 (4), (2009) 287–295.
- [5] Choutri A. & Boureghda A., An asymptotic expansion approach for variable refractive index optical fibers (in weak guidance case), Optical and Quantum Electronics, 50(2), (2018) 1–21.
- [6] Djellouli R., *Contribution à l'analyse mathématique et au calcul numérique des modes guidés dans les fibres optiques*, Thèse de Doctorat es Science, Université Paris Sud, Centre d'Orsay (1988).
- [7] Djellouli R., Bekkey C., Choutri A. & Rezgui H., A local boundary condition coupled to a finite element method to compute guided modes of optical fibers under the weak guidance assumptions, Math. Methods Appl. Sci., 23(17), (2000) 1551–1583.
- [8] Devys C. & Ziani A., *Méthode Intégrale pour le Calcul des Modes Guidés d'une Fibre Optique*, Rapport Interne du C.M.A.P., No 129, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1985).
- [9] Ginés L. P., "Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices", John Wiley & Sons, Ltd, 2016.
- [10] Hecht F., New development in FreeFem++, J. Numer. Math., 20, No. 3-4, (2012) 251–265.
- [11] Marcuse D., "Theory of dielectric optical waveguides", Academic Press, New York, 1974.
- [12] Mitschke F., "Fiber Optics, Physics and Technology", Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2016.
- [13] Snyder A.W. & Love J.D., "Optical Waveguide Theory", Chapman and Hall, London, 1983.
- [14] Tong X. C., "Advanced Materials for Integrated Optical Waveguides", Springer, Switzerland, 2014.