

Multi-représentations et technologies



Gilles ALDON
Institut Français de l'Éducation
École Normale Supérieure de Lyon
gilles.aldon@ens-lyon.fr

Conférence-atelier donnée à l'Institut National de Recherche en Éducation, Alger 28 mai 2013, à l'occasion d'un séminaire national sur l'enseignement des mathématiques.

1. Multi-représentation et registres de représentations

Lorsqu'on cherche un problème, lorsqu'on enseigne les mathématiques ou lorsqu'on les apprend, les objets mathématiques sont manipulés à travers certaines de leurs représentations. Travailler avec un objet mathématique impose de travailler avec certaines de ses représentations et, pour parodier Magritte (*figure 1*), « 1 est différent de un ». Il n'est besoin, pour s'en convaincre, que de regarder différentes symbolisations du nombre 1 (*figure 2*) qui toutes possèdent un domaine d'expérience et de validité les rendant efficaces dans un certain contexte. Changer de signe enrichit et complexifie la signification de l'objet désigné. Les indices, au sens de Peirce¹ ne sont plus présents et la contiguïté du signe et de l'objet n'est plus assurée, comme par exemple dans les deux représentations de la multiplication des nombres deux mille trois cent soixante quinze par sept (*figure 3*). S'il est assez facile de se convaincre que la première multiplication est juste en vérifiant l'ordre de grandeur, le chiffre des unités, en faisant éventuellement une « preuve par 9 », il est beaucoup plus délicat de savoir si la seconde, écrite en base huit est exacte.

Les objets mathématiques peuvent alors être considérés comme la classe d'équivalence de leurs représentations modulo la relation d'équivalence dans l'ensemble des représentations définie par :



Figure 1. Magritte, ceci n'est pas une pipe.

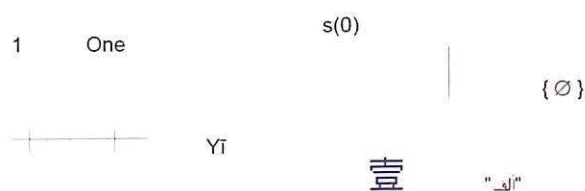


Figure 2. Différentes représentations du nombre 1.

$\begin{array}{r} 2375 \\ \times 7 \\ \hline 16625 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2375 \\ \times 7 \\ \hline 21353 \end{array}$
---	---

Figure 3. Deux multiplications pour deux résultats ?

deux représentations sont en relation si elles sont des représentations d'un même objet mathématique.

Cette remarque a deux conséquences essentielles :

- un objet mathématique peut être maîtrisé dans un contexte et étranger ou difficile dans un autre (c'est ce qu'illustre l'exemple des deux multiplications).
- la conversion d'un registre de représentation à un autre est essentiel pour appréhender un objet mathématique, ce qui demande un travail de traduction qui à la fois fait perdre des éléments de signification mais aussi en rajoute ; en modifiant le signifiant, c'est à dire la façon de désigner l'objet, on modifie, on enrichit, on complète le signifié, l'objet désigné.

2. Apports et contraintes des technologies

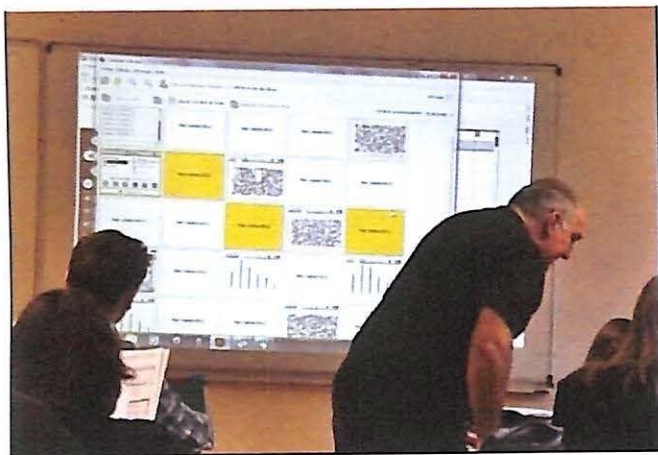


Figure 4. Un mur d'écrans de calculatrices

Comme le souligne Luc Trouche dans l'article « L'enseignement des mathématiques aujourd'hui, Problèmes et perspectives » la prise en compte des outils numériques est une grande tendance de l'enseignement des mathématiques actuellement. Si on analyse les apports de la technologie pour l'enseignement et pour l'apprentissage des mathématiques, les nouveaux registres de représentation des objets qu'elle introduit enrichissent et complexifient les registres existants comme les exemples développés ci-dessous vont le montrer. Les technologies offrent des possibilités de représentations multiples dont nous faisons

l'hypothèse qu'elles facilitent la compréhension des objets mathématiques en jeu et permettent un jeu entre la multi-représentation interne en proposant plusieurs représentations dans des registres différents et une multi-représentation externe en proposant, pour le professeur, des possibilités de mise en regard des travaux de chacun. La *figure 4* illustre cette multi-représentation externe : l'ensemble des écrans des calculatrices est projeté sur le tableau, les élèves peuvent voir d'autres approches utilisées par leurs camarades et le professeur peut, à tout moment, faire le point ou questionner à propos d'une approche qu'il juge intéressante ou problématique.

La délicate transformation d'une situation mathématiquement riche en une situation didactique féconde utilisant les potentialités des technologies est alors un travail important dans lequel les mathématiciens, les didacticiens des mathématiques et les enseignants peuvent apporter chacun des éléments spécifiques. Cette transformation passe par la construction d'un « milieu » au sens de la théorie des situations didactiques², c'est-à-dire, tout ce que le professeur doit mettre en place pour permettre l'apprentissage mathématique : les objets matériels, la technologie utilisée ou non, les connaissances préalables, les documents mis à disposition mais aussi l'organisation dans la classe des interactions. A travers les exemples présentés ci-dessous, je montrerai des utilisations possibles des technologies pour mettre en évidence, à travers les multi-représentations des objets mathématiques en jeu, la possible construction d'une situation didactique.

3. Des exemples de problèmes et leurs mises en œuvre

Dans ce paragraphe, je partirai des situations mathématiques et d'une première analyse pour en extraire les potentialités qui permettront de les transformer en situations didactiques.

3.1. Trois situations mathématiques

Dans ce paragraphe, je partirai des situations mathématiques et d'une première analyse pour en extraire les potentialités qui permettront de les transformer en situations didactiques.

3.1.1 Soit $[AB]$ un segment et soit M un point de $[AB]$. C et D sont deux points du plan. On appelle x la distance AM et $d_1 = f_1(x)$ la distance CM et $d_2 = f_2(x)$ la distance DM . A quelle condition sur C et D , la relation entre d_1 et d_2 est elle fonctionnelle ?

3.1.2 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. On construit sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ les carrés extérieurs de centres P , Q , R et S . Quelle relation existe-t-il entre les segments $[PR]$ et $[QS]$?

3.1.3 Pjotr se déplace à vitesse constante le long d'un carré $ABCD$ de centre O (point d'intersection des deux diagonales) et de côté de longueur L donnée, à partir du point A . Pjotr veut décrire comment varie sa distance du centre O du carré pendant qu'il se déplace le long du carré. Comment pouvez-vous l'aider ?

3.2 Quelques éléments d'analyse

3.2.1 Ce premier exemple illustre bien les apports de la technologie pour représenter dans des registres différents la situation mathématique. Le point de départ est un problème de géométrie et il est naturel d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour la représenter. Dans la capture d'écran réalisée avec Geogebra (*Figure 5*), trois registres sont convoqués : le registre du dessin, dynamique en l'occurrence, le registre numérique, les distances d_1 et d_2 étant stockées dans un tableur, et le registre algébrique avec les définitions des objets de la situation.

Comment visualiser la relation entre d_1 et d_2 ? Comment visualiser que cette relation est fonctionnelle ? On peut dans un premier temps représenter la relation existante entre d_1 et d_2 (*Figure 6*) et mettre en évidence le système d'équations paramétriques définissant la courbe obtenue comme un lieu géométrique des points de coordonnées (d_1, d_2) . Les expériences faites en bougeant les points C ou D se répercutent sur la courbe dessinée. La relation fonctionnelle s'interprète alors dans le registre de la représentation graphique et se traduit dans un registre formel pour conduire à la solution du problème proposé.

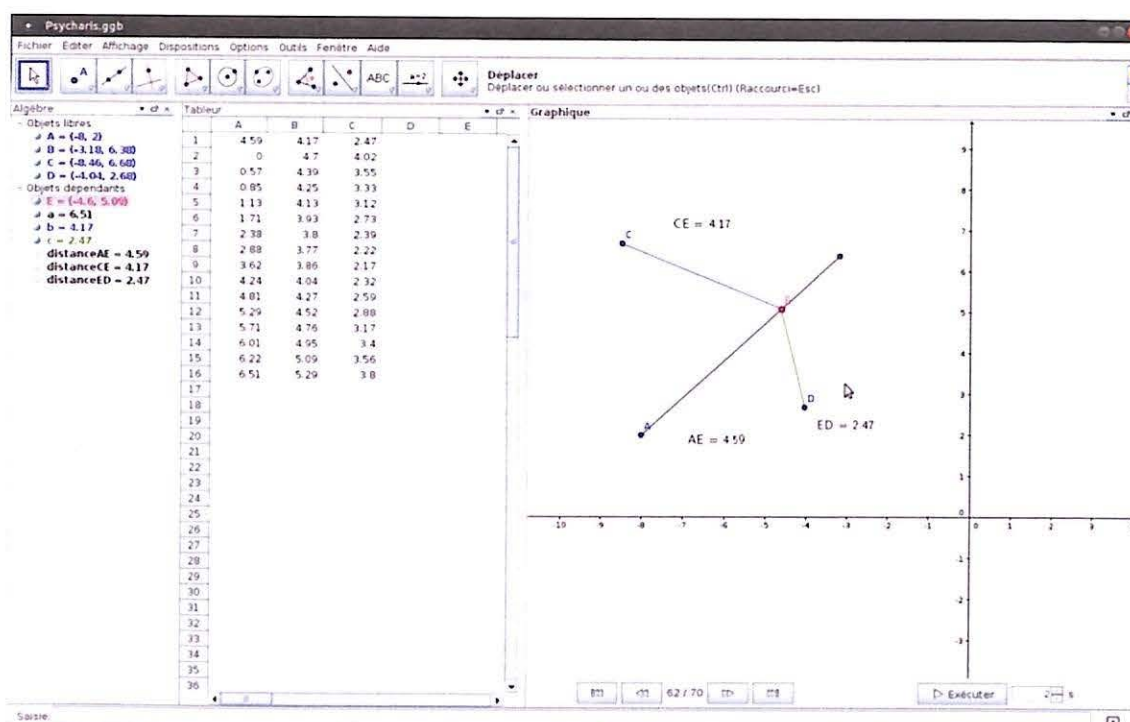


Figure 5. Trois registres de représentation pour la même situation mathématique.

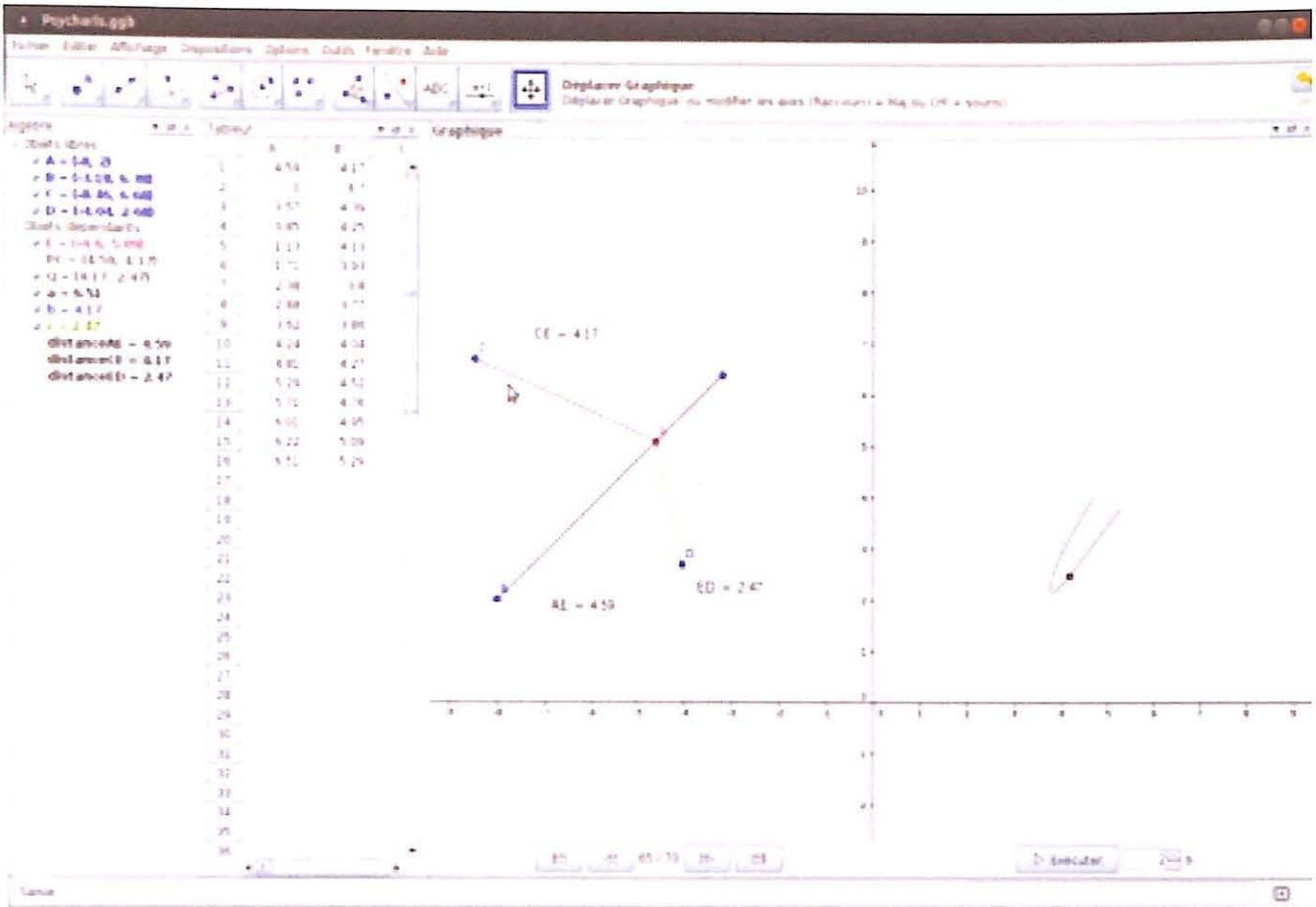


Figure 6. La représentation paramétrique de la relation entre $d1$ et $d2$

On peut considérer le repère orthonormée

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v})$ La représentation de la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} d1 = f1(x) \\ d2 = f2(x) \end{cases}$$

Dans ce repère : $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $M(x; 0)$ et

$C(x_c; y_c)$ et $d1 = f1(x) = \sqrt{(x - x_c)^2 + y_c^2}$ dont la dérivée vaut :

$$f1'(x) = \frac{x - x_c}{\sqrt{(x - x_c)^2 + y_c^2}}$$

①. Si $x_c < 0$ alors $f1'(x) < 0$ et $f1$ est strictement croissante sur $[0; 1]$.

②. Si $0 < x_c < 1$ alors $f1'(x)$ est négative sur $[0; x_c]$, nulle en x_c et positive sur $[x_c; 1]$. La fonction $f1$ est donc décroissante puis croissante.

③. Si $x_c > 1$ alors la fonction est décroissante.

$f1$ est donc une bijection si et seulement si

$x_c \notin]0; 1[$. Dans ce cas, elle est inversible et

$x = f1^{-1}(d1)$ et par conséquent $d2 = f2(f1^{-1}(d1))$ et la relation est fonctionnelle.

Géométriquement, si le point C ne se trouve pas dans la bande de plan limitée par les deux droites

perpendiculaires à [AB] passant par A et B, la relation (d2, d1) est fonctionnelle. Et la réciproque ?

La relation n'est pas fonctionnelle en général mais elle l'est lorsque C et D appartiennent à une

même perpendiculaire au segment [AB] ; en effet :

$$d1 = \sqrt{(x - x_c)^2 + y_c^2}$$

$$d2 = \sqrt{(x - x_c)^2 + k^2 y_c^2} = d1^2 + (1 - k^2) y_c^2 = d1^2 + K$$

puisque C et D ont la même abscisse dans le repère considéré.

Dans cet exemple, les conversions entre registres de représentations sont la clé de la résolution du problème. Le logiciel, en permettant la multi-représentation et la mise en relation entre ces représentations constitue un milieu dont les rétroactions permettent les validations des expériences

menées sur les objets mathématiques. Pour construire à partir de ce début d'analyse une situation didactique, le niveau de classe, les objectifs, les pré-requis etc. doivent encore être réfléchis.

Dans cet exemple, les conversions entre registres de représentations sont la clé de la résolution du problème. Le logiciel, en permettant la multi-représentation et la mise en relation entre ces

représentations constitue un milieu dont les rétroactions permettent les validations des expériences

menées sur les objets mathématiques. Pour construire à partir de ce début d'analyse une situation

didactique, le niveau de classe, les objectifs, les pré-requis etc. doivent encore être réfléchis.

3.2.2 Le deuxième exemple est typique de la nécessaire conversion entre registres de

représentations pour atteindre une solution. L'expérience sur un logiciel de géométrie dynamique permet facilement de conjecturer que les deux

segments seront de même longueur et

perpendiculaires. En revanche, ni la construction de la figure, ni le déplacement de points ne

donnent d'indices quant à la solution de ce problème.

Une solution très simple provient d'un changement de représentations menant à un changement de

cadre : les objets géométriques seront représentés dans le plan complexe et le cadre algébrique

permettra de conclure en quelques lignes :

avec des notations évidentes :

$$b - p = i(a - p), c - q = i(b - q), d - r = i(c - r), a - s = i(d - s)$$

D'où l'on tire :

$$(1 - i)p = b - ia, (1 - i)q = c - ib, (1 - i)r = d - ic, (1 - i)s = a - id$$

et finalement $\frac{q - s}{p - r} = i$ ce qui démontre le résultat annoncé.

Même s'il existe une solution vectorielle (en utilisant la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme

le vecteur $\overrightarrow{SQ}$ dans le vecteur $\overrightarrow{RP}$) et une solution géométrique³, le changement de point de vue qui résulte d'un changement de représentation des objets permet de mettre en évidence une solution au problème. En revanche, on voit bien ici que les représentations internes ne suffisent pas à faire émerger une solution. Dans une telle situation, le professeur pourra s'appuyer sur les représentations externes pour faire profiter tous les élèves des approches peut-être différentes des élèves.

3.2.3 Cet exemple est tiré du projet européen EdUmaths dans lequel il est utilisé pour faire réfléchir

les professeurs aux possibles valeurs ajoutées de l'usage des technologies :

Cette partie du module est consacrée à la découverte de ces valeurs ajoutées, sans pour autant masquer les difficultés (en termes d'enseignement et d'apprentissage) à travers l'exemple de cette situation particulière. Le

second objectif de cette section est de comprendre les modifications possibles de la situation lorsque l'on utilise tel ou tel logiciel. Cela est à relier à la fois avec le concept didactique de variable didactique mais également avec la genèse instrumentale.⁴

Dans cette situation, la technologie permet d'expérimenter de manière dynamique la relation entre les fonctions, les courbes et l'analyse géométrique du problème, comme on le voit dans le « jeu de cible » décrit ci-dessous :

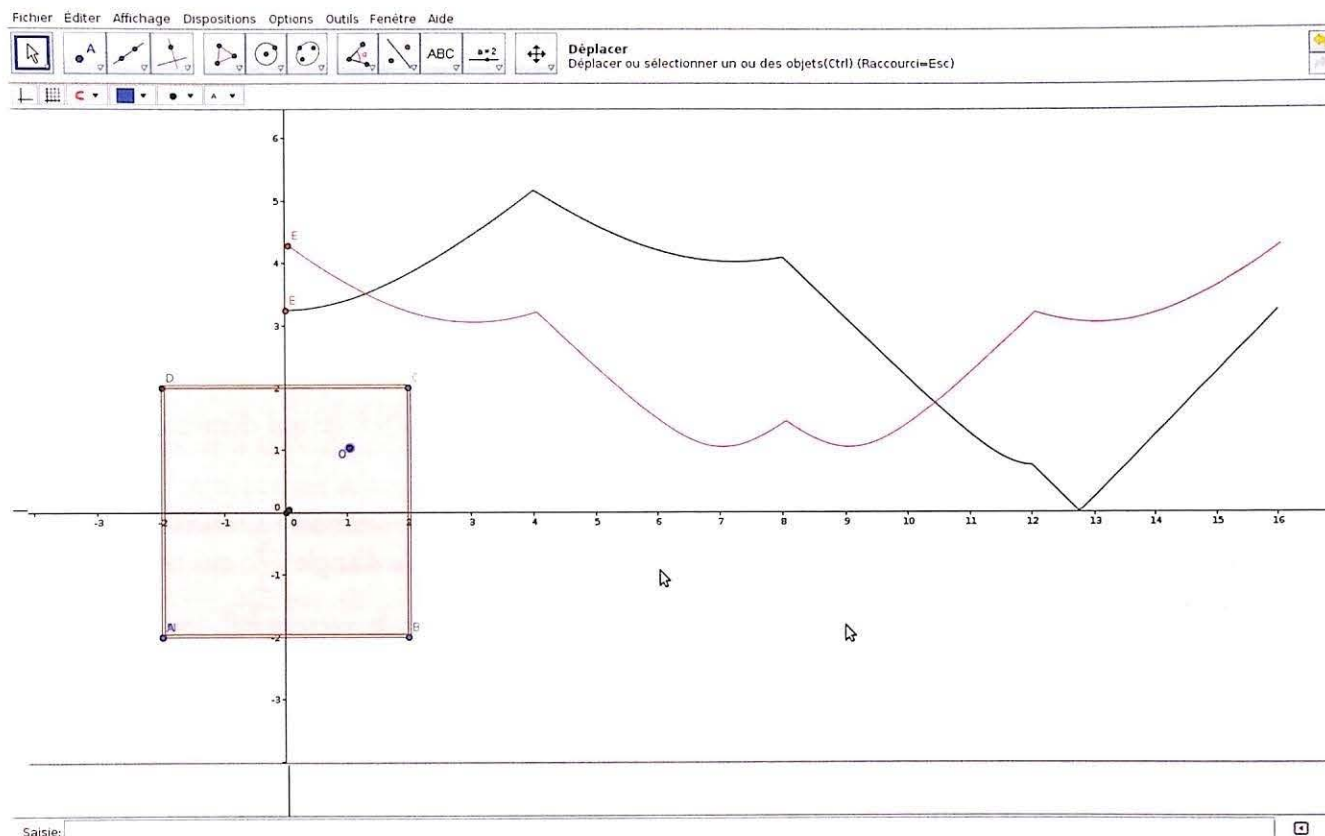


Figure 7. Jeu de cible

La courbe rouge correspond à la distance de M à O lorsque M se déplace sur le carré $ABCD$. La question posée est de déterminer la position du point O pour que la courbe « rouge » coïncide avec la courbe « noire ». Dans cette situation, la technologie permet d'expérimenter de manière dynamique la relation entre les fonctions, leurs courbes et l'analyse géométrique du problème. A partir de la situation mathématique, la situation didactique conduit les élèves à opérer les changements de représentations et à réfléchir une solution en interprétant dans un

registre les résultats des expériences menées dans un autre registre. Les interactions entre le problème géométrique et ses représentations sont le point de départ de l'exploration de différentes notions; les propriétés connues dans les environnements géométriques sont traduites de manière dynamique en registres de représentations graphiques ; ce qui mène à la caractérisation de ces propriétés dans le domaine graphique. Réciproquement, les propriétés visibles sur la courbe peuvent être interprétées dans le domaine géométrique :

- la **périodicité** : lorsque le point visé est le centre du carré, la fonction est "c-périodique" (c est la longueur du carré) tandis que lorsque le point visé n'est pas le centre, la fonction est « 4c-périodique » ; la situation géométrique (ou la situation « réelle ») montre clairement cette périodicité. Réciproquement, une période sur la courbe représente le chemin le long d'un côté ou le long du périmètre du carré ;

- la **symétrie** : la position du point visé est sur des lignes particulières du carré (diagonale, bissectrice perpendiculaire, côtés) permet de mettre en évidence les symétries locales ou globales sur la courbe. Réciproquement, les symétries éventuelles sur la courbe donne des informations sur la position du point ; il est possible de lier les symétries sur la courbe avec les axes de symétrie du carré ;

- la **dérivabilité** : l'observation de la courbe correspondante à la position du marcheur sur le sommet du carré permet de se poser la question de la dérivabilité de la fonction et son interprétation graphique ; cette observation se produit également lorsque le point visé est sur un côté du carré.

4. En guise de conclusion

A travers ces trois exemples, les rapports entre les usages des technologies et l'apprentissage des mathématiques sont abordés sous l'angle des

multi-représentations enrichies par les possibilités de conversions dynamiques entre registres de représentations. L'organisation du travail des élèves dans un environnement technologique passe cependant par des éléments fondamentaux :

- la mise en place des conditions nécessaires à l'expression de tous les élèves, en particulier par la construction d'un milieu didactique dont les rétroactions vont permettre l'apprentissage,
- le travail du professeur pour animer, observer et institutionnaliser les connaissances construites,
- la multi-représentation interne qui permet à travers les usages d'applications en relation les unes avec les autres de donner du sens aux objets mathématiques en les éclairant sous des angles différents,
- la multi-représentation externe qui favorise la comparaison et la confrontation des stratégies mises en place dans la classe et qui favorise une réorganisation des connaissances.

Il apparaît, par ailleurs, de plus en plus difficile de faire abstraction à l'intérieur de l'école des évolutions de la technologie et de ses usages quotidiens en dehors de l'école.

1 Peirce, C. (1938/1978) *Ecrits sur le signe*, Le Seuil, Paris.

2 Brousseau, G. (2004). *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble.

3 Une solution géométrique repose sur le résultat suivant qui se démontre en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$: ABC est un triangle. On construit sur les côtés [AB] et [AC] des carrés ADEB et ACFG directs, de centres respectifs P et Q. O est le milieu de [BC]. Alors les segments [OP] et [OQ] sont perpendiculaires et de même longueur.

4 <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/journees-maths/>

5 <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/manifestations/dossier-manifestations/conference-nationale>

6 <http://math.univ-lyon1.fr/mmil/>

7 <http://www.cfem.asso.fr/>