

المنهج التحليلي وفلسفة الرياضيات عند جوتلوب فريجه

د\ عصام زكريا جميل

كلية الآداب - جامعة القاهرة

الملخص

لا يختلف المقصود بالتحليل في استخدامه الفلسفي عن استخدامه في اللغة العادية ، ففي قاموس "لسان العرب" مادة "حلل" وفي قاموس مختار الصحاح "باب" "رد" فهي تعني حل الشيء أو فك المركب إلى عناصره التي يتكون منها ، فتحلل شيء يعني أن تفكه من أجل أن تحصل على فهم أفضل لما يتم تحليله. والواقع أن الاستعمالات المختلفة لمفهوم التحليل التي يأخذ بها فلاسفة المعاصرون تشابه في معناها وتتجه كلها وجهة واحدة بحيث تؤلف أفراداً من أسرة واحدة هي التي نطلق عليها اسم "التحليل الفلسفي" أعني الاهتمام بفهم بناء اللغة عن طريق الدراسة الدقيقة لعناصرها والعلاقات التي تقوم بين هذه العناصر حتى أن الفيلسوف "التحليلي" يتميز عن الفيلسوف "التأملي" بتركيزه على دراسة اللغة سواء كانت اللغة الطبيعية أو اللغة المنطقية - الرياضية.

يذهب العديد من المؤرخين إلى أن المنهج التحليلي في العصر الحديث ظهر مع كتابات "جورج إدوارد مور" و"برتراند رسل" والواقع أن هذا الرأي يعد إنكاراً لحقيقة يدينه الوضوح وهي أن المنهج التحليلي استخدم بصورته الكاملة في كتابات الفيلسوف الألماني الشهير "فريجه" وبخاصة في فلسفته الرياضية فهو علي حد رأي رسل الرائد الأول للمنهج التحليلي . لقد استخدم "فريجه" المنهج التحليلي بمعانيه المتعددة: 1- التحليل باعتباره تعريفاً. 2- التحليل باعتباره تبريراً. 3- التحليل باعتباره نوعاً من "الاختزال" أو "الرد". هذا النوع الأخير هو ما ينصب عليه بحثنا . لقد حاول فريجه "رد" الرياضيات إلى المنطق من خلال المنهج التحليلي ، وهو ما ظهر في كتبه المتعددة "التصورات" و"أسس علم الحساب" و"القوانين الأساسية لعلم الحساب". وفي هذا البحث سوف نلقي الضوء على طبيعة هذا المنهج التحليلي من خلال تحليل مفهوم العدد .

تمهيد : المنهج التحليلي والزعة اللوجسطقية.

أولاً : تحليل طبيعة العدد :موقف "فريجه" من النقصوم.

- أ- تحليل العدد باعتباره موضوع تجريبي (مل).
- ب- تحليل العدد باعتباره تعريف مبتكر (هنكل).
- ج- تحليل العدد باعتباره رمز لا معني له (توماي).

ثانيا: تحليل العدد في حدود تصورات منطقية بحتة. (فريجه).
قائمة بالأسماء المختصرة لمؤلفات "فريجه" الواردة في البحث:

1- أسماء الكتب :

- Frege, G., "Begriffsschrift", a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for pure Thought", trans., By Heijenoort, in "Frege & Godel: two texts in Mathematical logic", Harvard, U.S.A., 1970.
- Frege, G., "Foundations"; "The Foundations of Arithmetic", trans., By J.L. Austin, Basil Blackwell, Oxford, 1950.
- Frege, G., "Basic laws", "The Basic laws of Arithmetic", trans., By M.Furth, University of California press, Berkeley and Los Angeles, 1967.
- Frege, G., "Investigations", "Logical Investigations", trans., By P.T.Geach & R.H. Stoothoff, Basil Blackwell, Oxford, 1977.

2- أسماء الكتب التي تحتوي المقالات و الرسائل :

- "Translations from The Philosophical Writings of Gottlob Frege", edited By, P.Geach & M. Black, 3rd ed. Basil Blackwell, Oxford, 1980.
- "Posthumous Writings", trans., By P. Long & R. White, edited By, H. Hermes & F. Kambartel & F. Kaulbach. Basil Blackwell. Oxford, 1979.
- "Collected Papers on Mathematics, Logic, And Philosophy", trans., By M.Black & V.H.Dudman & P.Geach & H.Kaal & E.H.W.Kluge & B.McGuinness & R.H.Stoothoff, edited By Brian McGuinness Basil Blackwell. Oxford, 1984.
- "Gottlob Frege: "Conceptual Notation and Related Articles" . By T. W. Bynum, Oxford, 1972
- "Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence", trans., By H.Kaal, Edited By G.Gabriel & H. Hermes & F.Kambartel & C.Thiel & A.Veraart. Basil Blackwell. Oxford, 1980.

بالرغم من أن كتابات "فريجه" قد نالت التقدير لتقديمها معالجة وافية وعلى أوسع نطاق للمنطق وفلسفة اللغة وإثارتها لمشكلات كثيرة لمن جاء بعده، إلا أن الجزء الأعظم من كتاباته كان تأسيس المنهج التحليلي. فقد حاول إظهار أن الرياضيات ومصطلحاتها يمكن أن يتم تحليلها باستخدام مصطلحات تعود فقط إلى المنطق، وأن حقائق الرياضيات ما هي إلا اختصارات تعريفية لحقائق المنطق، وأن كل حقائق المنطق يمكن أن تشتق من عدة قوانين مبداية بوضوح بواسطة قوانين الاستدلال المصاغة بشكل دقيق** وتمدنا كتابات "فريجه" بتقارير واضحة عن دوافعه من وراء المنهج

** علي الرغم من أن للنزعة اللوجسطقية عدة أنماط مختلفة ألا أن "بيناسيراف" يحدد لنا الهيكل العام لهذه الأنماط في الآتي :

1- إن الصدق الحسابي يمكن تحليله أو ترجمته من خلال الصدق المنطقي.

2- تم هذه الترجمة أو التحليل عن طريق:

التحليلي في الرياضيات فهو يقول: "إن إدراكنا للبنية الكاملة للرياضيات ناقص".⁽¹⁾ ويؤكد أن دقة معظم البراهين الرياضية لمعاصريه والسابقين عليه هي دقة وهمية ، وأن الرياضيين لم يحققوا أكثر من مجرد التأكيد التجريبي لأسس الرياضيات ، بل إن الرياضيات تحتوي على تناقضات لم يتم الإفصاح عنها".⁽²⁾ ويستشهد في كتابه "الأسس" و"القوانين" بالعديد من الفلاسفة والرياضيين موجهها لومه لهم بسبب تجاهلهم لعدم حساسيتهم تجاه قضايا الاستمولوجيا الرياضية فيقول : " من غير المفيد في علم الحساب القيام بأي تقرير من دون برهان أو تقديم برهان زائف ، وبعده ننتظر لنري إن كان أحد سيثبت زيفه ، فعلى النقيض لا بد أن يكون لكل تقرير برهان حقيقي".⁽³⁾ فمن وجهة نظر "فريجه" أن المعرفة الرياضية الحقيقية عند معاصريه والسابقين عليه لم تحقق الخاصية اليقينية التي يجب أن يتميز بها هذا العلم " فلا بد أن تزيل البراهين الرياضية الصحيحة كل شك".⁽⁴⁾ "بل لا بد أن تعيق (البراهين الرياضية الصحيحة) إمكانية حدوث تناقضات غير متوقعة".⁽⁵⁾ أو "إمكانية حدوث حالات تناقض في المستقبل".⁽⁶⁾ ويصرح في مقالته "أخطاء منطقية في الرياضيات" بالآتي : "إذا ما سألنا عن الشيء الذي يعطي للمعرفة الرياضية قيمتها ، فإن الجواب يكون بأن القيمة لا تتعلق بما هو معروف بل بكيفية معرفته ، وأن درجة الوضوح والبداهة في الصلات المنطقية أهم من محتوى المعرفة هنا".⁽⁷⁾

ولعل "فريجه" يريد أن يؤكد هنا أن هناك مزايا للمعرفة الرياضية وهي الوضوح والبداهة والتي عجزت وجهات نظر معاصريه (من الرياضيين والفلاسفة) في امتلاكها ، بل أن "فريجه" يصف هذا العجز بأنه أمر فاضح scandal ويكشف عن جهل فلسفي".⁽⁸⁾ وينشأ هذا الجهل الفلسفي من وجهة

أ- تقديم تعريفات للتصورات الخاصة بعلم الحساب بمصطلحات منطقية بحتة.

ب- ملاحظة أن الترجمات التي نستخرجها من هذه التعريفات تحمل الصدق الحسابي إلى الصدق المنطقي والكذب الحسابي إلى الكذب المنطقي.

3- هذا التفسير الحسابي يؤسس لتحليلية القضايا الرياضية والمنطقية للاعتبارات التالية :

أ- بما أن من المفترض أن التعريفات تحفظ المعنى فإن الترجمات المنطقية لها نفس المعنى تماماً مثل القضايا الحسابية. وب- الصدق المنطقي في حد ذاته صحيح بالارتباط بالمعنى وفي هذه الحالة نقصد معاني الجزئيات المنطقية الظاهرة فيها وبالتالي التحليلية. انظر

Benacerraf.P., : " Frege: The Last Logician " in "Frege's Philosophy of Mathematics " Edited By William

Demopoulos , Harvard University Press , Cambridge , Massachusetts ,London , England pp41-67 , p 43

(1) Frege, G.: "Foundations" p.ii

(2) Ibid., p.ix

(3) Frege., G.: " Basic laws", Frege Against the Formalists vol,ii " in "P.W.F " p.164

(4) Frege, G.: "Foundations" p.2

(5) Ibid., p.ix

(6) Frege., G.: " Basic laws", Frege Against the Formalists vol.ii " in "P.W.F " p.164

(7) Frege., G.: " Logical Defects in Mathematics 1898 /199 " in "P.W" .p.157

(8) Frege, G.: "Foundations" p. ii

نظرة نتيجة للافتقار إلى تحليل مناسب للتصورات الرياضية مما ينتج عنه عجز في تقديم براهين تتضح فيها المزايا السابقة ، لذلك فإن النهج التحليلي سيعمل علي تخطي نقائص وعيوب المعرفة الرياضية من خلال عرض المسلك المعرفي الصحيح لها ، ونعني بالطبع الأساس المنطقي للرياضيات ، فمن خلال هذا الأساس " فإن الرياضيات ستكون قادرة على دعم مفاهيمها من خلال سلسلة من الاستدلالات كل منها بسيط منطقياً وقاطع تماماً".⁽⁹⁾

أولاً : تحليل طبيعة العدد :موقف "فريجه" من الخصوم:

يفتح "فريجه" كتابه "الأسس" من خلال بيان أسفه علي حقيقة أن أحداً لم يقدم تحليل كافياً علي السؤال ما هو العدد ؟ "أليس من قبيل العار أن يكون علمنا من الإبهام فيما يتعلق بأول وأهم موضوعاته (العدد) ، وهو الموضوع الذي يبدو بسيطاً في الظاهر ؟ فهناك أمل ضعيف إذن في قدرتنا علي تبيان ماهية العدد ، فلو كان تصوراً ما أساسياً لعلم راسخ يثير الصعوبات ، فإن من المهام الملحة أن نفحصه عن قرب حتى يتم التغلب علي هذه الصعوبات".⁽¹⁰⁾

ولقد أدرك "فريجه" أن هناك طريقاً واحداً للتغلب علي هذه الصعوبات " فقد أدركت أنني كنت منقاداً إلى البحث عن تحليلات فلسفية بقدر يفوق ما يمكن أن يبرهن عليه الرياضيون ، إن أي فحص مستفيض لتصور العدد سيكون بحثاً فلسفياً".⁽¹¹⁾ وفي معرض رأيه بأن البرهان حول طبيعة العدد لا بد أن يتم تبريره منطقياً بشكل مستفيض يقول: " ومع هذا .. تبقى دقة البرهان أمراً وهمياً طالما لا يتم تبرير التعريفات إلا كمجرد فكر طارئ.... ولن نحقق عبر تلك الأساليب أكثر من مجرد تأكيد تجريبي ، وعلينا حقاً أن نواجه إمكانية أن يقابلنا في النهاية تناقض يؤدي إلى انهيار هذا الصرح ، ولهذا السبب شعرت بأنني مضطر إلى العودة لمبادئ المنطقية".^{(12)*}

ويجمع "فريجه" في نص واحد ربما آخر ما كتبه عن ماهية العدد أهم الآراء التي تناولت تصور العدد ولم تقدم التبرير والتحليل المنطقي الكافي لبيان طبيعة هذا المفهوم ويقول فريجه:

⁽⁹⁾ Ibid., P 2 and p.4

⁽¹⁰⁾ Frege, G.,: "Foundations"p. ii

⁽¹¹⁾ Ibid., p. v

⁽¹²⁾ Ibid., p. ix

* المدهش حقاً في أقوال "فريجه" أنه توقع في كتابه "الأسس" ما سينتهي عليه مشروعه في كتابه "القوانين" من انهيار والأكثر دهشة أنه لم يلتزم بما قاله في نصه السابقة فإذا انهار الصرح فلا بد من العودة إلى المبادئ المنطقية الأساسية وهو ما لم يفعله ، كما سنوضح ذلك في المحور الثالث .

"إن الاستخدام النعتي لكلمة العدد استخدام مضلل، ففي علم الحساب تظهر كلمة العدد في صورة المفرد بوصفها اسم علم لموضوع هذا العلم؛ فليست مصحوبة بأداة تعريف، إلا أنها مشبعة...، ولكننا مع هذا نجد لدى علماء الرياضيات افتقاراً كبيراً للوضوح واختلافاً فيما بينهم. فهم مختلفون حول ما إذا كان العدد موضوعاً شيئاً يعمل علم الحساب علي البحث فيه أم أنه مجرد تعداد؟ فهل الحساب لعبة أم علم؟ فهناك من يري أننا نفهم من خلال كلمة "العدد" سلسلة من الموضوعات الشبئية من ذات النوع، وهناك من يري أن العدد بنية مادية فراغية ناتجة عن الكتابة، بينما ينكر ثالث أن يكون العدد متعلق بالفراغ علي الإطلاق، وربما يأتي وقت يظن فيه علماء الحساب أن العدد هو ما يرون هم أنه هو، ولو لم يكن الأمر كذلك، فإنهم يربطون معاني مختلفة لجمال لها نفس المفردات، ولو ظلوا علي اعتقادهم بأنهم يعملون علي نفس الفرع المعرفي، فإنهم لا يضللون سوي أنفسهم، فأني تعريف في علم الحساب لا يرد في سياق برهان ما فإنه لا يستوفي الغرض منه، ونفس الأمر ينطبق علي كل مصطلح في علم الحساب (" المتتالية اللامتناهية "، " المحدد "، " التعبير "، " المعادلة ")، فهل تلك الأشياء التي نراها تمثل موضوع بحث علم الحساب؟ أم أنها مجرد علامات عليه، أي وسيلة بها نتعرف علي الموضوعات التي تخضع للفحص، وليست هي تلك الموضوعات نفسها؟ هل كل ما يتم تعيينه هو العدد؟ وإذا لم يكن كذلك، فما هو الذي يتم تعيينه؟ فإني أن يتفق علماء الحساب علي إجابات تلك المسائل وإلي أن يصلوا إلي مسار موحد في التعامل معها، فإن الحساب لن يرتقي إلي مرتبة العلم بالمعني الحقيقي لهذه الكلمة، أو أنه علم مكون من مجموعة كلمات لا يهم معها المعني الذي تحمله".⁽¹³⁾

هكذا يشخص لنا "فريجه" الأمراض التي يعانها علم الحساب والمشكلات التي تجابه هذا العلم، والشروط التي علي أساسها يمكن للحساب أن يقام علي أسس سليمة. ونقف الآن عند تحليل أهم الاتجاهات التي يعارضها "فريجه" حتى نتبين موقفه في نهاية الأمر.

أ- تحليل العدد باعتباره موضوع تجريبي (مل)

ينظر "مل" إلى علم الحساب علي أنه علم تجريبي لا يختلف عن سائر العلوم التجريبية الأخرى إلا في أمرين: الأول أن مادة موضوع الرياضيات أكثر عمومية من غيرها في أي مجال من مجالات البحث العلمي، والثاني أن قضايا الرياضيات قد اختبرت وتأكدت باقتناع أكبر من قضايا العلوم الأخرى، ففكرة العدد (2) مثلاً أو فكرة المثلث وغيرها من موضوعات علم الحساب قد جاءت إلينا من تعميم

⁽¹³⁾ Frege, G.: "Notes for Ludwig Darmstaedter/ 1919 " in " P.W" .p.256-257

وصلنا إليه من خلال ما قد شاهدناه بحواسنا من أزواج أو مثلثات.⁽¹⁴⁾ وعلى ذلك فكل ما لدينا من حقائق وقوانين في علم الحساب تعود إلى مصدر وحيد هو الخبرة الحسية ، "فالأعداد ليست مستقلة بذاتها ، فجميع الأعداد يجب أن تكون أعداد لأشياء ، ولا توجد أعداد قائمة بذاتها أو مجردة ، بل يشير كل عدد 2 ، 3 ، 4 إلى ظواهر فيزيائية ويحمل خاصية فيزيائية".⁽¹⁵⁾ ويعرف "مل" الأعداد بالآتي: "أن المعادلة $7 = 2 + 5$ قائمة على البديهية القائلة أن كل ما هو مصنوع من أجزاء يصنع من أجزاء هذه الأجزاء وعلى التعريفات $1 + 6 = 7$ ، $1 + 5 = 6$ ، وتكون هذه البديهية واضحة للحواس في جميع الأحوال ، ولكونها حقائق عامة فهي تعتبر حقيقة استقرائية".⁽¹⁶⁾

ويحلل " فريجه" هذا التعريف للأعداد وينصب تحليله على النقاط التالية :

1- ما يقصده "مل" بالتعريفات.

2- ما يقصده "مل" بعلامة الإضافة (+) الواردة في تعريفه للأعداد .

3- ما يقصده "مل" بالحقائق العامة الاستقرائية.

بالنسبة إلى النقطة الأولى يرى "فريجه" "أن تعريفات "مل" تبدو عاجزة وقاصرة عن تأسيس العلم ، كما هو الحال مع "ليننتز"، حيث إنه يقوم بتعريف الأعداد الفردية ، بنفس أسلوب "ليننتز" إلا أن هذه الفكرة الوقادة سرعان ما تمخض ، بسبب إيمانه بأن جميع المعارف تجريبية".⁽¹⁷⁾

والسبب الحقيقي الذي رأي من خلاله "فريجه" أن تحليل "مل" للعدد يفشل هو أن "مل" يخبرنا "بأن تلك التعريفات لا تعد تعريفات بالمعنى المنطقي للكلمة ، فهي لا تخصص معني ثابتاً للمصطلح وحسب ، بل وتقوم كذلك بالتأكيد على أمر ملحوظ مسلم به".⁽¹⁸⁾ ومن هنا تسأل "فريجه" ما هي تلك الحقائق الملحوظة أو الحقيقة المادية (وهي من تعبيرات مل) التي يتم التأكيد عليها في تعريفات العدد 777864 مثلاً ، فمن بين خضم الحقائق المادية في فكر "مل" ، لا يسمى لنا سوى واحدة وهي التي يتم التأكيد عليها في تعريف العدد 3".⁽¹⁹⁾ فوفقاً لرأيه فإن هذا العدد يحتوي على تراكم الموضوعات المتاحة ، فانطباع الأشياء يكون هكذا: . فمقد تنفصل إلى جزئين هكذا . . . فتكون $1+2$ ويعلق "فريجه" ساخراً على هذا التعريف فيقول: يا لرحمة السماء! فكل الأشياء في العالم غير مسمرة ، لأنها لو

⁽¹⁴⁾ أ. د/ محمد مهران رشوان : " في فلسفة العلوم ومناهج البحث " ، 2003 ص 82 ، وانظر أيضاً أ.د/ محمود فهمي زيدان: " في فلسفة اللغة "

من ص 78 إلى 81 وانظر أيضاً أ.د/ ذكي نجيب محمود " المنطق الوضعي " ص 120.

⁽¹⁵⁾ أ. د/ محمد محمد قاسم: " جوتلوب فريجه " نظرية الأعداد بين الأستمولوجيا والأنطولوجيا " دار المعرفة الجامعية ، الإسكندرية 1991

ص 38 .

⁽¹⁶⁾ Mill, J.S. , "System of Logic, Ratiocinative and Inductive". London 1925.p 401

⁽¹⁷⁾ Frege, G.,: "Foundations" p. 9

⁽¹⁸⁾ Frege, G.,: "Foundations" p. 9

⁽¹⁹⁾ Frege, G.,: "Foundations" p. 9

كانت كذلك لما كان في الإمكان الحصول علي هذا الفصل ، ولما أصبحت $3 = 1+2$ ، وللأسف فإن "مل" لم يفسر لنا الوقائع الطبيعية التي تتدرج تحت الرقنين صنفراً وواحداً⁽²⁰⁾. إذا كان تعريف كل عدد يؤكد فعلا على حقيقة مادية خاصة كما يؤكد "مل" ، فإننا سنعجز دوماً عن تمييز الشخص الذي يقوم بعمليات حسابية لأعداد تتكون من تسعة أرقام ، وربما لم يكن "مل" يقصد أن يبالغ فيقول : (بأن كل تلك الحقائق تستوجب الملاحظة واحدة تلو الأخرى) ، ولكنه يظن أن من الكافي أن نشق من خلال الاستدلال المنطقي قانوناً عاماً يتم فيه الجمع بينهما جميعاً ، ولكنك لو جربت وضع هذا القانون لوجدته مستحيلاً ، ولا يكفي أن نقول توجد مجموعات كبيرة من الأشياء القابلة للانقسام لأن هذا لا يعد تقريراً لوجود مجموعة كبيرة من ذلك الحجم ، وتلك النوعية كما هو متطلب مثلاً للعدد 1000000 ، أو للوسيلة التي يمكن تقسيمها بها ، فلا بد أن تؤدي نظرية "مل" بالضرورة إلى مطلب وهو أن هناك حقيقة ملحوظة بالنسبة إلى كل عدد ، ففي القانون العام نجد أن ما هو خاص بالعدد 1000000 أمر مفقود مع أنه ينتمي بالضرورة لتعريف القانون ، فوفقاً لوجهة نظر "مل" فإننا نعجز عن تحقيق $1000000 = 1 + 999999$ ما لم نكن قد لاحظنا مجموعة من الأشياء المنقسمة بهذه الطريقة تحديداً وبشكل يختلف عن خصائص أي عدد كان⁽²¹⁾.

أما بالنسبة إلى النقطة الثانية فيذهب "فريجه" إلى أن هناك خلطاً في النظرية التجريبية بسبب أنها تستخدم الرمز (+) ليشير إلى الإضافة الفيزيقية ، فإننا عندما نقول $7=2+5$ لا يعني أننا صببنا وحدتين من الحجوم لسائل على 5 وحدات من الحجوم لسائل فحصلنا على 7 وحدات أن هذه الجملة الأخيرة تطبيق لقضية رياضية ، وهي تنطبق فقط على هذه الحالة بفرض أنه لم يحدث تغيير في الحجم نتيجة التفاعل كيميائي بالاضافة إلى ذلك فيوجد العديد من التطبيقات لهذه المعادلة على عدد من الحوادث والصفات أو على الجذور حيث لا يكون هناك محل للبحث عن الإضافة الفيزيقية⁽²²⁾. ولتأكيد ما يقوله "فريجه" : افرض أننا وضعنا بعض الميكروبات علي لوحة زجاجة صغيرة ثم وضعنا اثنين منها في إناء ثم أضفنا إليهما ثلاثة أخرى ، ثم عددنا عدد الميكروبات في الإناء ، فقد نجددهما ستة ميكروبات لا خمسة فهل يدل هذا علي خطأ العملية الحسابية $5=3+2$ ؟ لا قد نكون أخطأنا في العد ، أو قد انشطر ميكروب واحد إلى جزأين بين عمليتي العد الأول والثاني⁽²³⁾. يقول "فريجه" : "أن من يزعم أن (ثلاثة) خاصية ذي ثلاثة أجزاء فعليه أن يقدم لنا - ولو على سبيل التحدي - أمثلة على مجموعة

(20) أ. د/ محمد مهران رشوان : " في فلسفة العلوم ومناهج البحث "، ص 85 وانظر نص "فريجه" "Foundations" p. 9

(21) Frege, G., "Foundations" Pp.10-11

(22) Ibid., P.13

(23) أ. د/ محمود فهمي زيدان: " في فلسفة اللغة " ص 80

ذي-1/ من الأجزاء ويصف "فريجه" موقف "مل" مزدرياً حجتة أصبح علم الحساب عندئذ مثل كعكة زنجبيل محشوة بالحصي".⁽²⁴⁾

أما بالنسبة إلى النقطة الثالثة: فيعترض "فريجه" على رأي "مل" القائل بأن القوانين العامة للحساب حقائق استقرائية^{*} قائلاً: "بأن الاستقراء نفسه يبدو أنه يستلزم بعض القضايا العامة للحساب حيث إنه في ذلك الاستخدام الذي من المفروض فيه أنه منهج للعلم، وليس مجرد عملية للعيش أنه يعتمد على نظرية الاحتمال".⁽²⁵⁾، فإذا ما أدركنا وجود حقائق عامة، فلا بد كذلك من أن نقر بوجود مثل هذه القوانين الابتدائية، حيث إن لا شيء ينتج عن الحقائق الفردية ما لم يكن معتمداً على قوة قانون معين، فيعتمد الاستدلال ذاته على قضية منطقية تبين أن المنهج الاستدلالي يمكن أن يرسخ لصدق قانون معين أو على الأقل لبعض احتمالات رجائه، وإذا ما أنكرنا ذلك يصبح الاستدلال مجرد إبهام سيكولوجي، وإجراء يدفع إلى الاعتقاد في صدق قضية منطقية معينة من دون تقديم أي مبرر لهذا الاعتقاد".⁽²⁶⁾

يقول "فريجه" بصدد معارضته لنزعة التجريدية عند مل: كان "مل" على حق في قوله: بأن تفاحتين تختلفان من الناحية الفيزيائية عن ثلاث تفاحات، وأن حصانين يختلفان عن حصان واحد كظواهر مرئية وملبوسة، لكن هل لنا أن نستدل من ذلك على أن الثنائية أو الثلاثية أشياء فيزيائية، أن زوجاً واحداً من الأحذية قد يكون بوصفة ظاهرة ملبوسة ومرئية كاثنتين من الأحذية، ثمة

(24) أ. د. محمد محمد قاسم: "جوتلوب فريجه" ص 39

*لفريجه موقف من الاستقراء ومبدأ السببية القائم عليه نظرية "مل" التجريدية في الأعداد فقد رأي "فريجه" أن "الاستقراء ومبدأه خرافة" متوقفاً بذلك ما سيقوله بور: فيذهب فريجه للآتي: "مع أن كل حكم نصدره له اشتراطاته السببية، فإن هذا لا يعني أن كافة تلك المسببات تعد أساساً تستدعي الحكم، وهناك ميلاً تجريبياً في الفلسفة لعدم إبداء اهتمام كاف بهذا ولذلك - ولأن منشأ تفكيرهم (التجريبيين) هو الخبرة - فإن الأمر ينتهي بالفلسفة إلى اعتبار أن معارفنا تجريدية. فالمسببات تستثير إصدارنا للأحكام تبعاً لقوانين سيكولوجية؛ فهي قادرة على أن تقودنا إلى الكذب بنفس درجة قدرتها على أن تقودنا إلى الصدق؛ فهي لا ترتبط بعلاقة متأصلة أيّاً كانت مع الصدق؛ كما أنها ليست على دراية بنقيض الصدق والكذب. فالمزمار الذي يرتبط رزقه بتقلبات الطقس، يبحث عن وسيلة يحدد بها الطقس المتوقع مقدماً. فلا عجب في أنه يحاول أن يربط بين مراحل القمر وتقلبات الطقس ويسأل نفسه عما إذا كان البدر المكتمل يعجل بحدوث تغير في الطقس أم لا. فإذا ثبت هذا الحكم - والحال قد يكون كذلك، لأن الطقس لا يتغير فجأة وحيث إنه من غير السهل تماماً أن نحدد ما إذا كان الطقس قد تغير أم لا - فهو منذ تلك اللحظة يعتقد أن الطقس مرتبط بالقمر، ويتخذ هذا الاعتقاد أساساً لأن كثرة الحالات التي ثبتت تعطي انطباعاً أكبر من الحالات المناقضة، وهو يظن الآن أنه يعلم هذا من الخبرة. هذه هي تحديداً طبيعة الخبرة في حالة التوجه التجريبي بين الفلاسفة. وهذا هو الحال مع كل خرافة. وفي العادة ما يكون من الممكن تحديد المسببات السيكولوجية. ومن الواضح أن مثل هذا التفسير لكيفية امتلاك المرء لمعتقد ما لا يبرهان عليه". انظر

Frege, G. "Logic, I" in P.W. p.1

(25) Frege, G.: "Foundations" p.16

(26) Ibid., p. 4 n,1

اختلاف هنا في العدد لا يقابله اختلاف فيزيائي ، ذلك لأن اثنين وزوجاً واحداً ليسا نفس الشيء على الإطلاق كما يعتقد "مل" بصورة بالغة الشذوذ".⁽²⁷⁾

ب- تحليل العدد باعتباره تعريف مبتكر (هنكل)

يذهب "هنكل" إلى أن "العدد اليوم لا يعد شيئاً ولا جوهرًا موجوداً منفصلاً عن الذات المفكرة وعن الموضوع الذي يثيره ، أعني عنصراً قائماً بذاته self-subsistent ، كما كان الحال بالنسبة إلى "الفيشاغوريين". فالسؤال ما إذا كان العدد موجود باليقين يمكن أن يفهم على أنه إشارة إلى الذات المفكرة أو إلى الأشياء المفكر فيها والتي يمثل العدد علاقات بينها . فما يؤخذ بوصفه مستحيل بالمعنى الدقيق عند الرياضيين يعد فقط مستحيل منطقياً ، أعني ، متناقض في ذاته self-contradictory ، إن الأعداد التي تعد مستحيلة في هذا المعنى لا يمكن أن تقبل ولا تحتاج إلى برهان ، ولكن إذا كانت الأعداد المهمة بها ممكنة منطقياً Logically possible ، وإذا كان تصورها واضحة ومعرفة تماماً ومن ثم خالية من التناقض ، فإن السؤال عما إذا كانت الأعداد موجودة يمكن تفسيره كالتالي: هل يوجد في العالم الحقيقي أو الواقعي المتاح لنا بحدس أساس لهذه الأعداد ، هل يوجد موضوعات شبيهة من النوع المعروف ، هل هناك علاقات معقولة من النوع المعروف من الممكن أن تكون الأعداد ظاهر فيها ؟"⁽²⁸⁾ وعلى الرغم من عدم وضوح هذا النص كما لاحظ "نيل" فإن "فريجه" يفهم منه أن الأعداد وفقاً لتصوير "هنكل" عبارة عن إنشاءات للعقل البشري أو قل تعريفات مبتكرة أو مبدعة".⁽²⁹⁾ ، ويرفض "فريجه" مثل هذا التعريف قائلاً : "ليس هناك من بين الأعداد المعلومة لنا حتى اليوم أي عدد (مبتكر) يحقق المعادلتين الآتيتين .

$$2 = 1 + \times$$

$$1 = 2 + \times$$

بشكل متزامن ، وقد يرد علينا بعض الرياضيين- كما يقول فريجه- بأنه ليس هناك شيء يمنعنا من أن نقدم رمزاً يحل المسألة وأن تحقيق المعادلتين آنياً يتضمن تناقضاً ، وهذا بالطبع مؤكد إذا طلبنا عدداً واقعياً أو عدداً مرجحاً عادياً لكي نحققها ، وكل ما علينا أن نقوم به هو أن نوسع نسقنا العددي أي أن نبكر أعداداً تقابل هذه المتطلبات الجديدة ... ويرد "فريجه" على هذا الرأي بالقول : "إن الرياضي لا

(27) أ. د. محمد محمد قاسم : " جوتلوب فريجه " ص 40 ، وانظر هذا النص لفريجه

Frege, G., "Foundations" pp.32-33

(28) Frege, G., "Foundations" pp.104-105

(29) Kneal .W., " The Development of Logic ", Oxford. University Press.1984. p.449

يستطيع أن يبتكر أشياء حسب رغبته مثله مثل الجغرافي فهو يستطيع أن يكتشف ما هو موجود ويطلق عليه اسماً⁽³⁰⁾.

لقد ذشأ توههم الرياضيين بأن هناك تعريفات مبتكرة من تاريخ الرياضيات ، فعندما تعود الرياضيون على عملية طرح 2 من 3 أخذوا يتكلمون عن عملية طرح 3 من 2 وقدموا الرمز-1 كنتاج لهذه العملية ، وعندما تعود الرياضيون على فكرة الجذر التربيعي للعدد الموجب أخذوا يتكلمون عن الجذر التربيعي للعدد السالب وقدموا الرمز (i) كاختصار للرمز-1√ وقد بدا في كلتا الحالتين أن مجال الرياضيات قد اتسع بالتسليم بشيء لم يعط من قبل ، وقد كان هذا بمثابة إغراء للقول : إن أعداداً جديدة قد ابتكرت بواسطة إعادة ترتيب الرموز القديمة ، ولكن هذا القول يتضمن خطأ خطيراً في التعريفات ، فالذي يظن أنه قد شرح استعمال الرمز (i) بأن كتب (i) = -1√ لا بد أنه يفترض معني الرمز√ ومع ذلك ليس هناك شيء في الشرح الأصلي لاستخدام هذا الرمز يبرر استخدامه في السياق الجديد⁽³¹⁾.

إن من يتكلم عن أن الأعداد أو الرموز الرياضية مجرد تعريفات مبتكرة كما يذهب "هنكل" كثيراً ما يقعون في أخطاء فقد يستخدم الرموز(+ ، -) بأكثر من معني ومن هنا يحذر "فريجه" من ذلك "فإننا نحتاج بدلاً من أن نعرف أولاً رمزاً لمجال محدود ثم نستخدمه لغرض أن يعرف نفسه بالنسبة إلى مجال أوسع ، أن نختار رموزاً مختلفة قاصرين إشارة الرمز الأول نهائياً على المجال الأضيق ، وبهذه الطريقة يكون التعريف الأول كاملاً ومحدداً تحديداً تاماً ، ... ولكن يبدو أن كثيرين من الرياضيين لا يهتمون بالتحليلات المنطقية لدرجة أنهم يستخدمون الكلمة لتقوم مقام ثلاثة أو أربعة أشياء مختلفة أكثر من أنهم يتخذون قراراً خطيراً بابتكار كلمة جديدة"⁽³²⁾. ويضيف "فريجه" في رفضه لهذا الاتجاه قائلاً: "إننا لا يمكن أن نتحدث عن أية خاصية رياضية للأعداد من دون العودة إلى ما تعنيه الرموز. فمثلاً، الخاصية المنتمية إلى (-1) كونه نتاج ضرب العدد 1 في نفسه- ستكون مجرد خرافة ، لأنه من غير الممكن لأي بحث مجهرى أو كيميائي-أياً كانت كيفية إتمامه-أن يوجد هذه الخاصية في إطار ما نسميه العدد 1. ربما كان الأمر يتعلق بالتعريف ، لكن لا وجود لتعريف مبتكر ، بمعنى أنه يقدر على إضفاء خصائص على شيء وهى لا توجد فيه بالفعل . فيما عدا خاصية التعبير والرمز إلى الشيء من خلال تعريفه⁽³³⁾.

⁽³⁰⁾ Frege, G.,: "Foundations" p.108

⁽³¹⁾ Kneal .W.,: Op. Cit, pp 449- 450

⁽³²⁾ Frege., G.: "Basic laws"Frege On Definitions.vol.ii " in "P.W.F" p.144

⁽³³⁾ Frege., G.: "Function and Concept/1891" in "P.W.F" p.23

ج- تحليل العدد باعتباره رمز لا معني له (توماي)

تساءل "فريجه": ما السبب في تفضيل الحساب الصوري على الحساب ذي المحتوى ؟ ويجب "توماي": " لأن وجهة النظر الصورية تخلصنا من الصعوبات الميتافيزيقية . هذه هي الميزة التي تجعلها أفضل بالنسبة لنا".⁽³⁴⁾ وكتب "توماي" يقول : " أن التصور الصوري للأعداد يقبل تحديداً أكثر اعتدالاً من التصور المنطقي ، فهو لا يسأل عما هي الأعداد وماذا تعمل ، ولكنه بالأحرى يسأل عما هو مطلوب منها في علم الحساب ، فعلم الحساب بالنسبة للصوري لعبة بالرموز التي تسمى رموز فارغة، فهي لا تتضمن أي محتوى آخر (في لعبة العد) أكثر من أنها محددة بواسطة سلوكها Behaviour وفقاً لقواعد التركيب (قواعد اللعبة) ، أن لاعب الشطرنج يستخدم قطع الشطرنج بنفس الأسلوب ، فهو يعين لها بعض الخصائص التي تحدد سلوكها في اللعبة ، وتكون القطع مجرد علامات خارجية لهذا السلوك . ومن المؤكد أن هناك اختلافاً مهماً بين الحساب ولعبة الشطرنج ، فقواعد الشطرنج تعسفية ، بينما نسق القواعد في الحساب فمن الممكن أن تشير الأعداد بواسطة بديهيات بسيطة إلى جوانب إدراكية ، وبالتالي تسهم إسهاماً مهماً في معرفتنا عن الطبيعة ".⁽³⁵⁾

ويقابل "فريجه" هذا الرأي بتقرير مبدأ التزم به طوال كتاباته : " لا بد أن نحرص على ألا نقوم بعمليات حسابية من خلال رموز فارغة".⁽³⁶⁾ لذلك نجده يخصص أجزاء كبيرة من الجزء الثاني في كتابه "القوانين" لمناقشة آراء "توماي" فيري "أنه من المستحيل أن نقدم علم الحساب بدون أن نفترض إشارات لرموزه" فلقد بين أن الصيغ والمعادلات التي هي مجرد تأليفات للرموز التي لا معني لها لا يمكن أن يكون لها تطبيقات ، فلا يكون هناك معني لكلامنا عن تطبيق للشطرنج إذا لم نعين مثلاً دالة نموذجية ممثلة Representative للقطع وتحركاتها ، فإذا كانت إمكانية التطبيق هي التي تميز الفكر الرياضي عن لعب الشطرنج كما يقول "توماي" وهي التي نتيح لنا السعي وراء المعرفة فإن تعيين المعاني يكون مفترضاً سابقاً في الرياضيات البحتة ، فكما يذهب "نيل" إلى أن "فريجه" لا ينكر إمكانية أن تجري كل الخطوات المطلوبة لاشتقاق معادلة في نسقه الاستنباطي بدون التفكير في معاني الرموز ولكنه يقول إن عدم إعطاء محتوى لهذه الرموز يجعل الأمر صعباً ، كما أن قواعد علم الحساب لم تختار تعسفياً ، ولكنها تعتمد على المعاني التي نعطيها لرموزنا ، فإذا كان من المخصص للعبة أن تجري على الورق برموز لا معني لها وفق قواعد تعسفية فمن المؤكد أنها لا يمكن أن تسمى فرعاً من الرياضيات".⁽³⁷⁾

⁽³⁴⁾ Frege., G.: " Basic laws" Frege Against the Formalists. Vol.ii" in "P.W.F" p.164.

⁽³⁵⁾ Frege., G.: " Basic laws" Frege Against the Formalists. Vol.ii" in "P.W.F" p.163-164.

⁽³⁶⁾ Frege., G.: " Function and Concept/1891" in "P.W.F" p.32

⁽³⁷⁾ Kneal .W.: Op. Cit, p 453

إن أكبر مثال على خداع النفس في عمل "توماي" - كما يري فريجه - هو محاولته إضفاء معانٍ على الرموز التي من المفروض أنها عديمة المعنى ، ففي الوقت الذي يقول فيه إن قواعد لعبته الحسابية متضمنة في مجموعة من معادلات مثل :

$$(أ + ب = ب + أ) \text{ و } (أ + (ب + ج) = (ب + ج) + أ)$$

يبدو أن هذه المعادلات تؤخذ على أنها مسلمات أولية في لعبة الحساب أي شيء يشابه ترتيب القطع في لعبة الشطرنج ، ولكن كيف تعطي قاعدة مجرد ترتيب رموز لا معنى لها ، من الواضح أن "توماي" يريد أن يفهمنا أن علامة المساواة تعبر عن تساوى أشياء معينة من أجل لعبته والحروف هي المتغيرات التي تعبر عن العمومية ، ولكي نجيد فهم الموقف يجب أن نميز بين اللعبة ونظرية اللعبة ، فبينما تكون الأولى تناولا للرموز التي لا معني لها ، فإن الثانية لا يمكن أن تكون كذلك ، وعلى ذلك فإن كل نظريات "توماي" ، وبراهينه يجب أن تنتمي لنظرية لعبة الحساب لا للعبة نفسها⁽³⁸⁾.

وينتقد "فريجه" كل من يناصر وجهة نظر "توماي" مثل "جرسمان" H.Grassmann و"هنكل" Hankel " فقد قام الأول بالتحصل على القانون :

$$أ + (ب + 1) = (ب + 1) + أ$$

عن طريق التعريف التالي : " إذا كان (أ و ب) هما أي عددان من السلسلة الأساسية ، فإن حاصل جمع (أ + ب) ينتمي إلى نفس فئة الأعداد بحيث تكون الصيغة الأساسية: (أ + (ب + ج) = (ب + ج) + أ) صحيحة " ولكن من الممكن انتقاد هذا التعريف كما يري "فريجه" بأسلوبين مختلفين . الأول أن المجموع معرف بناء على ذاته . فإننا أن لم نكن قد فهمنا بعد معنى (أ + ب) ، فإننا لم نفهم التعبير: (أ + (ب + ج) كذلك علي أن هذا النقد يمكن تفاديه إذا ما قلنا (علي خلاف النص) بأن ما كان يقصده من التعريف لم يكن المجموع بل عملية الجمع . وفي تلك الحالة فإن النقد لازال قائماً حول أن (أ + ب) ستمثل رمزاً فارغاً إذا لم يكن هناك أي عدد أو عدة أعداد تنتهي إلى السلسلة الأساسية التي تحقق الاشتراط . وحيث إن هذا لم يحدث ولن يحدث ، فإن "جرسمان" يفترض ببساطة ومن دون برهان ذلك ، بحيث أن دقة إجراءاته ظاهرية فقط⁽³⁹⁾.

وينتهي "فريجه" من مناقشته للتعريفات المقدمة حول طبيعة العدد إلى النتيجة التالية : " أن العدد ليس تجريداً من الأشياء على نحو ما نجد اللون أو الوزن أو الصلابة ، كما أنه ليس صفة للأشياء على نحو ما تكون هذه خصائص لها ، ...أن العدد ليس شيئاً فيزيقياً، وليس شيئاً ذاتياً Subjective، ولا ينتج العدد من إلحاق شيء إلى شيء آخر".⁽⁴⁰⁾

⁽³⁸⁾ Ibid., pp. 453 -454

⁽³⁹⁾ Frege, G.: "Foundations" p.8

⁽⁴⁰⁾ Ibid., p.58

ثانيا: تحليل العدد في حدود تصورات منطقية بحتة. (فريجه)

قبل "فريجه" طريقة "لينتز" و"مل" في تعريف العدد وهي القائلة: بأن الأعداد الطبيعية الأكبر من 1 من الممكن أن تعرف بالإشارة إلى سوابقها ، أعني من خلال معادلات مثل $1+1 = 2$ ، $3 = 1+2$ ، ولقد لاحظ "فريجه" أن هذه التعريفات غير كاملة طالما أن العدد (1) وفكرة الإضافة بواسطة (1) ليست معرفة".⁽⁴¹⁾

وقد نفى "فريجه" أن العدد شيئاً ، ونفى كذلك أن يكون تصوراً من المستوي الأول أو الثاني ، وينكر "نيل" عليه هذا النفي قائلاً: "إذا كان من الأفضل أن نقول - كما يذهب فريجه- أن الأعداد تتعلق بالتصورات ، فلم لا نوحّد بين الأعداد وتصورات المستوي الثاني". يبرر "فريجه" موقفه بهذا الصدد بأننا إذا نظرنا على سبيل المثال في القضية (العدد صفر ينطوي تحت التصورات F) فإن الصفر يعد جزءاً فقط من المحمول أو عنصراً فيه (إذا افترضنا أن التصور F أمر واقعي) ولهذا يتجنب أن يطلق على عدد كالصفر أو الواحد أو الاثنين أنه تصور ، لأن كل عدد منها يعد مجرد عنصر فيما نقرره".⁽⁴²⁾

لقد حاول "فريجه" أن يحصل على تعريف الأعداد الطبيعية بعامة بواسطة تحديد معنى المطابقة العددية (المساواة العددية) ، فإذا كانت الأعداد موضوعات قائمة بذاتها Self- subsistent ، دون أن تكون قابلة للإدراك الحسي ، كان من الضروري أن نوضح كيف نتعرف عليها ، وهذا كقولنا كيف يمكننا أن نقيم متطابقات ، وهذه العملية المقترحة إنما هي كما يري "نيل" أشبه بتعريف اتجاه الخط بواسطة تعريف تساوي الاتجاه أو التوازي أولاً ثم تجريد فكرة الاتجاه بعد ذلك".⁽⁴³⁾

كانت المهمة الأساسية في تعريف "فريجه" هو أن يفسر معنى العبارة " أن العدد الذي ينتمي إلى التصور F هو كالعَدَد الذي ينتمي إلى التصور G " بدون أن نستخدم تعبيرات مثل العدد الذي ينتمي إلى التصور F وقد حاول أن يفعل ذلك بواسطة تحليل فكرة علاقة واحد بواحد ، ويلاحظ أن الفكرة التي تقول أنه من الممكن أن نعرف تطابق الأعداد على هذا النحو قديمة ترجع إلى "هيوم" على الأقل ، ولكن "فريجه" هو الذي جعلها متداولة Fashionable بين الرياضيين".⁽⁴⁴⁾ إن الأشياء

(41) Kneal .W.: Op. Cit, pp 455-456

(42) أ. د/ محمد محمد قاسم : " جوتلوب فريجه " ص 53 وانظر أيضاً

Kneal .W.: Op. Cit, pp 458 see also Frege, G.: "Foundations" p.57

(43) Kneal .W.: Op. Cit, pp 459-460

(44) Kneal .W.: Op. Cit, p 459.

* الجدير بالإشارة هنا أن تعريف "فريجه" لعدد هو نفسه تعريف "رسل" انظر أ.د/ محمد مهران رشوان " فلسفة برتراند رسل " ، دار المعارف،

الواقعة تحت التصورين F, G من الممكن أن يقال إنهما يرتبطان أحدهما بالآخر ، بواسطة العلاقة Φ إذا :

- 1- أمكن أن يحل كل شيء واقع تحت التصور F في العلاقة Φ محل شيء واقع تحت التصور G و .
- 2- بالنسبة إلى كل شيء واقع تحت التصور G هناك شيء واقع تحت التصور F يحل محله في العلاقة Φ .

ولكي نقيم علاقة واحد بواحد المنطقية ، يجب أن نضيف شرطين آخرين .

- 3- في حالة وجود X, Y, Z ، أن قامت العلاقة Φ (واحد بواحد) بين X, Y وبين X, Z فإن Y يساوي Z .

- 4- في حالة وجود X, Y, Z ، أن قامت العلاقة Φ بين X, Y معاً وبين Z فإن X يساوي Y ⁽⁴⁵⁾.

وعلى هذا الأساس أقام "فريجه" التعريفات الثلاثة الآتية :

- 1- أن العبارة (التصور F والتصور G متماثلان عددياً) تعني كما تعني العبارة أن هناك علاقة Φ تربط الأشياء الواقعة تحت التصور F بعلاقة واحد بواحد مع الأشياء الواقعة تحت التصور G .
- 2- إن العدد الذي ينتمي للتصور F هو ما صدق التصور المماثل عددياً للتصور F
- 3- (ن عدد) تساوي قولنا يوجد تصور بحيث يكون (ن) عدداً ينتمي إليه. ⁽⁴⁶⁾

ونظن للوهلة الأولى أن توخي البساطة والنظام كان يقتضي أن نعكس ترتيب هذه التعريفات حتى تصبح العلاقة فيما بينهما منطقية ، ولكن "وليم نيل" يقدم تفسيراً مقبولاً لهذا الترتيب يرد فيه كل تعريف إلى التعريف الذي يليه ، وبيان ذلك أن "فريجه" يقصد بالعبارة (متماثلان عددياً) التي ترد في التعريف الأول أن تضي التماثل أو المطابقة بين الأعداد التي تنتمي إلى تصورات وتلك التصورات التي تطبق عليها ، لكن يظل معني العبارة (عدد ينتمي إلى تصور) بلا تحديد حتى نصل إلى التعريف الثاني ، وعلينا أن ننظر إلى التعبير (متماثلان عددياً) على أنه يتكامل مع المعني الذي يضيفه عليه التعريف الأول ، أما لو نظرنا في التعريف الثاني لوجدنا أن العبارة (العدد الذي ينتمي إلى التصور F) يقصد بها استخداماً عادياً للفظ (عدد) حتى يتم تعريفها في التعريف الثالث ، ومعنى ذلك أن التعريف الثاني هو بمثابة تفسير لاستعمال العبارة (عدد ينتمي إلى التصور F بأكمله) بينما يدور التعريف الثالث حول كلمة (عدد) ذاتها ، ونفهم من ذلك أن "فريجه" قد اتخذ طريقة تنازلية في التعريف فلا يمكن

⁽⁴⁵⁾ Ibid., P.460

⁽⁴⁶⁾ Frege, G., "Foundations" pp.84-85. see Kneal .W.,: Op. Cit, p 460

التحدث عن العدد إلا في ضوء أنه ينتمي إلى تصور ، والحديث عن تصور لا يكتمل إلا في ضوء تصور آخر ، والتماثل أو الهوية بين ماصدقات تصورين هو نقطة منطقية يمكن أن نبدأ منها دراسة الأعداد وتعريفها وتلك علامة على براعة "فريجه" في التحليل.⁽⁴⁷⁾

والسؤال الآن هل قدمت إلينا هذه التعريفات وجهة نظر مقنعة عن الأعداد الطبيعية باعتبارها تصورات أو تنتمي إلى تصورات ؟

إن "فريجه" في تعريفه الثالث يحاول أن يشرح كيف يمكننا أن نتكلم عن الأعداد بعامة بدون أن نشير إلى أية تصورات خاصة تنتمي إليها ، ولذا يقول إن العبارة (ن عدد) تعني نفس ما تعني العبارة أن هناك تصورا بحيث أن (ن) تكون العدد الذي ينتمي إليه ، وليس هناك ما يثار حول هذا التعريف لأنه من الواضح أنه إذا كنا نريد أن نمارس الحساب ، وجب أن نكون قادرين أن نتكلم عن الأعداد بدون الإشارة إلى التصورات ، ولكن التعريف الثالث- كما يري نيل- بذاته ليس كافياً لإقامة الحساب ، لأنه يقدم شرحاً فقط للتعبير (ن عدد) ومازلنا بحاجة إلى تعريفات أخرى عن الأعداد الفردية Individual Numbers ، أن الطريقة الوحيدة في نظرية "فريجه" للدلالة على تلك الأعداد هو أن نتكلم عنه كعدد ينتمي إلى تصور ، ذلك أن غرضه هو أن يعرض الحساب كتطوير للمنطق ، ولذلك لم يستطع أن يقدم الأعداد الفردية بالإشارة إلى المفاهيم التجريبية ، والسبب في ذلك أن الإشارة إلى المفاهيم التجريبية لا تضمن وجود المتتالية (السلسلة المتعاقبة) اللانهائي للأعداد الذي يتطلبه التطور الأعلى للحساب ، ولذلك كان من الضروري لفريجه أن يقدم تعريفات للأعداد الفردية بالإشارة إلى تصورات معيارية من داخل المنطق ذاته ، أخذاً الصفر كبداية للمتتالية ، وقد قدم إلينا الخطة التالي* :

- 0 : هو العدد الذي ينتمي إلى التصور : ليس متطابقاً مع ذاته .
- 1 : هو العدد الذي ينتمي إلى التصور : يتطابق مع 0 .
- 2 : هو العدد الذي ينتمي إلى التصور : يتطابق مع 0 أو مع 1 .
- 3 : هو العدد الذي ينتمي إلى التصور : يتطابق مع 0 أو مع 1 أو مع 2 .

(47) أ. د. محمد محمد قاسم : "جوتلوب فريجه" ص 51 وانظر أيضاً Kneal .W.,: Op. Cit, pp. 460-461

* ذكر "فريجه" تعريف الصفر والواحد في كتابه "الأسس" التعريف الأول ص 87 والثاني ص 90 ولم يذكر "فريجه" منطوق هذه التعريفات في "القوانين" قارن أ. د. محمد محمد قاسم في كتابه السابق الإشارة إليه ص 63 الهامش ، أما من جمع هذه التعريفات بهذه الطريقة فهو "نيل" انظر

Kneal .W.,: Op. Cit, p.466

تعقيب:

من الواضح أن التصور (ليس متطابقاً مع ذاته أو ليس مساوياً لذاته) تصور منطقي خالص، وأنه لا ينطوي شيئاً تحته، ومن ثم فإن التعريف الأول يفني كل الحاجات وواضح أيضاً أن التعريف الأول يخلو من أي تصورات مجاوزة للمنطق، وكذلك بقية التعريفات، وذلك أن "فريجه" قد نجح في صياغتها جميعاً بطريقة تسمح لنا بالاستمرار في تعريف الأعداد التالية، ويبدو كذلك أن "فريجه" قد نجح في مشروعه وهو أن يبين كيف يمكن رد علم الحساب إلى المنطق من خلال منهج التحليل⁽⁴⁸⁾. كما نجح "فريجه" في أن يبين أن القضايا الحسابية تحليلية فيذهب "هامبيل" إلى أن تعريفات (فريجه- رسل) للأعداد مثل الصفر والتالي Successive، وغيرها من المفاهيم ذات الصلة قد بينت أن القضايا الحسابية تحليلية لأنها تتبع من تعريفات اشتراطية Stipulative Definitions من المبادئ المنطقية. وما يقصده "هامبيل" أن في النسق الصوري للمنطق يمكن لنا عن طريق التعريف الاشتراطي أن نقدم التعبيرات: "عدد"، "صفر"، "تالي"، بأسلوب يمكن جملاً من هذا النسق أن تستخدم تلك الاختصارات المطابقة لجمال حسابية معينة مثل: "الصفر عدد" وأن تبدو كنظريات في النسق. وهو يستنتج من هذه الحقيقة غير القابلة للإنكار أن تلك التعريفات تبين أن نظريات علم الحساب عبارة عن ماصدقات ترميزية Notational Extensions لنظريات المنطق، وبالتالي فهي تحليلية.⁽⁴⁹⁾

(48) أ د / محمد محمد قاسم : " جوتلوب فريجه " ص 51 وانظر أيضاً Kneal .W.: Op. Cit, p.466

(49) Hempel ,C.G.: " On the Nature of Mathematical Truth ", American Mathematical Monthly , 52 (1945)