

MODELISATION DE LA COMPACITE DES EMPILEMENTS GRANULAIRES AU MOYEN DU MODELE LINEAIRE DE COMPACITE

¹Melle C. KECHKAR, ²Dr. Y. CHERAIT

¹ Département de Génie civil, ²Laboratoire de Génie Civil et d'hydraulique, université de Guelma.
Reçu le: 27/05/2006 Reçu sous forme révisée le : 11/02/2007 Accepté le : 22/01/2008

RESUME : Le modèle linéaire de compacité constitue une approche théorique de l'étude prévisionnelle de la compacité des empilements granulaires, il nécessite la connaissance de certains paramètres : compacité propre et les fonctions d'interaction.

L'objectif de cette communication est de rendre ce modèle opérationnel. Pour cela on a entamé une étude expérimentale sur des grains concassés pour la détermination de :

- la compacité propre de chaque classe granulaire
- la compacité des mélanges binaires qui ont conduit à la détermination expérimentale de nouvelles expressions analytiques des fonctions d'interaction.

Le lissage des fonctions effectué reproduit la réalité avec une erreur moyenne très acceptable.

La seconde partie illustre une programmation en langage Fortran, du modèle linéaire de compacité, qui est utilisée pour la validation du modèle. La validation est effectuée par comparaison prévision/expérience portant sur des mélanges tirés de la littérature (d'une morphologie différente) a donné un taux de corrélation très acceptable.

Mots clés : modèle linéaire - compacité - fonctions d'interactions - empilement granulaires - grains.

ABSTRACT: Linear model of compactness constitutes a theoretical approach of the forecasting study of the compactness of granular stacking; it requires the knowledge of certain parameters: proper compactness and interaction functions.

The objective of this communication is to make this model operational, for that in the first part of our work we have started an experimental study on crushed grains, our aim was to determine:

- The proper compactness of each size range,
- The compactness of the binary mixtures which leads to the experimental determination of new analytic expressions concerning the interaction functions.

These expressions reflect the reality with an average error that is tolerable.

The second part of the study illustrates a programming in FORTRAN language, of the linear model of compactness, this programming is used for the validation of the model. The validation of the model is carried out by comparison prevision/experience relating to mixtures drawn from the literature (of different morphology) gave a rate of very acceptable correlation.

Key words: linear model - compactness - grains - interaction functions - granular stacking.

1. INTRODUCTION

Le problème de la prévision de la compacité d'un mélange de grains secs est une vieille question, commune à bien des domaines techniques et scientifiques [1]. Dans le domaine de la formulation des matériaux granulaires, on se restreint généralement à la question de la détermination des granularités conduisant aux compacités les plus fortes. Devant les difficultés théoriques qu'elle soulève, l'approche générale consiste à rechercher, par l'expérience, des distributions granulaires compactes et à tenter de s'en

rapprocher en combinant les matériaux dont on dispose.

Le modèle linéaire de compacité présenté s'attaque à la question dans toute sa généralité. Il vise à fournir à l'ingénieur un moyen pratique d'évaluer a priori, à partir de matériaux élémentaires bien caractérisés, la compacité de toute combinaison de ces constituants (formulation des bétons)

2. DEFINITION DU MODELE LINEAIRE DE COMPACITE

La recherche de la compacité maximale du squelette granulaire a occupé plusieurs générations de chercheurs. Devant la complexité du problème le LCPC a développé un modèle dit modèle linéaire de compacité. C'est un modèle théorique développé au laboratoire de physique macroscopique du LCPC. il permet la prévision numérique de la compacité maximale d'un mélange d'étendue finie à partir des données suivantes [2]:

- La granularité du mélange,
- Les compacités propres des tranches monodimensionnelles,
- Les fonctions d'interactions entre grains (effets de paroi et d'interférence).

Des études expérimentales entreprises sur des structures en forme d'empilements granulaires par différents auteurs (notamment par Caquot) laissent apparaître deux phénomènes essentiels:

Effet de paroi

L'effet de paroi est une interaction étudiée avec beaucoup de détails par Caquot en 1937 et traduit le fait qu'à la proximité d'un grain de taille supérieure, l'empilement de grains de taille inférieure est relâché [3].

Effet d'interférence

L'effet d'interférence traduit le fait que lorsque un grain de taille inférieure n'est pas suffisamment fin pour s'introduire dans la porosité de l'empilement des grains de taille supérieure, il déstructure ce dernier. En effet, en venant s'insérer entre les gros, ils induisent un relâchement de la structure [3].

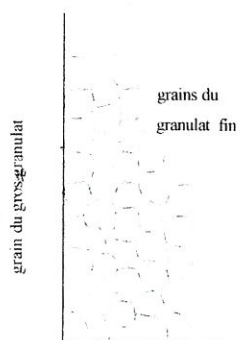


Figure 1. Effet de paroi [4].

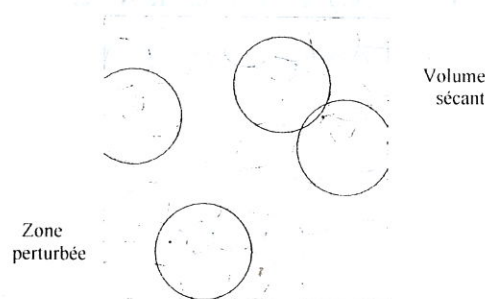


Figure 2. Effet d'interférence [4].

Le modèle linéaire donne pour la prévision de la compacité l'expression suivante:

$$c_i = \frac{\alpha_i}{1 - (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^{i-1} g(i, j) y_j - \sum_{j=i+1}^n f(i, j) y_j}$$

$$c = \inf c_i \quad 1 < i < n$$

avec :

c_i compacité du mélange pour la classe "i" dominante

n nombre de classes granulaires

α_i compacité propre de la classe "i"

y_i proportions volumiques (par rapport au volume solide total)

$f(i, j)$ fonction d'interaction "effet d'interférence"

$g(i, j)$ fonction d'interaction "effet de paroi".

3. EXPERIMENTATION

Les essais relatés dans cette partie ont été réalisés au laboratoire de génie civil et d'hydraulique de l'université de Guelma. Les granulats utilisés sont issus de la région de Bendjerah (Wilaya de Guelma),

- un sable de carrière 0/5,
- un gravier de carrière 3/8, 5/15, 15/25.

III.1. Présentation de l'essai de compacité

- Principe de l'essai :

Le principe de l'essai de mesure de la compacité consiste à soumettre un échantillon de volume déterminé à une série de vibrations pour atteindre les meilleurs arrangements des grains.

Plusieurs modes opératoires sont proposés, dont l'un consiste à faire :

- Remplir un moule cylindrique d'un litre de volume en trois couches égales,

- Pour chaque couche, faire compacter le moule sur une tamiseuse électrique pendant 10 chocs successifs,
- Araser le moule avec une tige rigide,
- Peser le moule pour déterminer la masse du granulat qu'il contient.

A partir de la pesée et de la masse volumique absolue, déterminée préalablement, on peut déterminer la compacité propre du grain. Pour chaque essai, on effectue au moins trois mesures.

Cette procédure a été utilisée pour obtenir les compacités des classes monodimensionnelles et des mélanges binaires d'étendues variables.

3.2 Résultats des essais

3.2.1 Essai de compacité propre

Une séparation des différentes classes monodimensionnelles qui correspondent en fait aux différents tamis utilisés pour l'analyse granulométrique du sable ainsi que du gravier.

Les résultats sont présentés sur les graphiques suivants :

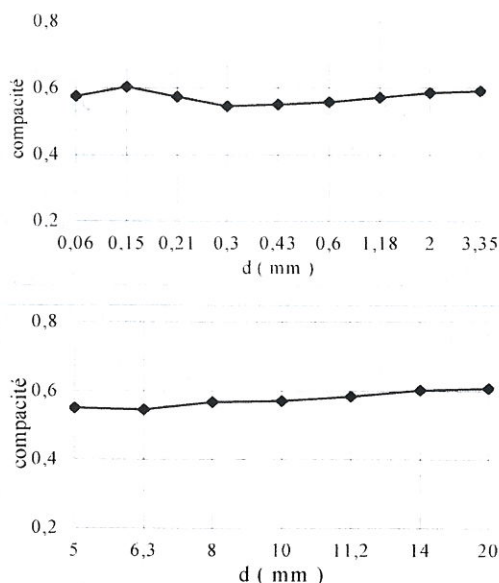


Figure 1 Variation de la compacité propre α_i en fonction du diamètre du grain.

Commentaire

On remarque que la compacité propre d'un grain varie en fonction de son diamètre et ce aussi bien pour le sable que pour le gravier, cette variation reste assez modeste et de l'ordre de la précision des essais ($\approx 10\%$).

3.2.2 Compacité des mélanges binaires

Nous avons effectué une étude systématique des mélanges binaires obtenus par une

combinaison de deux classes monodimensionnelles, préalablement séparées. Pour la réalisation des mélanges, on a procédé à une homogénéisation manuelle, on couche horizontales dans un bac plat.

Disposant de sept classes (a-b- c-d-e-f-g) du granulat, les tailles des grains au sens des tamis étaient les suivantes :

$$0,3\text{mm} < a < 0,425 < b < 0,6 < c < 1,18 < d < 2 < e < 3,35 < f < 5 < g < 6,63 \text{ mm.}$$

La taille moyenne des granulats est estimée selon la formule suivante [4]:

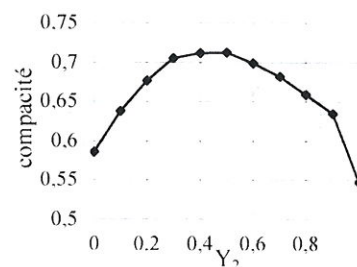
$$dm(i) = \frac{d_{i+1} + d_i}{2}$$

On obtient pour les sept classes les tailles moyennes suivantes :

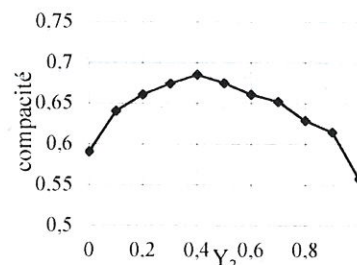
	a	b	c	d	e	f	g
$dm(i)$ mm	0,36	0,51	0,89	1,59	2,67	4,17	5,65

On a préparé 9 mélanges d'étendue variable de 0,13 à 0,74. Pour la réalisation des mélanges on a choisi des proportions de petits grains y_2 par incrément successif de 10%.

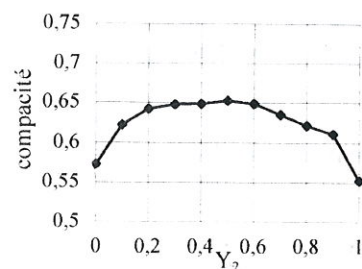
Les résultats sont reportés sur les graphes suivants :



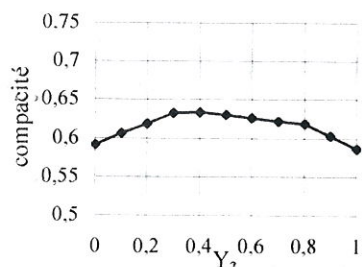
mélange 1 (0,36 - 2,67)



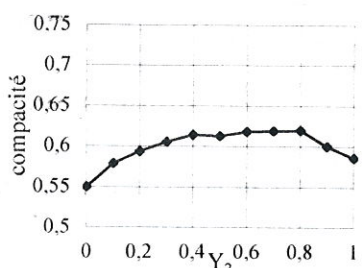
mélange 2 (0,89 - 4,17)



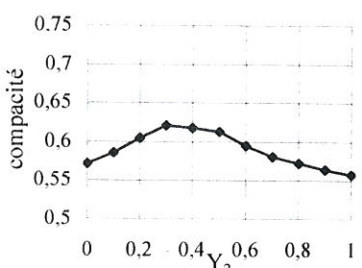
mélange 3 (0,51 - 1,59)



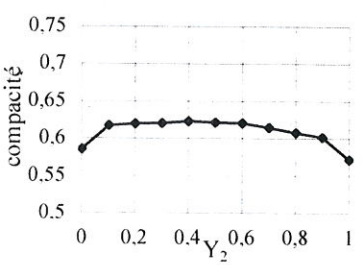
mélange 4 (1,59 - 4,17)



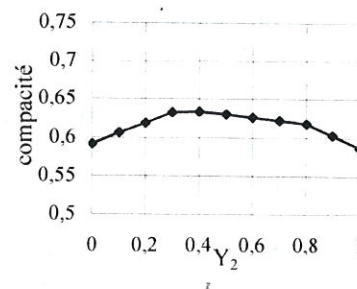
mélange 5 (2,67 - 5,65)



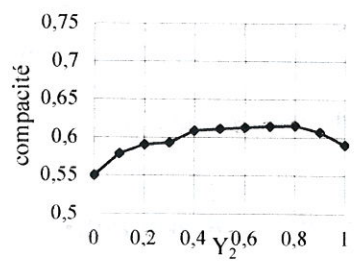
mélange 6 (0,89 - 1,59)



mélange 7 (1,59 - 2,67)



mélange 8 (2,67 - 4,17)



mélange 9 (4,17-5,65)

Figure 3. Variation de la compacité en fonction de y_2 pour les divers mélanges binaires.

Commentaire

De l'ensemble des résultats obtenus, le premier fait marquant est la forme de la fonction

$c = f(y_2)$, elle est d'abord croissante jusqu'à un maximum pour une certaine valeur de y_2 , elle décroît ensuite : c'est la forme en cloche.

La deuxième remarque à faire, c'est que la variation de la compacité est plus rapide du côté des gros dominants (petits pourcentages de grains fins $y_2 \leq 0,4$) que du côté des petits.

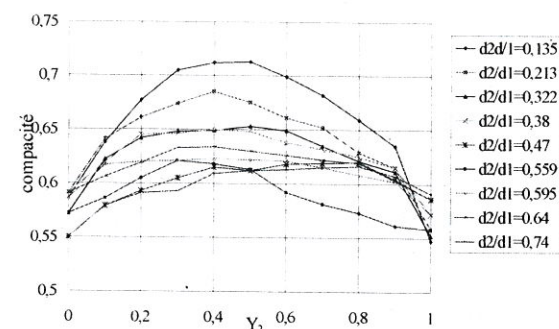


Figure 4 Rôle du rapport d_2 / d_1 sur la compacité.

Remarque

Concernant l'influence de l'étendue granulaire (d_1, d_2) des grains sur la valeur de la compacité maximale, on remarque que la compacité diminue lorsque le rapport d_2/d_1 augmente.

Ce fait expérimental confirme les travaux de Caquot sur les mélanges granulaires.

4.DETERMINATION EXPERIMENTALE DES FONCTIONS D'INTERACTIONS

Après l'étude préliminaire de mesure de la compacité de divers mélanges binaires, on se propose de déterminer expérimentalement des fonctions d'interactions définies précédemment.

D'après le modèle linéaire, la compacité peut prendre l'une des deux formes suivantes [2]:

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{1 - f(d_1, d_2) y_2} \quad \text{cas des gros dominants}$$

$$c_2 = \frac{\alpha_2}{1 - (1 - \alpha_2) g(d_1, d_2) y_1} \quad \text{cas des petits dominants}$$

de ces deux relations, on tire les valeurs des fonctions d'interactions f et g :

$$f(d_1, d_2) = \frac{c_1 - \alpha_1}{c_1 y_2}$$

$$g(d_1, d_2) = \frac{c_2 - \alpha_2}{c_2 (1 - \alpha_2) y_1}$$

Le tableau 2 présente les valeurs des fonctions f et g pour les différents mélanges étudiés

mélange	d_2/d_1	Valeur de f	Valeur de g
0,36 - 2,67	0,135	0,356	1,032
0,89 - 4,17	0,213	0,343	0,699
0,51 - 1,59	0,322	0,248	0,690
1,59 - 4,17	0,38	0,227	0,467
2,67 - 5,65	0,47	0,255	0,662
0,89 - 1,59	0,559	0,263	0,328
1,59 - 2,67	0,595	0,167	0,347
2,67 - 4,17	0,64	0,169	0,305
4,17 - 5,65	0,74	0,134	0,496

Tableau 2 Valeurs expérimentales des fonctions d'interactions f et g .

Nous avons cherché à établir, à partir de ces résultats expérimentaux, des expressions mathématiques simples en fonction de d_2/d_1 , de la forme:

$$y = (1 - x)^n$$

ceci dans le seul but de répondre aux conditions aux limites du modèle, qui sont :

$$\text{pour } \begin{cases} x = 0 & y = 1 \\ x = 1 & y = 0 \end{cases}$$

Pour la fonction f , le meilleur lissage des points expérimentaux a conduit à l'exposant

$$n = 3,42 \approx 3,4$$

Donc

$$f(d_2/d_1) = (1 - d_2/d_1)^{3,4}$$

et pour la fonction g , le meilleur lissage des points expérimentaux a conduit à l'exposant

$$n = 0,92 \approx 0,9$$

Donc

$$g(d_2/d_1) = (1 - d_2/d_1)^{0,9}$$

Les figure 5 présente les points expérimentaux et le lissage des fonctions $f(d_2/d_1)$ et $g(d_2/d_1)$

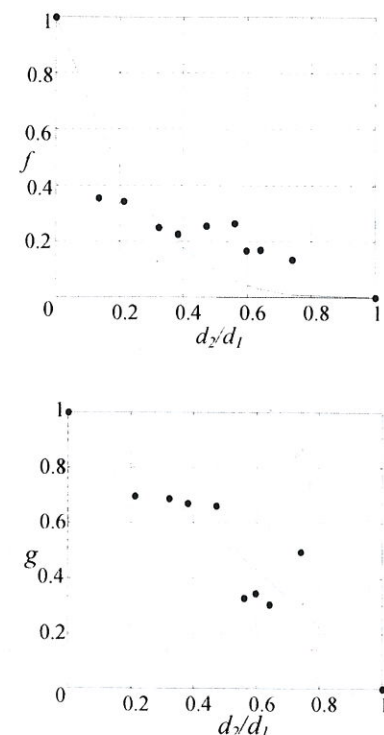


Figure 5 Points expérimentaux et lissage des fonctions d'interactions f et g .

5. VALIDATION DU MODELE

5.1 Comparaison des modèles

5.1.1. Domaine des petits dominants

La figure 6 présente le tracé de la fonction $g(d_2/d_1)$ selon les modèles suivants [4]:

- **Ben-Ain** : cet auteur propose pour la fonction g l'équation

$$g(1,2) = 1 - \alpha_2 - \frac{5}{16} \alpha_2 [(1 + d_2/d_1)^{3.2} - 1]$$

- **Caquot** : quand a lui propose l'expression générale suivante :

$$g(1,2) = 1 - d_2/d_1$$

- La fonction des résultats expérimentaux tirés de la littérature (lissage) :

$$g(d_2/d_1) = (1 - \frac{d_2}{d_1})^{1.7}$$

- Nos résultats expérimentaux.

$$g(d_2/d_1) = (1 - d_2/d_1)^{0.9}$$

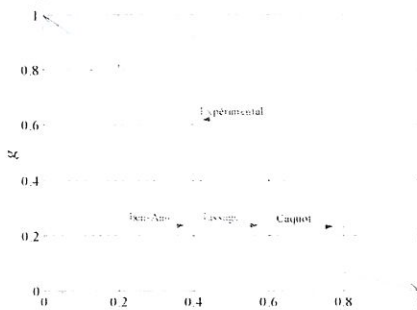


Figure 6 Valeurs de la fonction d'interaction $g(d_2/d_1)$ selon les modèles .

On remarque que :

- le modèle de Caquot satisfait aux conditions aux limites ($g(0) = 1$ et $g(1) = 0$),
- le modèle de Ben-Ain ne satisfait pas à l'une des deux conditions aux limites ($g(1) \neq 0$).
- Le lissage déduit de la littérature donne des résultats plus faibles que nos propres valeurs. A signaler que ce lissage est déduit d'essais effectués sur des grains de forme parfaitement sphérique, ce qui peut expliquer en partie les différences des résultats relevés.

4.1.2. Domaine des gros dominants

La figure 7 présente le tracé de la fonction $f(d_2/d_1)$ selon les modèles suivants [4] :

- Modèle linéaire (pour $u=0$ et $u=0,2$) d'après l'équation :

$$f(1,2) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha(d_1, d_2)} (1 - u^3 \frac{d_1^3}{d_2^3})$$

- La fonction des résultats expérimentaux tirés de la littérature (lissage):

$$f(d_2/d_1) = (1 - \frac{d_2}{d_1})^{2.4}$$

- Nos résultats expérimentaux.

$$f(d_2/d_1) = (1 - \frac{d_2}{d_1})^{3.4}$$

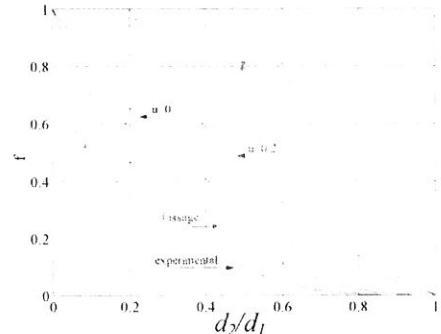


Figure 7 La fonction d'interaction $f(x)$ selon les modèles

- Le modèle linéaire répond aux conditions aux limites pour $u = 0$,
- La fonction expérimentale proposée par nos soins donne des valeurs faibles par défauts par rapport aux autres modèles.

5.2 Validation du modèle

Pour le calcul de la compacité des mélanges, au sens du modèle linéaire, nous avons élaboré un programme informatique (écrit en langage Fortran77) qui permet, à partir de données de bases que sont les proportions des classes monodimensionnelles et des compacités propres de prévoir la compacité du mélange.

Dans cette partie, on va présenter une étude comparative entre le modèle linéaire (calcul fait par le programme) et des résultats expérimentaux d'une étude menée par Joisel.

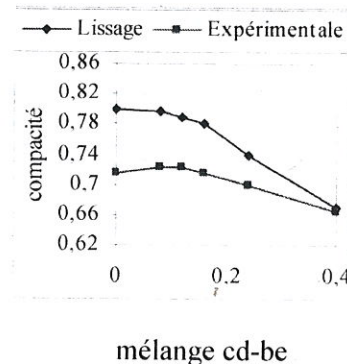
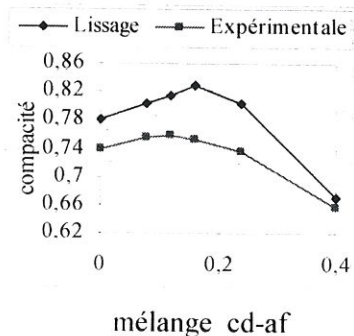
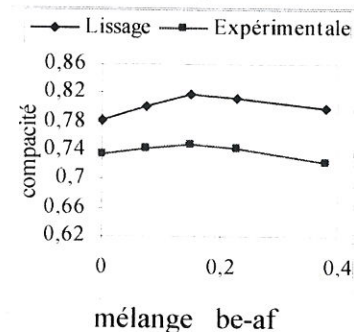
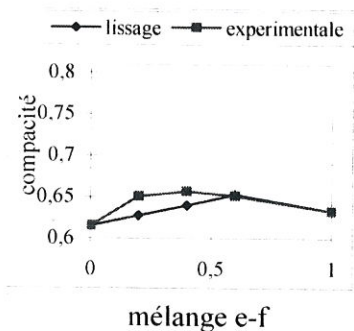
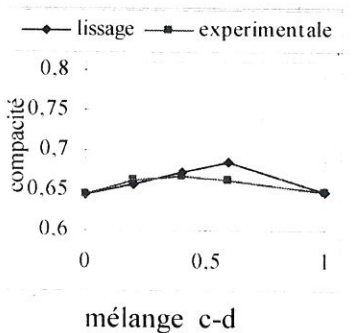
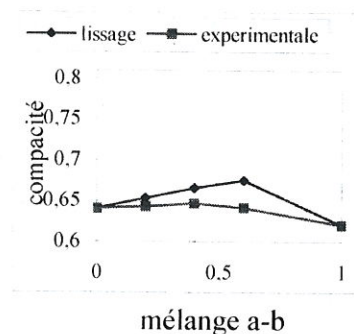
Joisel, pour ses expériences, a utilisé six classes ($a - b - c - d - e - f$) d'un granulat roulé (issue de la Seine), de tailles (au sens des tamis) suivantes [5] :

$$0,2 \text{ mm} < a < 0,4 < b < 0,8 < c < 1,6 < d < 3,2 < e < 6,4 < f < 12,8 \text{ mm.}$$

Le tableau présente les tailles moyennes et les compacités propres pour les 6 classes étudiées :

	a	b	c	d	e	f
$D_m(i)$	0,3	0,6	1,2	2,4	4,8	9,6
α_i	0,620	0,641	0,949	0,646	0,633	0,616

On a comparé 9 mélanges binaires et 9 mélanges de 4 classes, voici quelque résultats reportés dans les graphiques suivants:



Figures 8. Valeurs théoriques et expérimentales de la compacité pour divers mélanges en fonction de la proportion de classe la plus fine.

Remarque

On remarque que l'allure générale des courbes reste fidèle, mais on observe que le modèle donne des compacités généralement un peu plus fortes surtout au voisinage de l'optimum. Sur l'ensemble des mesures effectuées, le modèle donne un taux de corrélation de 96%, par rapport aux résultats expérimentaux de Joisel. Ce taux de corrélation très acceptable laisse à penser que le modèle linéaire utilisant des valeurs de fonctions d'interactions déduites expérimentalement constitue un bon outil d'études des empilements granulaires.

6. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

On a présenté dans cet article le modèle linéaire de compacité qui est un modèle analytique, permettant un calcul théorique de la compacité d'un mélange granulaire à partir de caractéristiques des constituants (compacités propres), des proportions du mélanges.

L'étalonnage du modèle a été effectué grâce à des mesures de compacité des mélanges binaires, leur validation en comparant prévision/expérience portant sur des granulats de morphologie différente a donné un taux de corrélation très acceptable.

L'amélioration de cette théorie passe par :

1. un développement plus poussé de la fonction compacité (on passe alors vers un modèle non linéaire),
2. une approche plus fine pour tenir compte de la forme des grains. A cet effet le modèle proposé par J. Ravier [4] nous semble le mieux indiqué,
3. l'étude de l'influence du facteur « vibration » dans l'arrangement des empilements.



7. BEBLIOGRAPHIE

[1] **R. FERET:** « *Compacité des mortiers hydrauliques* ». Annales P. et CG, 1984.

[2] **T. STOVALL, F. DE LARRARD, M. BUIL:** « Linear packing density model of grain mixtures ». Power technology, vol. 48, 1, Sept 1986.

[3] Site web :

http://www.lcpc.fr/fr/presentation/organigramme/div_tgce/result/docetsoft/rene_lcpc.pdf -

[4] **F. DE LARRARD:** « *formulation et propriétés des bétons à très haute performance* ». Rapport de recherche LPC, N° 149, Mars 1988.

[5] **F. DE LARRARD, T. SEDRAN, et G. BONNET:** « *prévision de la compacité des mélanges granulaires par le modèle de suspension solide. Partie 2 : validation – cas des mélanges confinés*, Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et chaussées », Nov. – Déc. 1994.