

FONDEMENT MATHEMATIQUE DE LA METHODE DE COUPLAGE FEM-BEM POUR L'ANALYSE DES PROBLEMES DE LA MECANIQUE DES MATERIAUX

B. Aour⁽¹⁾, O. Rahmani⁽²⁾

(1) Laboratoire de Technologie de l'Environnement, Département de Mécanique, ENSET d'Oran, BP 1523 El'Mnaour 31000, E-mail : ben_aour@yahoo.fr

(2) Laboratoire de Mécanique Appliquée, Département de Mécanique, Faculté de Génie Mécanique, UST-MB-Oran.

Résumé

Dans cet article, nous allons présenter une méthode de couplage éléments finis-éléments frontières (FEM-BEM) pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte. La technique développée utilise comme approche de base le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale semblable à celle de la méthode des éléments finis. Les modifications ont été faites sur les équations de la méthode directe des éléments frontières afin de produire un système d'équations compatible avec celles de la méthode des éléments finis et permettre une approche combinée des deux méthodes. Finalement pour évaluer la performance de la technique développée, un programme de calcul a été écrit et validé à l'aide de plusieurs exemples.

Mots clés: Couplage FEM-BEM, éléments frontières, élastostatique bidimensionnel, facteur d'intensité de contrainte.

Abstract

In this paper, a method of coupling finite element-boundary element (FEM-BEM) for the evaluation of the stress intensity factors will be presented. The developed technique uses as a basic approach the usual finite element technique of minimisation of total potential energy. The modifications were made on the equations of the direct boundary element method in order to produce a system of equations compatible with that of the finite element method and allow a combined approach of the two methods. Finally, to evaluate the performance of the developed technique, a computer program was written and validated using several examples.

Key words: FEM-BEM coupling, boundary elements, two-dimensional elastostatic, stress intensity factor.

1. Introduction

Les techniques numériques de calcul des structures ont connu ces trois dernières décennies un développement considérable motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières sont-elles communément utilisées aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : génie mécanique, génie civil, construction navale, nucléaire, etc.

Pour bénéficier des avantages de chacune des deux méthodes et d'éliminer certains nombres

d'inconvénients une technique de couplage de ces deux méthodes paraît très intéressante. Malheureusement, les deux méthodes ne peuvent pas être directement couplées puisque les variables de base de la méthode des éléments frontières sont les déplacements et les tractions surfaciques alors que dans la méthode des éléments finis, les variables de base sont les déplacements et les forces nodales. Par conséquent, l'une des deux méthodes doit être modifiée pour qu'elle soit compatible avec l'autre et permettre un couplage.

Mais avant de procéder au couplage, nous étions amenés à répondre à plusieurs questions:

- (i) *Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque méthode?*
- (ii) *Pourquoi le couplage FEM-BEM?*
- (iii) *Quelle formulation de la méthode des éléments frontières doit-on utiliser?*
- (iv) *Comment procède-t-on au couplage?*

2. Avantages et inconvénients de la FEM

La méthode des éléments finis est actuellement reconnue comme étant une technique numérique très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites bien déterminées. Une littérature exhaustive traitant de cette méthode s'est développée au fil des années comprenant le développement de nouveaux éléments, de nouveaux algorithmes, ainsi que de nouveaux logiciels pour l'analyse des problèmes complexes. Parmi les avantages de cette méthode, on peut citer [1-6]:

1. son aptitude à modéliser des structures de géométrie plus complexe,
2. son aptitude à résoudre des problèmes avec des chargements et des conditions aux limites arbitraires,
3. son aptitude à modéliser des structures composites,
4. son aptitude d'utiliser des éléments de diverses formes et dimensions,
5. de plus, on peut noter que la discrétisation est « localisée », i.e., les fonctions de base sont utilisées localement et, par conséquent, les équations finales sont étroitement bandées et symétriques.

Comme tout autre méthode d'analyse, la méthode des éléments finis a ses propres désavantages qui peuvent être résumés comme suit [1-9]:

1. les domaines infinis sont difficiles à approximer,
2. les singularités telles que celles qui proviennent des charges concentrées ou bien de la mécanique de la rupture sont difficiles à modéliser (variation rapide des contraintes),
3. dans le cas des problèmes tridimensionnels, on obtient un système d'équations volumineux, ce qui demande un grand espace mémoire et un temps machine élevé,

4. une préparation et une interprétation ennuyeuse due à la formation d'un grand volume non nécessaire de données et de résultats.

3. Avantages et inconvénients de la BEM

Généralement, le principe de cette méthode consiste à transformer les équations locales qui décrivent le comportement des fonctions à l'intérieur du domaine et sur ses limites en une équation intégrale liant les fonctions connues sur la frontière. En conséquence, n'importe quelle région homogène a besoin uniquement de la discrétisation de sa frontière, plutôt qu'une discrétisation du domaine entier (d'où le nom, de *la méthode des éléments frontière*). Les principaux avantages qu'on peut rencontrer par application de cette méthode sont les suivants [5-9]:

1. pour un matériau homogène, seulement le contour du domaine a besoin d'être discrétisé,
2. les domaines infinis sont faciles à modéliser,
3. les singularités sont faciles à incorporer,
4. puisque la discrétisation ne se fait que sur la frontière, ceci nous permet de réduire le problème considéré d'une dimension et, par conséquent, elle diminue la taille du système d'équations et permet d'avoir un minimum de capacité de stockage et de temps de calculs,
5. obtention de bons résultats pour les contraintes, car les équations locales sont, a priori, satisfaites par la formulation intégrale, ce qui entraîne une bonne adaptation pour la modélisation des problèmes qui subissent un changement rapide de contraintes tels que les problèmes de concentration de contraintes, de la mécanique de contact et de la mécanique de la rupture.

D'un autre côté, les désavantages de la méthode peuvent se résumer comme suit:

1. la matrice de solution est entièrement peuplée et antisymétrique puisque chaque paramètre influe sur tous les points frontières,
2. l'identification physique des paramètres est souvent difficile,
3. difficulté de traiter des problèmes non linéaires et non homogènes,
4. les coins et les jonctions sont difficiles à modéliser,

5. les résultats obtenus pour l'analyse des coques minces sont moins bons puisque le rapport *surface/volume* est important,
6. la formulation mathématique de la méthode est relativement difficile pour les ingénieurs.

4. Pourquoi le couplage FEM-BEM

Le couplage FEM-BEM représente une idée intéressante et préférable dans beaucoup de problèmes pratique de la mécanique des solides, mécanique des fluides, etc. En comparant les deux méthodes **FEM** et **BEM**, d'après les avantages et les inconvénients cités ci dessus, on peut dresser le tableau suivant :

Problèmes	Modélisation par BEM	Modélisation par FEM
-Discrétisation	Frontière du domaine	Domaine entier
-Singularité	Facile	Difficile
-Comportement infini	Facile	Difficile
-Variation rapide de contrainte	Facile	Difficile
-Préparation des données et interprétation des résultats	Facile	Difficile
-Matrices obtenues	Entièrement peuplées et antisymétriques	Bandées et symétriques
-Formulation mathématique	Difficile	Facile
-Problèmes non homogènes	Difficile	Facile
-Problèmes non linéaires	Difficile	Facile
-Coins et jonctions	Difficile	Facile

Tableau 1: Comparaison de FEM et BEM.

En générale, il est vu que lorsque *la FEM est faible, la BEM est forte et vice versa*. Par conséquent, un « **couplage** » des deux méthodes est souhaitable car il permettra à chacune d'elles de conserver ses propres avantages et d'éliminer certains nombres d'inconvénients.

5. Choix de la méthode des éléments frontières

Les travaux de recherches [6-9] effectués sur la solution numérique des équations intégrales frontières ont pris différents chemins mais

équivalents, qui peuvent se résumer en deux groupes principaux comme suit :

5.1 Formulation directe

Dans cette formulation les fonctions inconnues qui apparaissent dans les équations intégrales sont les variables physiques du problème. Ainsi, dans un problème d'élasticité la solution d'une équation intégrale donnera directement toutes les tractions et les déplacements sur la frontière. Notons que cette approche a été utilisée pour la première fois par *Rizzo* [6] appliquée aux problèmes d'élasticité. Puis elle a connu plusieurs applications dans différents domaines [7-9].

5.2 Formulation indirecte

Dans la formulation indirecte, les équations intégrales sont exprimées en termes de densité spécifique sur le contour du domaine. Ces fonctions de densités, qui représentent les paramètres inconnus, n'ont pas de sens physique (elles sont généralement fictives). Mais une fois qu'elles sont obtenues, les paramètres physiques du problème peuvent être facilement calculées par une simple procédure d'intégration. Parmi les travaux de recherche sur une telle approche, on peut citer ceux de *Brebbia* et *Dominguez* [7], *Banerjee* et *Butterfield* [8], *Raad* [10], etc.

Après une recherche bibliographique [7-9], nous avons remarqué que les méthodes indirectes des éléments frontières sont tout à fait bonnes pour une classe spécifique de problèmes, pour lesquels elles sont désignées, mais, si on tente de les utilisées pour d'autres types de problèmes, elles produisent, fréquemment, des résultats médiocres. La formulation directe paraît être plus intéressante, versatile et générale à cause de son applicabilité à n'importe quel problème de valeurs frontières due à l'utilisation des variables frontières naturelles. De plus, elle est bien adaptée pour la modélisation des singularités au niveau des coins et des jonctions. Et comme sa faiblesse devant la méthode indirecte pour les calculs intérieurs peut être contournée par la combinaison avec la méthode des éléments finis (**FEM**), nous avons décidé d'investiguer la possibilité de combiner la méthode directe des éléments

frontières singulières avec la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de la mécanique des matériaux.

6. Choix de la méthode de couplage :

Avant de procéder au couplage des deux méthodes, nous étions amenés à choisir l'une des deux approches suivantes :

- (i) **Approche FE** : traite les sous régions d'éléments frontières comme étant des super éléments finis dont les matrices de rigidité équivalentes sont assemblées avec celles de la région discrétisée en éléments finis.
- (ii) **Approche BE** : consiste à traiter l'élément fini comme étant une sous région d'éléments frontières en modifiant les équations d'éléments finis afin de permettre un assemblage avec celles des éléments frontières.

D'après Brebbia et Georgiou [11], les deux techniques donnent des résultats similaires et l'utilisation de l'une ou de l'autre dépend de la prédominance de la partie du problème prise en considération (i.e., partie d'éléments finis ou partie d'éléments frontières). Mais comme la méthode des éléments finis est bien établit que la méthode des éléments frontières dans l'environnement industriel, et puisque les équations obtenues à partir de la région discrétisée en éléments frontières peuvent être utilisée par un logiciel d'éléments finis comme une sous-structure, il est plus approprié de modifier les équations des éléments frontières et de les rendre compatibles avec celles des éléments finis [12-18].

7. Technique de couplage FEM-BEM

On considère un corps élastique dont le domaine Ω est subdivisé en deux sous domaines Ω^1 et Ω^2 joignant par l'interface Γ_1 . Le sous-domaine Ω^1 de frontière Γ^1 est représenté par un maillage d'éléments finis tandis que le sous-domaine Ω^2 de frontière Γ^2 est discrétisé en éléments frontières (Fig.1).

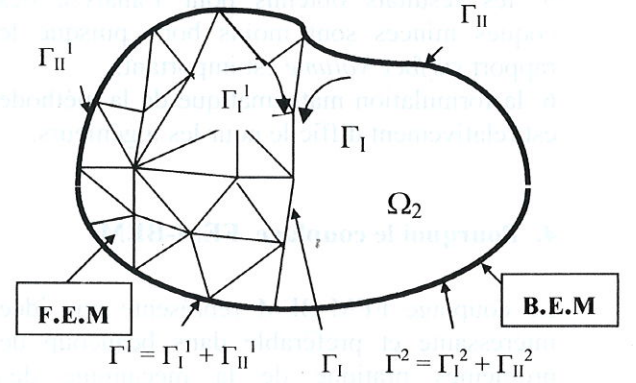


Fig. 1 : Discrétisation par FEM-BEM d'un corps bidimensionnel.

Pour les deux sous régions et dans l'absence des forces de volume, l'expression de l'énergie potentielle du domaine entier est de la forme suivante [3]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega^1} \{\epsilon\}_1^T \{\sigma\}_1 d\Omega - \int_{\Gamma^1} \{u\}_1^T \{p\}_1 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \{\epsilon\}_2^T \{\sigma\}_2 d\Omega - \int_{\Gamma^2} \{u\}_2^T \{p\}_2 d\Gamma \quad (1)$$

En tenant compte des conditions d'équilibre et de compatibilité le long de l'interface commune, et après quelques manipulation (Aour [5]), l'expression (1) devient:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (2)$$

dans laquelle,

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^1} [\sigma]_1^T \{\epsilon\}_1 d\Omega - \int_{\Gamma^1} \{u\}_1^T \{p\}_1 d\Gamma \quad (3)$$

représente l'énergie potentielle totale du sous-domaine Ω^1 discrétisé en éléments finis et

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} [\sigma]_2^T \{\epsilon\}_2 d\Omega - \int_{\Gamma^2} \{u\}_2^T \{p\}_2 d\Gamma \quad (4)$$

représente l'énergie potentielle totale du sous-domaine Ω^2 discrétisé en éléments frontières. Maintenant, pour le sous domaine d'éléments finis, on utilise directement le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale, on obtient le système d'équations suivant:

$$[K]^{FE} \{u\}_1 = \{F\}_1 \quad (5)$$

Pour le sous-domaine d'éléments frontières, on utilise le théorème du travail réciproque de BETTI et le théorème de divergence et en exprimant les vecteurs de déplacements et de tractions en fonction de leurs valeurs nodales, on obtient [5]:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \{u_n\}_2^T \left(\int_{\Gamma} [N]^T [N] d\Gamma \right) \{t_n\}_2 - \{u_n\}_2^T \left(\int_{\Gamma} [N]^T \{p\}_2 d\Gamma \right) \quad (6)$$

où $[N]$ est la matrice des fonctions de forme pour un élément frontière quadratique isoparamétrique.

Considérant à présent, la méthode directe des éléments frontières, les déplacements et les tractions nodaux sont liés par la relation suivante :

$$[F] \{u_n\} = [G] \{t_n\} \quad (7)$$

où $[F]$ et $[G]$ sont respectivement les matrices de coefficients des déplacements et des tractions nodaux.

D'après l'algèbre des matrices, il est plus pratique de prendre en compte des dimensions des matrices. En présence des coins la matrice $[F]$ liée aux déplacements reste toujours carrée d'ordre $(2M \times 2M)$ si M est le nombre total des nœuds géométriques. Cette propriété est due à l'unicité des déplacements au niveau des coins. Par contre la matrice $[G]$ est une matrice rectangulaire d'ordre $2M \times (2M + 2m)$ si m est le nombre de coins figurant sur la géométrie. Cependant pour faire le couplage des deux méthodes, une autre approche qui rend les sources uniques au niveau des nœuds coins est indispensable. Cette tâche est assurée en faisant rapprocher les deux points sources au nœud coin, presque juste à la fermeture, puis en éliminant un point source et en conservant celui qui a presque les mêmes caractéristiques du nœud coin. Enfin, les tractions seront uniques au niveau des coins, et la matrice $[G]$ devient une matrice carrée et inversible. Par conséquent, l'expression (7) prend la forme suivante:

$$[G']^{-1} [F] \{u_n\} = \{t_n\} \quad (8)$$

En substituant l'expression (8) dans (6), on obtient:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \{u_n\}_2^T [W] [G']^{-1} [F] \{u_n\}_2 - \{u_n\}_2^T \{F\}_2 \quad (9)$$

où $[W] = \int_{\Gamma} [N]^T [N] d\Gamma$ est la matrice de conversion des tractions en forces nodales et $\{F\}_2 = \int_{\Gamma} [N]^T \{p\}_2 d\Gamma$ représente le vecteur des forces nodales équivalentes.

Ou bien, d'une manière plus compacte:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \{u_n\}_2^T [K]^{(BE)} \{u_n\}_2 - \{u_n\}_2^T \{F\}_2 \quad (10)$$

dans laquelle,

$$[K]^{(BE)} = [W] [G']^{-1} [F] \quad (11)$$

est la matrice de rigidité du super-élément obtenu par la méthode directe des éléments frontières.

En minimisant la fonctionnelle Π_2 par rapport aux déplacements nodaux, on obtient le système final du super-élément représentant la sous-région d'éléments frontières,

$$[K]^{(BE)} \{u\}_2 = \{F\}_2 \quad (12)$$

Par conséquent, l'expression (12) est compatible avec celle de la méthode des éléments finis (5) et permet un couplage direct des deux méthodes en tenant compte des conditions de compatibilité et d'équilibre sur l'interface commune des deux sous domaines. D'où, le système global pour le domaine entier est de la forme suivante:

$$[K]^{(FE+BE)} \{u\} = \{F\} \quad (13)$$

où $[K]^{(FE+BE)}$ est la matrice de rigidité globale obtenue à partir des deux sous-domaines de la structure discrétisée en éléments finis et éléments frontières, $\{u\}$ et $\{F\}$ sont respectivement les déplacements et les forces nodaux de toute la structure. Après l'application standard des conditions aux limites, il est possible de résoudre le système (13) afin d'obtenir toutes les variables inconnues et passer aux calculs additionnels.

8. Evaluation du facteur d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte a été introduit par Irwin, après avoir cherché à rattacher le problème de la fissure à la théorie d'élasticité. Ce facteur [19-21]:

- représente une caractéristique d'un mode de fissuration,
- il est indépendant des coordonnées,
- il est proportionnel à la sollicitation,
- il dépend de la racine carrée de la longueur de la fissure.

Un autre paramètre fondamental de la mécanique de la rupture est l'intégrale J introduite pour la première fois par Eshelby (1956) puis par Rice (Fig.2). Physiquement il décrit le taux de changement de l'énergie potentielle correspondant à un petit accroissement de la longueur de fissure, il est donné sous la forme [19]:

$$J = \int_{\Gamma} (U dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds) \quad (14)$$

où U est la densité d'énergie de déformation, t_i est le vecteur de traction, u_i est le vecteur de déplacement, ds est un élément d'arc le long du contour d'intégration Γ .

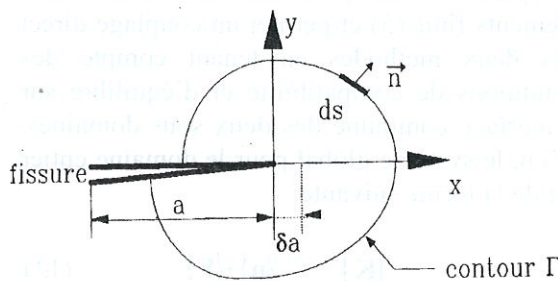


Fig. 2: Contour d'intégration.

Pour des situations élastiques linéaires, on peut montrer que:

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{en contrainte plane} \quad (15)$$

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad \text{en déformation plane} \quad (16)$$

Une des caractéristiques de l'intégrale J est que sa valeur est indépendante du contour

d'intégration choisi, pourvu que les points initiaux et finaux du contour soient sur les faces opposées et que les faces de la fissure sont libres de contraintes, et cela est valable pour tout matériau élastique linéaire ou non linéaire.

9. Vérification du code CBEFE

Pour tester la validité, la précision et la convergence de cette technique de couplage, un programme de calcul composé de plusieurs sous programmes (Tableau 2) a été écrit et validé par plusieurs exemples.

Noms des commentaires	Fonctions
CBEFE	Programme principal.
INPUT	Lecture des données.
LOADBE BESTIF	Formation des équations du super-élément.
LOADPS STIFPS	Formation des équations des éléments finis.
RESOL	Assemblage et résolution.
BSTRES STREPS	Calcul des contraintes.
KEVAL	Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes.

Tableau 2 : Principaux Sous-programme du code CBEFE.

9.1. Exemple 1 : Elasticité plane

La figure 3 présente deux différents maillages utilisés pour la discrétisation d'une plaque carrée en traction ($E = 2500 \text{ daN/mm}^2$, $\nu = 0,3$). Un autre maillage a été utilisé par la méthode du super élément d'éléments frontières (SBEPS) composé de 16 éléments frontière.

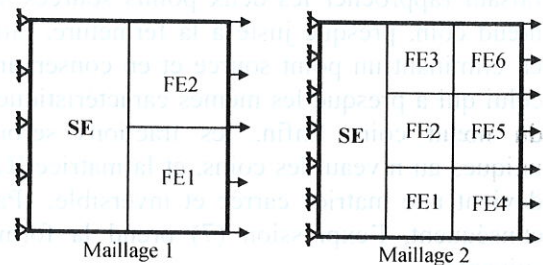


Fig.3 : Discrétisation par FEM-BEM d'une plaque carrée en traction.

Les maillages 1 et 2 sont utilisés par CBEFE de la méthode de couplage FEM-BEM. Les déplacements maximaux obtenus pour les trois

différents maillages dus à une tension uniforme de 100 N/mm^2 sont présentés sur le tableau 3 ci-dessous.

Maillage	Déplacement max.	Erreur
SBEPS	7,967	0,41%
CBEFE (1)	7,935	0,81%
CBEFE (2)	7,985	0,18%
Théorie	8,000	—

Tableau 3 : Comparaison des solutions analytiques et numériques.

9.2. Exemple 2 : Mécanique de la rupture

Cet exemple consiste à déterminer les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte en mode I d'une plaque mince en acier ordinaire contenant une fissure centrée de longueur $2a$. La charge critique étant estimée par la formule suivante [20] : $P_c = 2b\sigma_e$, $\sigma_e = 515 \text{ daN/mm}^2$.

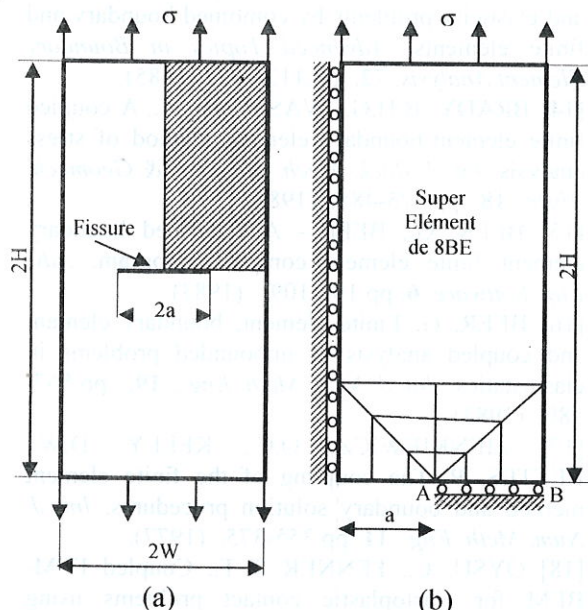
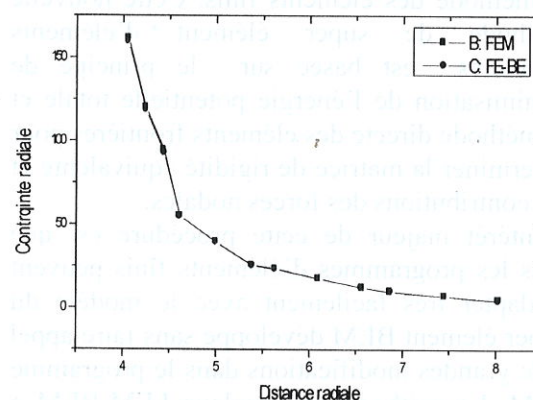


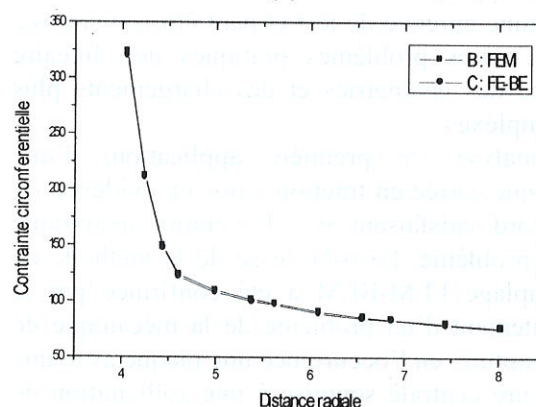
Fig.4: (a) : Plaque mince avec fissure centrée.
(b) : Discrétisation par FEM-BEM.

Pour des raisons de symétrie, uniquement le quart de la plaque a été discrétisé par FEM-BEM (Fig.4.b). Les variations des contraintes radiales et circonférentielles sont illustrées par la figure 5. On remarque qu'il y a un bon accord entre les résultats obtenus par FEM et couplage FEM-BEM. Ainsi le tableau 4 présente les facteurs d'intensité de contrainte

en mode I et les solutions obtenues sont en bonne concordance avec la solution analytique donnée par François et Joly [21].



(a)



(b)

Fig.5: Variation des contraintes (a) radiales et (b) circonférentielles le long de la distance radiale AB.

Sol. Anal. [21]	Sol. Par FEM	Sol. Par FEM-BEM
$K_I = 242.0$	$K_I = 237.457$	$K_I = 238.56$
Erreur = 1.87%		Erreur = 1.42%

Tableau 4 : Comparaison des résultats obtenus par FEM et FEM-BEM.

10. Conclusion

Le couplage FEM-BEM a fait l'objet de nombreuses investigations et plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. L'originalité de ce travail repose sur le

développement d'une nouvelle méthode d'éléments frontières facile à manipuler et permettant un couplage rapide et efficace avec la méthode des éléments finis. Cette nouvelle méthode de super élément d'éléments frontières est basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale et la méthode directe des éléments frontières pour déterminer la matrice de rigidité équivalente et les contributions des forces nodales.

L'intérêt majeur de cette procédure est que tous les programmes d'éléments finis peuvent s'adapter très facilement avec le modèle du super élément BEM développé sans faire appel à de grandes modifications dans le programme FEM. La méthode de couplage FEM-BEM a été appliquée à deux problèmes simples comme épreuve de test et peut être généralisée à d'autres problèmes pratiques non linéaire avec des géométries et des chargements plus complexes.

L'analyse, en première application, d'une plaque carrée en traction a mis en évidence un accord satisfaisant avec la solution analytique du problème. La robustesse de la méthode de couplage FEM-BEM a été confirmée par le traitement d'un problème de la mécanique de la rupture, en l'occurrence une plaque avec une fissure centrale soumise à une sollicitation de traction uniaxiale.

REFERENCES

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C., La méthode des éléments finis, traduit de la 3^{ème} édition anglaise par Jean-Louis Armand, Mc Graw-Hill, Paris (1979).
- [2] GUVEN, I., MADENCI, E., Thermoelastic stress field in a piece-wise homogeneous domain under non-uniform temperature using a coupled boundary and finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **56**, 381-403, (2003).
- [3] HINTON, E., OWEN, D. R.J., Finite element programming, Academic press INC, Second Printing London (1979).
- [4] ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., EL-GEBEILLY, M., Iterative coupling of BE and FE methods in elastostatics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **25**, 685-695, (2001).
- [5] AOUB, B., Couplage FEM-DBEM pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane bidimensionnels, *Thèse de Magister*, USTOrian, (1997).
- [6] RIZZO, F.J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, *Q. J. Appl. Math.*, **25**, pp.83-95, (1967).
- [7] BREBIA, C.A., DOMINGUEZ, J., Boundary elements : An introductory course, Mc-Graw Hill, UK, (1989).
- [8] BENERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R., Boundary element methods in engineering science, Mc-Graw Hill Limited, London, (1981).
- [9] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in Engineering, Springer-Verlag, New York, (1984).
- [10] RAAD, A.S., A coupled finite element and boundary element analysis of axisymmetric potential and elasto-plastic problems, PhD Thesis, University of Sheffield, U.K., (1992).
- [11] BREBIA, C.A., GEORGIU, P., Combination of boundary and finite elements in elastostatics, *Appl. Math. Modelling*, **3**, pp. 212-220, (1979).
- [12] WEARING, J.L., SHEIKH, M.A., A combined finite element boundary element technique for stress analysis, *6th International Conference on Boundary Element Technology*, **1**, London, (1988).
- [13] RUDOLPHI, T.J., Non homogeneous potential and elasticity problems by combined boundary and finite elements, *Advanced Topics in Boundary Element Analysis*, **72**, pp.113-131, (1985).
- [14] BRADY, B.H.G., WASSYNG, A., A coupled finite element-boundary element method of stress analysis, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, **18**, pp.475-485, (1981).
- [15] BEER, G., BEFE - A combined boundary element finite element computer program, *Adv. Eng. Software*, **6**, pp.103-109, (1983).
- [16] BEER, G., Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, pp.567-580, (1983).
- [17] ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.W., BETTES, P., The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, pp.355-375, (1977).
- [18] OYSU, C., FENNER, R.T., Coupled FEM-BEM for elastoplastic contact problems using Lagrange multipliers, *Applied Mathematical Modelling*, **30**, 231-247, (2005).
- [19] OWEN, D.R., FAWKES, A.J., Engineering fracture mechanics: Numerical methods and applications, Pineridge Press, (1983).
- [20] BARTHELEMY B., Notins pratique de la mécanique de la rupture, Edition Eyrolles, Paris (1980).
- [21] FRANCOIS D., JOLY L., La rupture des métaux, Edition MASSON, Paris (1972).