

نظريات المنطق الرياضي عند برتراندراسل

زيات فيصل*

مقدمة "

في نهاية النصف الثاني من القرن التاسع عشر امتزجت الرياضيات بالمنطق إلى حد كبير، وتغلغل المنطق في بناء الرياضيات البحتة حتى كانت بداية القرن العشرين التي شهدت أروع الإنجازات التي قدمها العقل البشري ممثلة في "برنكييا متيائكا" أو "مبادئ الرياضيات" *principia mathematica* (1910-1913) الذي دونه برتراندراسل مع الفرد نورث هويتيد.

يرى راسل بأنه قدم دحضا حاسما للنظريات الكانطية عن الرياضيات، فإذا كانت الهندسة مسندة من مقدمات منطقية خالصة مثلا، فإن التسليم ببيان حدث قبلي للمكان، يكون أمرا زائدا وليس ضروريا.

أولا- مدخل إلى النسق الإستنباطي عند برتراندراسل

والواقع أن "برنكييا متيائكا" يعد حدثا هاما في ميدان المنطق والرياضيات، وأنه على حد 'آير' " لعب دورا هاما في تطوير المنطق الرياضي"، فضلا عن أنه يمثل مرحلة حاسمة بالنسبة للدراسات المنطقية والرياضية بحيث يمكن القول: إن ظهور البرنكييا يقسم تاريخ المنطق الرياضي قسمين: ما قبل البرنكييا وما بعد البرنكييا، فالتصورات المنطقية التي تم التعبير عنها باستخدام اللغة في أصول الرياضيات أمكن صياغتها في البرنكييا من خلال نسق متكامل من الرمزية: الرمزية تلعب دورا هاما في المنطق والرياضيات، لأن الرموز تعبر عن درجة عليا من درجات التجريد الفكري فيمكن عن طريقها تحويل الصورة اللغوية للقضية المنطقية إلى صورة رياضية بحتة يسهل استخدامها، أضف إلى هذا أن من أدق خصائص الرموز قابليتها للتداول العالمي بما يقضي على صعوبات التفاهم بين اللغات المختلفة، إلى جانب ما تتسم به الرموز من الدقة والنسقية.¹

لقد حظيت فكرة منطقة (Logicisation) الرياضيات بالقبول، وذلك من خلال كتاب "البرنكييا متيائكا" الذي أصبح يعد من المعالم البارزة للقرن العشرين، فظل طوال هذا القرن وحتى الآن فاعلا ومتطورا بمجهود أنصاره، كان تأثيره في تطور العقل في القرن العشرين أكثر جذرية وخطورة ربما أكثر مما تصوره راسل نفسه،

*- زيات فيصل: طالب دكتوراه (L M D)، سنة ثالثة، قسم الفلسفة، جامعة وهران، تخصص المنطق وفلسفة العلوم.

** -Summary: The development of mathematical logic of "Frige" to "Peano" to "Russel" is completing the great dream of "Leibniz" in the feld of formal sciences since he used "Frige" arithmetic to derive the arithmetic logic. May be the attempt of realizing the "Leibniz" dream led to the appearance of logical arithmetic theories such as; Theory of affairs calculation, Catégories calculations and relation ships calculations.

Key words: Logic, Mathematic, Theory, Function , Layant.

¹ - ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، دار النهضة العربية، بيروت، ج3، (د.س.ط)، ص 100.

وكان مصدر أبحاث الكثير من الفلاسفة والمناطق أمثال لوكازيفتش، وكارناب، وتاركسكي، وكواين، وكورت جودل، وغيرهم، الذين أسهموا في تطوير المنطق الرمزي المعاصر على الصورة التي يتبدى عليها والآن.¹

والواقع إن تطور المنطق المعاصر لا يرجع فقط إلى جهود وأبحاث المناطق الذين سبقت الإشارة إليهما - ونقصد بذلك راسل وهوايتهد - إذ لا يمكن إغفال جهود كثير من المناطق، فقد سبق وأن حاول لينتزر تحديد المنطق - من خلال استخدام اللغة العالمية -، وكان جورج بول حاول أن يجعل المنطق جبراً، وطور حساب الفئات، ثم عدل "تشارلز ساندروز بيرس" وطور منطق جبر "بول" وبين كيف يمكن أن يلائم صياغة معدلة لمنطق العلاقات الذي صاغه "دي مورجان"

وفي ألمانيا قدم "فردريك فيلهلم شرودر" صياغة كلاسيكية لجبر المنطق عند بول، كما عدله بيرس، وحاول "جوتلب فريجه" بصورة أكثر أهمية، أن يستمد الحساب من المنطق في عمله "أسس الحساب" و"القوانين الأساسية للحساب"، لم يع راسل أنه اكتشف لنفسه من جديد أفكاراً افترضها فريجه، غير أنه عندما أصبح على وعي بعمل فريجه، وجه انتباهه إليه.²

وفي إيطاليا حاول "بيانو" والمشترون معه في أعمال أن يبينوا في مؤلفهم "تقعيد الرياضيات" أن الحساب والجبر يمكن أن يستمدا من ثلاثة أفكار أولية منطقية معينة، مثل فكرة الفئة، وعضوية الفئة، ودالة القضية، وثلاثة تصورات رياضية أولية وست قضايا أولية. تعرف راسل كما رأينا، على عمل بيانو في عام 1900. واستخدم هوايتهد الرمزية المنطقية الموجودة عند بيانو، أو الإشارات في بناء كتاب "برنكييا ماتياتيكا" الذي تجاوز عمل كل من بيانو وفريجه، ويمكن أن نسمي مرحلة "بيرس" و"فريجه" و"بيانو"، مرحلة البحث عن أسس الرياضيات.

والقول بأن النسق المتكامل لبرنكييا يستند إلى الاستنباط *Dédution* يعني أنه أمكن في "مبادئ الرياضيات" استنباط الرياضيات البحتة *pure Mathematics* من أصول منطقية. والاستنباط يعتمد على علاقة التضمن التي تضفي على النسق الاستنباطي مشروعيته.

وهذا ما ذهب إليه راسل من خلال قوله "الهدف الأساسي من البرنكييا ماتياتيكا هو إثبات أن كل الرياضيات البحتة مشتقة من أولويات منطقية بحتة ولا تستعمل إلا تصورات معرفة بحدود المنطق، وهذا يناقض نظرية كانط"³

إن أبحاث المنطق الرياضي في القرن العشرين توجت بأعظم ابتكارات راسل المنطقية، فقد "كان أول من اكتشف أن نسق المنطق ككل يمكن أن يتطور من خلال فكرة التضمن" بإقامة التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري باعتبارها أساسيين للاستنباط الذي يعرفه بأنه "عملية تنتقل فيها من العلم بقضية معينة هي المقدمة، إلى قضية أخرى هي النتيجة لكن لن نضع في اعتبارنا أن هذه العملية استنباط منطقي ما لم تكن صحيحة، أي إذا لم توجد هناك علاقة بين المقدمة والنتيجة تبيح لنا "الاعتقاد" في صحة النتيجة إذا

¹ - يبنى الطريف الخولي، فلسفة العلم في القرن العشرين، عالم المعرفة، الكويت، (د.ط)، 2000م، ص 215.

² - فردريك كوبلستون، تاريخ الفلسفة، المجلد الثامن من بنّام إلى راسل، تر: محمود سيد أحمد، مراجعة وتقديم: إمام عبد الفتاح إمام، المركز القومي للترجمة، القاهرة، ط1، 2009، ص 627.

³ - Bertrand Russel , Histoire de mes idées philosophiques , op. cit.p 93.

عرفنا أن المقدمة صحيحة وهذه العلاقة هي محور الاهتمام في النظرية المنطقية للاستنباط " وهي ما نطلق عليه علاقة التضمن.

لقد حاول راسل إقامة المنطق على شكل نسق استنباطي، أي رد الرياضيات إلى المنطق، - وهذا هو جوهر المنطقانية- وهي خطوة أساسية قام بها راسل، وقد بدأها بكتاب "أصول الرياضيات" الذي شرع في كتابه أثناء المؤتمر، واعتبر آنذاك عملاً عبثياً فذاً، وإضافة أصيلة للمنطق والرياضيات، وبطبيعة الحال فإن إصدار "أصول الرياضيات" لم يكن يعني أن صياغة المنطق الرياضي تبلورت بصفة نهائية رغم ما ذهب إليه راسل من أن "القضية الأساسية التي تجري خلال صفحات الكتاب وهي أن الرياضيات والمنطق متطابقان، من القضايا التي لا أجد سبباً منذ إعلانها لتعديلها"¹.

من أجل هذا أخذ راسل يوجه مجهوده المضنية نحو تأسيس المنطق الرياضي كنسق استنباطي، فتعاون مع "وايتهد" لإنجاز هذا العمل وأثمر جهدهما المشترك كتاب "مبادئ الرياضيات".

يلتحم في "البرنكيبيات ماتيماتيك" المنطق مع الرياضيات تماماً في إطار نسق موحد يبدأ من حساب القضايا وينتقل إلى حساب الفئات ثم العلاقات ويتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى الحساب العددي.

إن النسق المنطقي الذي أقامه راسل على شكل نسق استنباطي يعتمد على ثلاثة نظريات أساسية وهي

1- حساب القضايا (Le calcul propositionnel)

2- حساب الفئات (Le calcul des classes)

3- حساب العلاقات (Le calcul des classes)

فكل هذه النظريات تستعمل قوانين الحساب وتشتق منه في نسق استنباطي محكم، وذلك بتعريف ثوابتها على أساس ثوابت الحساب الأول.

- أولاً: الحساب التحليلي للقضايا

فكرة التضمن من أهم أفكار المنطق الرياضي، بل قد ينتظر إليها في كثير من الأنساق على أنها الفكرة المحورية التي يدور حولها البحث في المنطق الرياضي بصفة عامة، وهذا يرجع إلى أمرين: أما الأول فيتمثل في أن المنطق الرياضي يؤسس فكرته النسقية على أساس ما نسميه "النسق الاستنباطي"، وأما الأمر الثاني فيبدو بوضوح في أن النظريات الأساسية في حساب القضايا يتم البرهنة عليها رياضياً باستخدام تعريف التضمن الذي ورد في "برنكيبيات ماتيماتيك"²

تقوم نظرية حساب القضايا على اشتقاق قيمة صدق قضية ما انطلاقاً من قيم صدق المقدمات القضية لها، وهي تعتبر نقطة البدء في الحساب المعاصر.

ويسمى راسل ووايتهد في البرنكيبيات ماتيماتيك هذه النظرية بـ: "الحساب التحليلي للقضايا" أو "حساب القضايا" أو "نظرية القضايا" وسأها كواين بـ: "نظرية دالات الصدق" أو "نظرية تركيب القضايا"،

¹ - برتراندرسل، أصول الرياضيات، ج 1، تر: محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، مصر، ط2، 1963، ص 05.

² - ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم - المنطق الرياضي-، الجزء الثالث، المرجع السابق، ص 91.

ويسمىها وايتهد بـ "نظرية الاستنباط". فهو يرى «أن الوصف بأنه "نظرية القضايا" غير دقيق تماماً، لأنه في الواقع نظرية تتعلق بالطريقة التي تكون بها القضية مستدلاً عليها من قضية أخرى، والمقصود بالاستنباط هنا عملية تنتقل بها من معرفة معينة بوصفها مقدمة إلى قضية أخرى بوضعها نتيجة»¹.

وتعتبر النظرية نقطة بدء في نظريات المنطق، إذ تعتمد عليها باقي النظريات كظرية الفصول (الفئات)، ونظرية العلاقات، ونظرية حسابا لمحمول وهذا السبق سبقا منطقيا، لأنها الأساس الذي تقوم عليه نظريات المنطق.

إن الجهاز الاستنباطي يعتمد على علاقة التضمن، باعتبارها علاقة أساسية، وهي كما يعرفها تاركسي «إذا ربطنا قضيتين بأداة من الكلمات "إذا..... إذن"، نحصل على قضية مركبة تسمى التضمن (Implication) أو القضية الشرطية»². إلا أن هذا لا يعني أن نسق برنكييا لا يضمن مجازة الاستنباطي سوى هذه الفكرة، وإنما يعني أن علاقة التضمن بالإضافة إلى بعض الأفكار والقضايا الأخرى الأساسية، تتأزر معا لتجعل النسق على درجة من الأحكام بحيث يمكن التوصل من خلال النسق إلى كل الصيغ المنطقية.

والقسم الأول من نظرية حساب القضايا في البرنكييا تشير إلى أن النظرية تبدأ بالأفكار والقضايا الابتدائية، فيتناول الأفكار الابتدائية أولا، ثم ينتقل بعد ذلك إلى القضايا الابتدائية.

1- الأفكار الأولية والتعريفات

نظرية حساب القضايا أول خطوة من خطوات تطبيق المنطق الاستنباطي في المنطق على نحو تام، وتبدأ بوضع عدد معين من الحدود الأولية، وعدد معين آخر من التعريفات، وعدد معين ثالث من المقدمات الأولية منذ البدء، نستنبط منها قضايا أخرى نسميها (نظريات) مع الاستعانة بما أو قواعد الاستدلال.

يضع أصحاب البرنكييا ثلاثة أنواع من الرموز لحساب دلالات القضايا:

- 1- رموز للمتغيرات الفردية (individual variable) وترمز إلى أسماء الأعلام أو الأفراد وهي الحروف اللاتينية z, x, y, ونشير نحن إلى هذه الحروف في الرمزية العربية بالحروف ق، ل، م، ..،
- 2- رموز للدالات (predicate variable) وترمز إلى المحمولات، وهي الحروف اليونانية التي تقابل الحروف الإنجليزية. F, G, H, I, ... ونستبدل بها في العربية د، ذ، ر، ز على التوالي.
- 3- رمزان يشيران أحدهما إلى السور (كل) ويسمى السور الكلي (universal quantifier) ويشير الثاني إلى (بعض) ويسمى السور الوجودي (existential quantifier) ويستخدمون الرمز (x) ليدل على السور الكلي، ونستخدم نحن الحرف ك، والرمز (Ex) ليدل على السور الوجودي، ونستخدم نحن الحرف ح.

وقد رأى أصحاب البرنكييا - راسل وهو ايتهد - أن نبدأ النسق المنطقي بفكرتين أساسيتين لا معرفتين هما النفي (السلب) والفصل اللتين يشتق على أساسها الحدود والأفكار الباقية. «إلا أنه مع تسليم بهاتين الفكرتين رد دلالات الصدق الأساسية إلى دالة التنافر حيث عرف الأولى بالثانية»³.

¹ - بيسون، أ، هـ، أكونر. د.ج. مقدمة في المنطق الرمزي، تر: عبد الفتاح الديدي، دار المعارف، (د.ط. دس)، مصر، ص 57.

² - Alfred Tarski, introduction à la logique, t: j, Tremblay, 03^{ème} éd, paris, 1971, p 03.

³ - محمد محمد قاسم مدخل إلى فلسفة العلوم، دار المعارف الجامعية، الإسكندرية، (د.ط)، 2000، ص 156.

ويقدم راسل بعض الروابط المنطقية أو الثوابت المنطقية، أو رابط القضايا، وهي أساسية في حساب القضايا، وهي:

أ: دالة التناقض (The contradictory function) أو النفي ويرمز لها بالرمز $(\sim)$ ، "وتسبق القضية دائماً ففي قولك (ق) قضية فعند نفيها نكتب $(\sim ق)$ ، ونقرأ: (ليس ق)، أو (نفي ق)، ويعبر عليها بشكل آخر ¹."

وتسمى فكرة النفي بالرباط الأحادي لأنه لا يربط بين قضيتين، وإنما يدخل على قضية واحدة فقط. أما تسميته بالرباط فلأنه يحدث تغييراً في قيم القضية التي يدخل عليها. ويسمى برابط النفي أو التقيض أو التناقض، ونعبر عنه في اللغة العربية بواسطة الألفاظ النافية مثل: ما، ليس، لا، لن، لم، وما في معناها.

فإذا قلنا "الأستاذ في قاعة المحاضرات" صادقة كان نفيها "لا أستاذ في قاعة المحاضرات" كاذبة، وإذا قلنا "ينجح الكسول في الامتحان" كاذبة كان نفيها "لا ينجح الكسول في الامتحان" صادقة مع اعتبار أن قيمة الصدق في البداية افتراضية لإحدى القضيتين²، ونوضح ذلك بواسطة الجدول:

ق	ك	$\sim ق$	$\sim ك$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

ب: دالة الجمع المنطقي (Teh logical sum) (أو)، ويطلق عليها بـ "الفصل" أو "رابط البديل"، ورمزه $(\vee)$ ، وهي تتوسط قضيتين بواسطة الأداة (أو)، لتقرر بصدق واحدة منها، فعندما نقول "إما أن تدرس الفلسفة أو تدرس اللغات" فستصدق القضية إذا درست واحدة منها. ولكن لن تكذب إذا درستهما الاثنين، وهو ما يسمى بالبديل وهي الفكرة الأولية المقصودة عند راسل. ومنه نستنتج من ذلك أن القضية «(ق $\vee$ ك) كاذبة في حالة واحدة فقط عند كذب كل من ق و ك، وتكون صادقة في جميع الحالات الأخرى» وفي ما يلي جدول توضيحي:

ق	ك	ق $\vee$ ك
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

وقد ذهب نسق البرنكيبي إلى تعريف الروابط الأخرى باستخدام هاتين الرابطتين (رابط النفي ورباط الفصل)، فـ «كل الروابط الأخرى تعرف إما بواسطة روابط مقدمة (واضحة بذاتها) أو بواسطة روابط معرفة بروابط مقدمة»³.

¹ - شطوطي محمد، اللغة المنطقية عند برتراند راسل، ص 128.

² - هادي فضل الله، مدخل إلى المنطق الرياضي (حساب القضايا والمحمولات)، دار الهادي للطباعة والنشر والتوزيع، بيروت، ط2، 2003م، ص 50.

³ - 91. p 03^{ème} éd, paris, 1962, la logique moderne, , jean chauniveau,

ج): دالة الحاصل المنطقي (Teh logical product) أو دالة الوصل ورمزها $(\wedge)$ ، ويرمز لها أحيانا بالرمز $(.)$ ، ويمكن تمثيل صورته العامة بالصيغة التالية: (ق، ك)

التي تعني: أن القضيتين ق، ك، صادقتان معا. ويلاحظ هنا أن النقطة التي ترد بين القضيتين فتربط بينهما، تعني ما تعنيه الأداة "و". وعادة ما تسمى القضايا التي يتم ربطها على هذا النحو مثل (ق، ك) بعناصر العطف أو عوامل حاصل الضرب المنطقي، أو القضايا المعطوفة أو المضروبة، كما يسمى التعبير المركب الذي ينتج عن ضرب قضيتين أو أكثر، أو عطفها، بالقضية العطفية أو بحاصل الضرب المنطقي the logical product¹.

مثال: سقراط فيلسوف وابن الرومي شاعر

إن قيمة القضية المركبة تألفت من قضيتين بسيطتين هما: سقراط فيلسوف وابن الرومي شاعر، تساوي من الناحية المنطقية قيمة القضيتين اللتين دخلتا في تركيبها وهما: سقراط فيلسوف، وابن الرومي شاعر.

وعليه، فإذا كانت القضيتان الداخلتان في تركيب القضية المتصلة صادقتين كانت القضية المتصلة صادقة، وبالعكس، أي إذا كانت القضية المتصلة صادقة تكون القضيتان الداخلتان في تركيبها صادقتين أيضا.

كذلك إذا كانت القضيتان الداخلتان في تركيب القضية المتصلة كاذبتين مع أو إحداها كاذبة والأخرى صادقة، فتكون القضية المتصلة المركبة منها كاذبة بدورها، وبالعكس، أي إذا كانت القضية المتصلة كاذبة تكون القضيتان الداخلتان في تركيبها كاذبتين أو إحداها كاذبة والأخرى صادقة.²

ولنوضح ذلك بواسطة الجدول التالي:

ق	ك	ق ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

د): دالة الاستلزام (اللزوم) The implicative function³، وتسمى أيضا التضمن، أو الشرط، وهي من أهم أدوات الحساب التحليلي عند راسل، حيث يقول «إن نسقنا المنطقي هو تضمن كلي في حساب القضايا»⁴، وهذه الدالة تربط بين قضيتين، ونرمز لها بالرمز: ق $\supset$ ك.

مثال: إذا كان الطالب في قسم الفلسفة فسيدرس المنطق.

هذه قضية شرطية تألفت من قضيتين بسيطتين هما: (كان الطالب في قسم الفلسفة) وتسمى المقدم، (سيدرس الفلسفة) وتسمى التالي، ومن أداة الشرط: إذا، .. ف

¹ - عزمي إسلام، أسس المنطق الرمزي، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ط1، 1980، ص 142-143.

² - الهادي فضل الله، منخل إلى المنطق الرياضي، المرجع السابق، ص 52-53.

³ - Alfred north whitehead and bertrand russell, principia mathematica, introduction, p 06.

⁴ - Alfred north whitehead and bertrand russell, principia mathematica, vol 01, Preface.

ولو نحن رمزنا للمقدم، أي للقضية (كان الطالب في قسم الفلسفة بالرمز (ق)، وللتالي أي للقضية (سيدرس المنطق) بالرمز (ك) لأصبحت القضية الشرطية هي:

إذا كان الطالب في قسم الفلسفة فسيدرس المنطق ورمزها: (ق $\supset$ ك) ونقرأها (إذا ق ف ك) أو (ق شرط ك) ولكانت قيمها كالآتي:

إذا صدق المقدم وصدق التالي، فإن القضية الشرطية تكون صادقة.

إذا صدق المقدم وكذب التالي، فإن القضية الشرطية تكون كاذبة.

إذا كذب المقدم وصدق التالي، فإن القضية الشرطية تكون صادقة.

إذا كذب المقدم وكذب التالي، فإن القضية الشرطية تكون صادقة.

وسنوضح هذا في الجدول التالي:

ق	ك	ق $\supset$ ك
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

وعليه فإن القضية الشرطية لا تكذب إلا في حال صدق المقدم وكذب التالي فقط؛ في حين أنها تصدق في باقي الحالات.¹

ويعتبر كل من الاستلزام، والوصل، والتكافؤ، من أهم الثوابت المعروفة في نسقه بالاعتماد على النفي والفصل.

تعريف الاستلزام: هو رابطة ثنائية إذ تربط بين قضيتين، فإن تستلزم القضية (ق) القضية (ك) تتضمنها فهذا يعني قولنا نفي الموصولين (ق) ونفي ك ($\sim$ ك)، ونرمز له بالرمز أي: ق $\supset$ ك = $\sim$ (ق، ك)

تعريف الوصل: ق، ك. = $\sim$ (ق $\vee$ ك).

تعريف التكافؤ: ق $\equiv$ ك = (ق $\supset$ ك)، (ك $\supset$ ق).²

ولا يتحقق التكافؤ المنطقي إلا في حالتي الصدق معاً، أو الكذب معاً. كما هو مبين في الجدول التالي:

ق	ك	ق $\leftrightarrow$ ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

عدل راسل في كتابه المشترك مع وايتهيد عن التضمن، واتخذ النفي ($\sim$) والفصل ($\vee$)، حدين أوليين يعني ابتدائيين يعرف بهما كل الحدود المشتقة ومنها التضمن، كما اقتصد في عدد المسلمات فقبل منها خمساً فقط، واستعمل الرموز مما يجعل متابعة التنسيق الاستنباطي في هذا الكتاب البرنكييا ماتياتيكا- أكثر يسراً ووضوحاً.

¹ - الهادي فضل الله، مدخل إلى المنطق الرياضي، المرجع السابق، ص 57.

² - Alfred north whitehead and bertrand russell, principia mathematica, introduction, p 12.

كما سبق أن قلنا أن النسق الاستنباطي يعتمد هنا على "النفي" و "الفصل" كحدين ابتدائيين، ونكتبها كما يلي:

النفي ~ ق
الفصل ق ∨ ك

2- القضايا الابتدائية

والآن نأتي على ذكر القضايا الابتدائية وهي القضايا التي يبدأ منها البرهان على نظريات النسق في نظرية حساب القضايا. وبما أن هذه القضايا واضحة بذاتها، والواضح بذاته لا يحتاج إلى برهان، فأصبحت هذه القضايا بمثابة مصادرات (مسلمات) للنسق، وهي خمسة بعدما عدلها راسل كما سبق ذكره، وصاغها انطلاقاً من الحدين الأولين ونورد المسلمات الخمسة فيما يلي:

1/ (ق ∨ ق) = ق هذه القضية تعني إذا كانت "ق" صادقة أو "ق" صادقة فإن "ق" صادقة. وتسمى هذه القضية الأولية (مبدأ تحصيل الحاصل، أو قانون التوتولوجيا Law of tautology).

2/ ك = (ق ∨ ك) ... وتعني إذا كانت ك صادقة، تكون إذن ق ∨ ك صادقة، وتسمى هذه القضية (قانون الجمع Addition).

3/ (ق ∨ ك) = (ك ∨ ق) ... تعني إذا كانت ق أو ك صادقة فإن ك أو ق صادقة، وتسمى (قانون تبادل المواضع للجمع المنطقي بين القضايا Premeditative law for logical addition).

4/ ق ∨ (ك ∨ ل) = (ك ∨ ل) ∨ ق ... وتعني إذا كانت ق أو (ك أو ل) صادقة فإن ق تكون ك أو (ق أو ل) صادقة، وتسمى (قانون الاشتراك Association).

5/ (ك ∨ ل) = (ق ∨ ك) ∨ (ق ∨ ل) ... وتعني هذه المسلمة الأخيرة أنه: إذا كان ك تستلزم ل فإن: "ق أو ك" يستلزم "ق أو ل"، وتسمى (مبدأ التجميع principle of summation)¹.

3- القضايا اللامعرفة

بعد القضايا الأولية في حساب القضايا، يقيم أصحاب البرنكيبيات نظريات منطقية مستنبطة من تلك البدايات. وهي بعض "القضايا البسيطة" يقول عنها أصحاب البرنكيبيات، أنها خصائص أساسية بالغة الأهمية لقضايا تبدو في الاستدلالات، «إن المنطق عندما يحلل ويقيم القضايا المركبة، يحرص وبشكل جوهري على اكتشاف تلك القوانين المنطقية، ولهذا فهو لا يكتفي بوضع قائمة من التوتولوجيا وهي من الناحية النظرية غير منتهية»²، وهذا ما قام به راسل مع وايتهد من خلال البرنكيبيات، حيث قدموا قوانين بسيطة وقوانين مركبة، هذه القوانين البسيطة يمكن حصرها في:

(1) قانون الثالث المرفوع The law of excluded middle

¹ - Ibid. p 13.

² - دوني فرنان، مدخل إلى فلسفة المنطق، تر: محمود يعقوبي، (دط، دس)، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 22.

وصيغته (ق ∨ ق) ، ونقرؤها ؛ إما أن تكون القضية ق صادقة أو كاذبة.

(2) قانون التناقض The law of contradiction

وصيغته (ق ∨ ق) ، بحيث من التناقض أن تكون القضية " ق " صادقة وكاذبة في آن واحد.

(3) قانون السلب المزدوج The law of double negation

وصيغته ق ≡ ~(~ ق) ، والذي يعني أن سلب السلب إيجاب.

(4) مبدأ نفي المقدم Tprinciple of transposition

ويعني أنه إذا كانت ق تتضمن ل فإن لا ق ؛ وللمبدأ ثلاثة صور في البرنكييا هي:

أ) (ق ⊃ ك) ≡ (~ ل ⊃ ~ ق)

ب) (ق ⊃ ك) ≡ (~ ق ⊃ ~ ل)¹

(5) قانون التوتولوجيا (تحصيل حاصل) The law of tautology

وله صورتان هما على الشكل التالي:

أ) ق ≡ (ق . ق)

ب) ق ≡ (ق ∨ ق)²

(6) قانون الامتصاص (الاستغراق) The Law of absorption

يسمى بالامتصاص لأنه إذا كانت قضية تتضمن قضية أخرى فإن الأولى تمتص الثانية لارتباطها بها ونكتب ما يلي:

(ق ⊃ ل) ≡ [ق ≡ (ق . ل)] ويعني أنه إذا كان ق يستلزم ل، فإن ق يكافئ ق وك³

أما القوانين المركبة، أو كما يسميها أصحاب البرنكييا قوانين خصائص الروابط، وهي ثلاثة قوانين:

- التبديلية: مثل الوصل والفصل إذ أن: ق ∨ ل = ل ∨ ق أو ق . ل = ل . ق.

- التجميعية: تسمح بحركة الأقواس إذ يمكن أن نكتب: (ق ∨ ل) ∨ ك = ق ∨ (ل ∨ ك)، ويمكن استخدامها مع رابطتي الفصل والوصل.

- التوزيع: إذ هناك قابلية للتوزيع بين العطف والفصل: ق ∨ (ل . ك) = (ق ∨ ل) . (ق ∨ ك)، وأيضاً: ق . (ل ∨ ك) = (ق . ل) ∨ (ق . ك)⁴

4- قواعد الاستدلال

يضع أصحاب البرنكييا قاعدتين لاستدلال قضايا أو نظريات من القضايا الأولية، وهما قاعدة التعويض Substitutions، وقاعدة إثبات التالي (الفصل) Modus ponens.

¹ - Alfred north whitehead and bertrand russell, principia mathematica. P 14

² - Ibid, p 14.

³ - Ibid, p 14.

⁴ - Ibid, p 14.

تقوم قاعدة التعويض على استبدال صيغة رمزية بصيغة أخرى تساويها في قيمة الصدق، ومن ثم نحصل على صياغة للصورة الأولى تمكننا من استنباط قضايا أخرى. مثال: إذا كانت صيغة مبدأ الهوية $Q \supset Q$ ، فإنه إذا عوضنا عن Q بالصيغة $Q \vee L$ ، وصلنا إلى مبدأ آخر هو $Q \vee L \supset Q \vee L$. أما قاعدة الفصل ويسمى بعض المناطق بـ "مبدأ القياس"، فهي تمكننا من بلوغ النتيجة أي فصلها من المقدمتين. فإذا كان لدينا معاً $(Q \supset L)$ وكان (Q) ومنه نستطيع فصل (L) .¹

نلاحظ أ، القضايا الأولية والقضايا المستنتجة منها جميعاً سميت بعد برنكييا "تحصيل حاصل" أو قضايا تحليلية، وهي الصيغ الرمزية التي تتألف من متغيرات وثوابت فقط، وتكون صادقة دائماً صدقاً منطقياً في كل قيم المتغيرات، وكان الغرض من نظرية حساب القضايا تحديد تلك الصيغ حيث ينتقل أصحاب البرنكييا بعد وضع اللامعرفات والتعريفات والقضايا الأولية وما يلزم عنها إلى اشتقاق نظريات منطقية أو صيغ صادقة صدقاً منطقياً، وبهذا اتسع مفهوم المنطق ليشمل المنطق الرياضي الذي أصبح قادراً على استيعاب الاستنباطات الرياضية المعقدة، ما لم يفعله المنطق الأرسطي الذي بقي منفصلاً عن الرياضيات، لأنه لم يستطع استيعاب كل هذا وبقي عاجزاً.

إن هذه النظرية تقدم لنا قوانين الاستنباط على نحو ذاته استنباطي أي برهاني بحيث لا تقبل بالبدهة أو الجدل الفلسفي قضية على أنها حقيقة، بل لابد من البرهان على كل قانون في المنطق، فيجعل المنطق أولى باليقين لكي يتسنى له اشتقاق الرياضيات منه، وهذا سيمكننا من رد الاعتبار لليقين الرياضي.

ثانياً: نظرية حساب الفصول (الفئات)

إن نظرية حساب الفصول، من دراسات المنطق الرياضي المعاصر ذات الأهمية المركزية، رغم أن بعض المناطق الرياضيين لم يقدموا لنا دراسة نظرية الفصول على أنها من النظريات ذات الفائدة المباشرة؛ زعماً بأن دراسة الفصول، في حد ذاتها، تخدم الفلسفة أكثر من المنطق أو الرياضيات، لكن أصحاب الاتجاه الرياضي يركزون بصفة مباشرة على أهمية هذه النظرية، بل نجد أعمالهم تتناول المواضيع الأساسية في النظرية خاصة في الرياضيات العليا.

وقد اتضح للمعاصرين من المناطق والرياضيين، أن نظرية الفصول تفضي إلى نتائج علمية تطبيقية في أهم جانب من جوانب البحث العلمي، خاصة في علم الفيزياء، خاصة النظرية النسبية لأنشتاين وظهور نظرية الاحتمالات.

1- تحديد مفاهيم

إن البحث في مسألة الفصول يرتد بصفة مباشرة إلى عقلية أرسطو، صاحب المنطق وواضعه الأول. لأن نظرية الفصول ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمبحث التصورات من ناحية، وبالمفهوم والمصدق من ناحية أخرى، ونظرية الأحكام من الناحية الثالثة، وما يرتبط بهذه الأبحاث جميعاً من نواحي تطبيقية سواء في الاستدلالات المباشرة أم الاستدلالات غير المباشرة.²

¹ - محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، ط1، 2007م، ص 219.

² - ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، المرجع السابق، ص 161-162.

وتأسيسا على هذا فإنه على الرغم من أننا لا نجد من بين مباحث المنطق الصوري الأرسطي مبحثا مستقلا لنظرية الفصول وأهميتها، إلا أننا نجد أرسطو يغلف نظرية المنطق بأسرها من خلال إدراكه التام لحقيقة الدور الذي يؤديه تصور الفصل في المنطق، وهذا ما جعله يميز بدقة بين الحدود والتصورات والمفهوم والماصدق والأحكام والقضايا.

ذكر راسل في كتابه "مبادئ الرياضيات" أن نظرية الفصول لكي تقوم على أساس استنباطي، يجب أن تنطلق من ثلاثة أفكار أولية: « الصنف، وعضوية الفرد في الصنف، وقد أخذ الأولى والثاني عن بيانو وأضاف هو الثالثة »¹.

يبين راسل أن يفترض ارتباطه بدالة القضية إذا عرفناه من ناحية الماصدق، "الصنف هو كل الأشياء التي تجعل قضية ما صادقة ومن ثم تحدد كل دالة قضية صنفا، بالرغم من إذا كانت دالة القضية كاذبة دائما، يصبح الصنف فارغا نعني ألا يكون له أعضاء"².

هذا يعني أن دالة القضية هي التي تحد الصنف، بحيث تصدق إذا عوض متغيرها س بأحد أعضاء الصنف، وتكذب إذا عوض بقيمة خارجة عن هذا الصنف، إذ فكل قيم الصدق التي تجعل الدالة صادقة تؤلف الصنف. فلو أخذ دالة القضية "س إنسان، كانت جميع الكائنات التي يمكن أن توضع مكان س لكي تتحول هذه الدالة إلى قضية صادقة هي المقصودة بالفئة"³، وبهذا يرى راسل أن الدالة القضية يمكننا تفسيرها أو شرحها لكن لا يمكننا تعريفها.

«فمثلا "س إنسان" دالة قضية، وفي أي قضية مهما تعقدت - بحيث لا تحتوي على متغيرات حقيقية - يمكننا أن نتخيل أحد الحدود - غير الأفعال والصفات - قد وضع مكانه حد آخر. فبدلا من "سقراط إنسان" يمكننا أن نضع "أفلاطون إنسان" "العدد 2 إنسان" وهكذا»⁴.

وهكذا يمكننا تعريف الفئة "على أنها جميع الحدود التي تحقق دالة قضية (دالة قضية) أيا كانت"⁵

إن راسل في مسألة البحث في نظرية الفصول لا يعضد وجهة نظر المفهومية أو الماصدقية (كوتورا)، بل يؤكد لنا أن المنطق الرياضي يقوم في مواضع وسطى بين المفهوم والبحث والماصدق والبحث.

وقد حاول راسل تبرير موقفه الوسط، ذلك لأن الفصل يتألف من حدود، كما يكون معينا حين تكون لدينا الحدود التي يتألف منها ومن ثم فإنه لا يمكننا إقامة تعريف للفصل باستخدام الطريقة المفهومية على أنه فصل من المحمولات المتعلقة بالحدود التي لدينا فقط، أما إذا حاولنا تعريف الفصل بالطريقة الماصدقية، فإننا سنعرفه بتعداد حدوده وبلتالي لن نتجنب من البحث في مسألة الفصول اللامتناهية.⁶

¹ - محمود زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، المرجع السابق، ص 249.

² - المرجع نفسه، 256-257.

³ - مهرا ن محمد، مقدمة في المنطق الرمزي، دار الثقافة، القاهرة، (دط)، 1988م، ص 244.

⁴ - برتراند راسل، أصول الرياضيات، ج1، المرجع السابق، ص 54.

⁵ - برتراند راسل، أصول الرياضيات، ج1، المرجع السابق، ص 54.

⁶ - ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، المرجع السابق، ص 165.

2- الرموز الأساسية المستخدمة في نظرية حساب الفصول

- 1- أعضاء الفئة:
ونرمز لها بالرمز ه، و، ي، والتي تقابلها الحروف Z.Y.X
- 2- رموز الفئات:
هناك من يستخدم الحروف اليونانية، Ψ ، K، وهناك من يستخدم الحروف الحديثة، F، G، H وهناك من يرمز لها بالحروف العربية أ، ب، ج.¹
- 3- عضوية الفرد في فئة:
رمزها ($\in$) وهو الحرف الخامس من حروف الهجاء اليونانية.
- 4- الفئة الكلية:
ويرمز لها أصحاب البرنكيبييا بالرمز ($\forall$)
- 5- الفئة الصفرية (الفارغة):
وهي الفئة الخالية أو عدم اشتغالها على أي عضو، ويرمز لها بالرمز $\emptyset$.²
- 6- فئة الاحتواء (احتواء فئة في فئة):
ويرمز لها بالرمز $\subset$ ، هذا حسب الأسلوب الأوروبي في الكتابة، وفي الأسلوب العربي يصبح $\supset$ ، فنعبر عن احتواء الفئة (أ) في الفئة (ب) بالصيغة أ $\subset$ ب
- 7- وجود الفئة:
نرمز إلى وجودها بالرمز $\exists$ أو ج! أ
- 8- رمز النفي (السلب):
وهو مشترك بين حساب القضايا ونظرية حساب القضايا في عمليات منطقية. ونرمز إليه بالرمز ($\sim$).
- 9- الضرب المنطقي:
ويرمز له بالرمز ($\cap$) في حساب الفصول، ويقرأ أ $\cap$ ب، ورمزنا له بالرمز (.) في حساب القضايا.
- 10- الجمع المنطقي:
ورمزنا له في حساب القضايا بالرمز $\vee$ ، ونرمز له في حساب الفصول بالرمز (U).
- 11- المساواة:
نرمز لها بالرمز (=)، فعلاقة المساواة تربط فئتين لها نفس الأعضاء.
تلك هي بعض صور الرموز المستخدمة في نظرية الحساب التحليلي للفصول. وننتقل الآن إلى القاعدة الثالثة من قواعد الاستدلال عند راسل وهي "نظرية الحساب التحليلي للعلاقات".

¹ - محمود زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، المرجع السابق، ص 228.

² - زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، ج1، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ط1966، ص 113-114.

³ - قاسم محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي، المرجع السابق، ص 303.

ثالثاً: الحساب التحليلي للعلاقات

نظرية العلاقات من أهم قضايا المنطق الرياضي عند راسل، لأنها منبج ضروري وأساسى فى المنطق والرياضيات معاً، هى شكل فرعاً هاماً فى المنطق الرياضى، وهى أكثر الفروع تقدماً، ولها جانبان عند أصحاب البرنكيبياء، جانب رياضى وآخر منطقي، هى ضرورية لأنه من النظر فى مسألة العلاقات تنشأ لدينا أفكار فى غاية الأهمية عن طبيعة النظرة للوجود وللعالم من حولنا. وقد عرفت مسألة العلاقات بصورة دقيقة فى أبحاث دي مورغان، وتشارلز بيرس، وشرويدر؛ إلا أن تفسير العلاقات فى الأبحاث السابقة على فترة رفض المذهب المثالى لم يكن جوهرياً لأسباب عديدة.¹

أول إشارة إلى حساب العلاقات نجدها عند ردي مورغان،² حين يدرس العلاقات بين الحدود، لكن بيرس أول من ساهم فى إقامة نظرية منطقية فى العلاقات.

يرى راسل أن منطق العلاقات له علاقة مباشرة بالرياضيات أكثر من منطق الفصول أو القضايا، وأنه لا يمكن التعبير عن الحقائق الرياضية تعبيراً صحيحاً من الناحية النظرية إلا باستخدام منطق العلاقات.³

ولقد طور شرويدر جمود بيرس فى بناء ضخم بحيث وسع نظرية العلاقات وأضاف أفكاراً أصيلة فى منطق حساب القضايا وحساب المحمول. لقد قرأ راسل منطق بيرس وشرويدر ورأى أن منطقها معقد وصعب للغاية، والسبب هو أنها لم يستند إلى طرق بيانو بل استند إلى جبر بول. ولكنه لاحظ أن بيانو نظرية كاملة فى حساب العلاقات، ومن ثم عكف على وضع أسس منطقية لنظرية العلاقات يستخدم فيها مصطلح بيانو الرمزي ويستعين بأفكاره المنطقية، بحيث يصبح من الممكن رد الرياضيات إلى المنطق، وتمكن من إقامة نظرية متكاملة للعلاقات.⁴

إن اشتغال راسل بفلسفة الرياضيات والمنطق الرياضى أفصح عن وجود أنواع مختلفة من العلاقات تلعب دوراً هاماً فى فلسفة الرياضيات بأسرها، بل وتستند إليها، وذلك لأن جزءاً كبيراً من فلسفة الرياضيات عني ببحث العلاقات، ولكل نوع منها استعمال مختلف عن الآخر.

العلاقة عند راسل "هى فصل الأزواج (Couples)، ونعني أن الزوج (هـ، و) أحد أعضاء صنف الأزواج الذى يؤلف العلاقة ع، إذا كانت هـ على علاقة ع مع و. سوف لا تقدم هذه النظرة إلى العلاقات كأصناف أزواج فى تناولنا الرمزي فإننا نذكرها فقط لكي تبين أن من الممكن فهم معنى أن ما يحدد العلاقة هو ما صدقاتها".⁵

لكن أصحاب البرنكيبياء يضيفون أنه يجب أن يكون للعلاقة أيضاً تعريف بالمفهوم أى أن يكون لها معنى Sense. يجب أن يكون للعلاقة اتجاه معين، أو ما عهروا عنه بالزوج المرتب Ordered pair؛ ومن ثم فعنصر الترتيب فى وضع أفراد العلاقة هو المقصود بالتعريف المفهومي للعلاقة. أو هى مجموعة من الأزواج المرتبة.

¹ - ماهر عبد القادر محمد على، فلسفة العلوم، المنطق الرياضى، المرجع السابق، ص 186.

² - برتراند راسل، أصول الرياضيات، ج1، المرجع السابق، ص 60.

³ - المرجع نفسه، ص 60.

⁴ - محمود زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، المرجع السابق، ص 266.

⁵ - المرجع نفسه، ص 268.

⁶ - نفسه، ص 268.

أ- أهم تصور العلاقات

دون راسل تحليلاً لأهم تلك التصورات يمكن أن نوجزها فيما يلي:

1- مربع العلاقة:

يرف راسل مربع العلاقة بأنه " تلك العلاقة التي تنشأ بين حدين (ه، و) عندما يوجد لدينا حد متوسط ع بحيث إن العلاقة التي لدينا تقوم بين (ه، ع) وبين (ع، و) ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات علاقة "الجد للأب" والتي ينظر إليها كمرجع علاقة الوالد".

2- ميدان العلاقة Domain of relation:

يتكون ميدان العلاقة من كل " حدود التي لها نفس العلاقة مع شيء ما أو غيره"

3- النطاق العكسي لعلاقة ما:

هو صنف كل الحدود التي يكون شيء ما على علاقة ع معها مثل صنف (كل الناس الذين لهم آباء)

4- مجال العلاقة:

يتألف مجال العلاقة من نطاق العلاقة ونطاقها العكسي معاً، فإذا كانت الأبوة هي العلاقة الأساسية فإن الآباء يكونون ميدان العلاقة أما الأشياء فيكونون ميدانها العكسي، والآباء والأبناء معاً هما مجال العلاقة.

5- عدد العلاقة:

يعرف عدد علاقة ما معطاه لدينا بأنه " فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقة التي لدينا"¹

ب- أنواع العلاقات

يمكن أن نوجز أنواع العلاقات في نوعين أساسيين هما:

النوع الأول: العلاقات التماثلية

1- العلاقة التماثلية: Symmetrical relation

ولكي نفهم هذه العلاقة لابد لنا من تعريف السلسلة عند راسل ويقول في ذلك: « السلسلة كلمة قديمة، ومألوفة لكنني أعتقد أنني كت أول من وضع لها معنى مضبوطاً، فالسلسلة حسب تعريفي هي طائفة مجموعة من الحدود ينظمها ترتيب مصدره علاقة ذات خصائص ثلاث² »

وتقوم بين حدين ه، و بحيث يمكن أن تقوم هي ذاتها بين و، ه، ومن أمثلة هذه العلاقات، المساواة، علاقة الأخ، الأخت، فإذا كان ه = و فإن و = ه.

2- العلاقة اللاتماثلية: asymmetrical relation

وتقوم بين ه، و، بحيث لا يمكن قيامها هي ذاتها بين و، ه، ومن أهم أمثلة هذا النوع من العلاقة، علاقة (أكبر من)، (أصغر من)، (أسبق من)، فإذا كان 'ه' أب 'و' فلا نستطيع القول أن 'و' أب 'ه'

3- العلاقة بين Non – symmetrical relation

¹ - ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم، المنطق الرياضي، المرجع السابق، ص 189.
² - برتراند راسل، فلسفتي كيف تطورت، ترجمة عبد الرشيد الصادق، مكتبة الأنجلو المصرية، مصر، 1963، ص 109.

وهي علاقة قد تكون تماثلية وقد لا تكون، من أهمها علاقة (الأخ) فإذا كان ه أخ و، فقد لا يكون 'و أخ' ه' لأنه قد يحدث أن 'و' أخت 'ه'.

- النوع الثاني: العلاقات المتعدية

1- العلاقة المتعدية Transitive relation:

وهي التي إذا كانت تقوم بين "ه" وكما تقوم ذاتها بين "و"، "ي" فإنها تقوم بين "ه"، "ي"، ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات: قبل، بعد، أكثر من، أصغر، فوق، وهذه العلاقات متعدية ولا تماثلية مثل علاقة المساواة، أو علاقة الذاتية.¹

2- العلاقة اللازمة Intransitive relation:

إذا قامت علاقة بين "ه"، "و"، وكما تقوم بين "و"، "ي" لكن لا تقوم بين "ه"، "ي". ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات، علاقة "والد" لأنه إذا قلنا "ه" أب "و"، و"أب" "ي" فلا يعني ذلك أن "ه" أب "ي".

3- العلاقة بين Non – symmetrical relation:

وهي قد تكون متعدية أو لا تكون، مثل: أخ، صديق لـ، صديق لـ، مختلف، أخ الأخ ليس أبا لأنه نفس الشخص.

ج- أنواع العلاقات الأساسية بين الحدود

للعلاقات أنواع كثيرة، ولكل نوع منها خصائص متعددة فضلا عما تكتسبه من أهمية بالنسبة للنسق الاستنباطي ككل، ومن أهم هذه العلاقات:

1- علاقة كثير One-many

2- علاقة واحد واحد one - one

3- علاقة التشابه

في بادئ الأمر كانت دراسة راسل للعلاقات دراسة رياضية، إلا أن فكرة الثوابت المنطقية قد أوحى له أن العلاقة لا تخص الرياضيات وحدها، بل تخص المنطق أيضا، إذ يقول: «هذه الأنواع الثلاثة السالفة الذكر من العلاقات هي تلك التي لها أكبر الأهمية في منطقة الانتقال التي تقع بين المنطق والرياضيات العادية»². إن من أقرب الموضوعات إلى الواقع الوجودي للعلاقات، فنظرتك إلى الأشياء ترى أن هناك علاقة فيما بينها، والرياضيات المعاصرة تستخدم هذا المفهوم استخداما واضحا في قضاياها.

إن قضايا العلاقات هي أقرب إلى الرياضيات، وأكثر تعقيدا من النظرية حساب القضايا ونظرية حساب الفئات، لأن الرياضيات امتداد للمنطق الذي يبنى من أوليات تعد أساس حساب القضايا، وبناء صرح المنطق يتزايد في التعقيد حتى يشمل الرياضيات، فتكون أسس الرياضيات منطقية، بمعنى أن هناك نقطة ما يلتقي المنطق فيها بالرياضيات، بما أن المنطق أكثر أولية، فكيف أرجع راسل الرياضيات إلى أصول منطقية؟

¹ - محمود زيدان، المنطق الرمزي نشأته وتطوره، المرجع السابق، ص 270.

² - برتراند راسل، فلسفتي كيف تطورت، المرجع السابق، ص 110.