Problèmes de type obstacle : algorithmes de résolution

Samira Lagraf[1] & Hocine Sissaoui[2]

[1]*Laboratoire LAMAHIS.Université 20 Aout 55, Skikda. Algérie*

[2]*Laboratoire LANOS. Université Badji Mokhtar, Annaba. Algérie*

Révisé le 17/10/2011
Accepté le 09/01/2012

ملخص
نعتبر المسألة من صنف عقبة في شكل متراجحة التغاير . تقريب هذه المتراجحة التغايراتية بطريقة العناصر المنتهية الخطية تؤدي إلى دراسة ثلاثة خوارزميات للحل. النتائج العددية المرفقة في هذا العمل تمكن من مقارنة هذه الخورزميات.

الكلمات المفتاحية : *مسألة عقبة- متراجحة تغايراتية- العناصر المنتهية- الخورزميات.*

Résumé
On considère la formulation de problème de type obstacle sous forme d'inéquation variationnelle. La discrétisation de l'inéquation variationnelle par la méthode des éléments finis linéaires conduit à l'étude de trois algorithmes de résolution numérique. Des simulations numériques sont données pour comparer ces différents algorithmes.

Mots clés : *Problème de l'obstacle - Inéquation variationnelle - Eléments finis- Algorithmes.*

Abstract
One considers the variational inequality formulation of problems of the obstacle type. The discretisation of the problem by linear finite element method leads to the study of three numerical solution algorithms. Numerical experimentations are given in order to compare the algorithms.

Keywords: *Obstacle problem - Variational inequality - Finite Elements- Algorithms.*

Auteur correspondant : lagsam2003@yahoo.fr

©UBMA - 2012

1. INTRODUCTION

On rencontre les problèmes avec contraintes de type inégalité dans des domaines variés [1] (mécanique, physique, économie, contrôle optimal, etc….)

Ces problèmes sont très importants tant sur le plan théorique (mathématique) que numérique et algorithmique. De tels problèmes sont, en général, modélisés par des inéquations variationnelles (I.V.)[2].

Le problème de l'obstacle est l'un des problèmes les plus étudiés de l'analyse numérique et possède différentes formulations mathématiques [3 - 9].

Dans ce travail, nous considérons la formulation en I.V. de ce problème. Cette formulation est la plus générale et possède plusieurs avantages. Nous proposons dans cette étude d'utiliser trois algorithmes itératifs de résolution numérique du problème de l'obstacle discrétisé par la méthode des éléments finis triangulaires linéaires [10].

Notre objectif principal consiste à montrer, d'une part que les algorithmes classiques simples des approximations successives, de pénalisation et des multiplicateurs de Lagrange sont capables de produire des résultats numériques acceptables et, d'autre part, que leur programmation est relativement simple et permet d'envisager le développement de logiciels scientifiques performants et à moindre coût.

La section1 est consacrée à la description, la formulation mathématique et la discrétisation du problème de l'obstacle. La section2 décrit les trois algorithmes simples et efficaces de résolution. La section3 contient les résultats numériques concernant deux exemples de problèmes d'obstacle. La section 4 est consacrée au problème de Signorini et enfin la section 5 contient les résultats numériques relatifs à ce problème.

2. PROBLEME DE L'OBSTACLE

2.1 Description du problème

Soient Ω un domaine de IR^2, de frontière Γ suffisamment régulière,

$f \in L^2(\Omega), q \in H^2(\Omega)$ et $q\big|_\Gamma \leq 0.$

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq f & dans\ \ \Omega \\ u \geq q & dans\ \ \Omega \\ (-\Delta - f\ )(u-q) = 0 & dans\ \ \Omega \\ u = 0 & sur\ \ \Gamma \end{cases} \qquad (1)$$

Ce problème est appelé problème de l'obstacle. La solution u représente un petit déplacement transversal d'une membrane élastique Ω fixée le long de sa frontière f, soumise à une force f et heurtant un obstacle rigide q.

Le problème de l'obstacle est un exemple type d'un problème de frontière libre que l'on peut interpréter ainsi : la solution u divise le domaine Ω en deux sous domaines :

$$\Omega = \Omega^q \cup \Omega^+$$

où $\Omega^+ = \{(x,y) \in \Omega : u(x,y) > q(x,y)\}$

et $\Omega^q = \{(x,y) \in \Omega : u(x,y) = q(x,y)\}$

Ces deux sous domaines sont séparés par une frontière libre notée par :

$$\Pi = \partial\Omega^q \cap \partial\Omega^+$$

qui est a priori inconnue et qu'il faudra déterminer si nécessaire.

2.2 Formulation mathématique

La formulation (1) du problème de l'obstacle est la formulation forte. On s'intéresse dans ce travail à la formulation en I.V. du problème de l'obstacle. En effet, la forme bilinéaire a(.,.) associée au problème (1) peut ne pas être symétrique et ainsi donc la formulation en I.V. est la plus appropriée. A cet effet, soit

$$V = H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v\big|_\Gamma = 0 \right\}$$

Et , soit le problème en I.V. suivant :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K\ tel\ que : \\ a(u, v-u) \geq L(v-u) \forall v \in K \end{cases} \qquad (2)$$

©UBMA - 2012

où $a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, d\Omega$

$L(v) = \int_{\Omega} f \, v \, d\Omega$

et $K = \{ v \in H_0^1(\Omega), u \geq q \; dans \; \Omega \}$ (3)

D'après Brezzis-Stampacchia [11], la solution u de ce problème existe et est dans $H^2(\Omega)$.

2.3 Discrétisation par éléments finis

On considère une triangulation T_h d'éléments finis triangulaires T vérifiant :

$$T \subset \overline{\Omega}, \forall T \in T_h, \bigcup_{T \in T_h} T = \overline{\Omega}$$

$$T_1^0 \cap T_2^0 = \varnothing, \forall T_1^0, T_2^0 \in T_h et \, T_1 \neq T_2$$

où $T_i^0, i = 1$ou 2 est à l'intérieur de T_i

$$\sum_h = \{ P \in \overline{\Omega}, P \; est \; sommet \; de \; T \in T_h \}$$

On discrétise l'espace $H_0^1(\Omega)$ par l'espace d'éléments finis suivant :

$$H_{0h} = \{ u_h \in C^0(\overline{\Omega}) : u_h|_{\Gamma} = 0, u_h(T) \in P_1 \}$$

où

$P_1 = \{ p : p(x,y) = ax + by + c \}$ et $(a,b,c) \in IR^3$.

Les fonctions $\varphi_j, 1 \leq j \leq N$, représentent la base canonique de H_{0h} Ces fonctions vérifient $\varphi_j(a_i) = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecher et a_i un point de Ω).

Donc, pour tout $u_h(x,y) \in H_{0h}$, on a $u_h(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x,y)$

Le convexe K est approché par :

$$K_h = \{ u_h \in H_{0h}, u_h(P) \geq q(P) \} \quad (4)$$

pour tout point P de $\sum_h$.

K_h est un convexe fermé de H_{0h} [4].

L'analogue discret du problème (2) est donnée par la formulation suivante :

$$\begin{cases} Trouver \; u_h \in K_h \; tel \; que : \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) \\ \qquad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (5)$$

Ce problème admet une solution unique [4]. En outre, on a les résultats de convergence et de l'estimation d'erreur à priori suivants :

Théorème 1 [4] On suppose les angles de la triangulation T_h uniformément bornés par $\theta_0 > 0$, quand $h \to 0$ alors :

$$\lim_{h \to 0} \| u_h - u \|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

où u_h et u sont des solutions de (5) et (2) respectivement et $\|.\|$ est la norme de $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 2 [12] Il existe une constante C, indépendante du pas h et de la solution u_h de (5), qui satisfait :

$$\| u_h - u \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$$

3. ALGORITHMES DE RESOLUTION

Il existe plusieurs algorithmes de résolution du problème (5). Dans cette section, nous allons considérer trois algorithmes classiques grâce à leurs simplicité, efficacité et propriétés de convergence. Ces trois algorithmes sont en fait une adaptation de la méthode de surrelaxation successive. Nous donnons ci-dessous les détails concernant chaque algorithme.

3.1 Algorithme des approximations successives

Cette méthode est basée sur l'équation de point fixe

©UBMA - 2012

$$u = S_\rho(u) \qquad (6)$$

Où l'opérateur $S_\rho : H_0^1(\Omega) \to K$ est défini par $S_\rho = P_K(v - \rho(Av - f)), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

où A est, d'après le théorème de Lax-Milgran [13], l'opérateur associé à la forme bilinéaire $a(.,.)$ du problème (2) et est défini par :

$$(Au, v) = a(u, v), \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

P_K est la projection sur le convexe K défini par Banach [13].

D'où l'équivalence [13] entre le problème sous forme d'I.V. (2) et le problème sous forme d'équation de point fixe (6).

Le théorème de Banach [13] montre qu'il existe des valeurs $\rho > 0$ telles que S_ρ soit une contraction et ainsi donc l'équation (6) admet une solution unique $u \in K$, qui est aussi solution de l'inéquation variationnelle (2). En plus, ce même théorème donne :

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| u^{(k)} - u \right\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

Où la suite $(u^{(k)})_{k \in IN}$ est définie par :

$$\begin{cases} u^0 \in K \\ u^{k+1} = S_\rho(u^k) \;\; k = 0,1,2..... \end{cases}$$

Agorithme1

Etapes de l'algorithme

Etape 1 : On fixe u^0.

Etape 2 : On calcule $u^{(k)} = (u_{ij}^{(k)}) \in IR^{N \times M}$, solution de :

$$u_{ij}^{(k)} = \max(q_{ij}, (1-\omega)u_{ij}^{(k-1)} + (\omega/4)(u_{i-1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + f_{ij}))$$

q_{ij} représente la composante de la fonction q, définie dans (4), au point (i, j).

Etape 3 : On fixe un critère d'arrêt. Si $u^{(k)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête, sinon, on pose k = k+1 et on retourne à l'étape 2.

ω est le paramètre de relaxation.

3.2 Algorithme de la pénalisation

Introduisons le problème pénalisé suivant associé au problème (2) :

$$\begin{cases} Trouver\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon} j(v) - \dfrac{1}{\varepsilon} j(u_\varepsilon) \\ \qquad \geq (f, v - u_\varepsilon) \quad \forall v \in V \end{cases} \qquad (7)$$

ε est un paramètre strictement positif qui tend vers 0 et $j(.)$ est la fonctionnelle vérifiant certaines propriétés.

Théorème 3 [13] Si la fonctionnelle $j : H_0^1(\Omega) \to IR \bigcup \{\infty\}$ vérifie :

$$\begin{cases} j\ estconvexe, propre \\ et\ semi\ continue\ \inf\ érieurement \\ j(v) \geq 0\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ j(v) = 0\ \ ssi\ v \in K \end{cases}$$

Le problème (7) admet une solution unique.

Théorème 4 [13] Soit u solution du problème (2) et u_ε, la solution du problème pénalisé (7), alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| u_\varepsilon - u \right\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

Pour le problème de l'obstacle soit: $j(u) = (u - q)^- = \max(0, -(u - q))$

Algorithme 2

Etapes de l'algorithme

étape1 : On fixe $u^{(0)}$

étape2 : On calcule

$u^{(k)} = (u_{ij}^{(k)}) \in IR^{N \times M}$ solution de :

©UBMA - 2012

On distingue deux cas :

Si $u_{ij}^{(k)} \geq q_{ij}$, alors on a :

$$u_{ij}^{(k)} = (1-\omega)u_{ij}^{(k-1)} + (\omega/4)(u_{i-1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + f_{ij})$$

Si $u_{ij}^{(k)} < q_{ij}$, alors on a :

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4+\varepsilon^{-1}}(u_{i-1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + f_{ij} - \varepsilon^{-1}q_{ij})$$

étape 3 : Si $u^{(k)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête, sinon, on pose k = k+1 et on retourne à l'étape 2.

3.3 Algorithme du Lagragien

On introduit le vecteur multiplicateur de Lagrange $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^T \in IR^m$ et l'ensemble

$$B = \left\{ b = (b_i) \in IR^m ; b_i \leq 0, i = \overline{1,m} \right\}$$

Pour le convexe $K \subset H_0^1(\Omega)$, on suppose que $K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \Phi_j \leq 0, j = \overline{1,m} \right\}$

où la fonctionnelle $\Phi : H_0^1(\Omega) \to IR^m$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m)^T$ et satisfait la condition de Lipschitz [13], et telle que $\Phi_i : H_0^1(\Omega) \to IR$ pour tout $i = \overline{1,m}$ est un convexe.

On note par $\langle .,. \rangle$ la produit scalaire sur IR^m.

On introduit le problème dual :

$$\begin{cases} Trouver\, [u, p] \in H_0^1(\Omega) \times B : \\ (Au, v-u) \geq \langle p, \Phi(v) - \Phi(u) \rangle \\ \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \langle b - p, \Phi(u) \rangle \geq 0 \quad \forall b \in B \end{cases} \quad (8)$$

où $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$

Théorème 5 [13] Soit l'opérateur A fortement monotone et continu, et soit la fonctionnelle Φ Lipschitzienne, si $[u, p] \in H_0^1(\Omega) \times B$ est solution du problème (8), alors u est solution de (2).

Pour le problème de l'obstacle, on a $\Phi(u) = \int_\Omega (q-u) d\Omega$

Algorithme 3

Etapes de l'algorithme

étape 1 : On choisit p^0 et on fixe u^0.

étape 2 : On calcule $u^{(k)} = (u_{ij}^{(k)}) \in IR^{N \times M}$ solution de :

$$u_{ij}^{(k)} = (1-\omega)u_{ij}^{(k-1)} + (\omega/4)(u_{i-1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + f_{ij} - p_{ij}^{(k)})$$

étape 3 : On calcule $p^{(k+1)}$ donné par : $p_{ij}^{(k+1)} = \min\left(0, p_{ij}^{(k)} + \rho(q_{ij} - u_{ij}^{(k)})\right)$ où $\rho > 0$ est donné.

étape 4 : On fixe un critère d'arrêt. Si $u^{(k)}$ satisfait le critère d'arrêt, on arrête. Sinon on pose $k = k+1$ et on retourne à l'étape 2.

4. SIMULATION ET RESULTATS NUMERIQUES

Dans cette section, les algorithmes présentés ci dessus sont testés et comparés sur deux exemples simples du problème de l'obstacle qui constitue un exemple classique motivant dans l'étude mathématique des inéquations variationnelles. Le premier exemple est celui de l'équilibre de petits déplacements verticaux d'une membrane élastique fixée le long de sa frontière $\partial\Omega$ et déplacée par un obstacle rigide :

$$\begin{cases} Trouver\, u \in H_0^1([-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]) \\ tel\ que : \\ -\Delta u \geq 0, u(x, y) \geq q(x, y) \\ et\ (u-q)\Delta u = 0\ p.p\ sur\ \Omega \\ u = 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

©UBMA - 2012

Où $q(x,y)=\begin{cases} -0.4+(0.25-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \quad si\ x^2+y^2\le 0.09 \\ 0\ ailleurs \end{cases}$ et

soumise à une force $f(x,y)=0$.

Dans le deuxième exemple, on prend $f(x,y)=-2x-y$ et $q(x,y)=-0.8$

4.1 Exemple 1

Dans ce qui suit, nous allons considérer le premier problème auquel on associe la formulation en I.V. que l'on discrétise par la méthode des éléments finis triangulaires linéaires. Ensuite, on utilise les trois algorithmes donnés ci-dessus pour approcher la solution du problème discret (5) associé à ce problème. Pour simplifier la présentation, nous considérons seulement deux nœuds, l'un le nœud «9 » situé dans la région de contact et l'autre, le nœud « 1 » situé à l'extérieur de la région de contact, représentés sur la figure 1. La détermination de la région de contact sera aussi exposée ultérieurement dans la section 4.1.2. Pour chaque méthode, nous donnons les résultats numériques pour quatre pas : h=1/8, 1/16, 1/32 et 1/64. Nous indiquons aussi le nombre d'itérations ainsi que l'erreur absolue, qui est la différence entre la solution approchée et la solution exacte, considérée comme étant égale à la solution approchée pour le pas h=1/128. Les paramètres utilisés dans chaque algorithme sont obtenus par expérimentation numérique et sont généralement le résultat d'un jeu d'équilibre avec le paramètre de discrétisation. Soit la formulation en I.V. associée au premier problème

$$(IP_1)\ \begin{cases} Trouver\ u\in H_0^1(\Omega)\ tel\ que: \\ \int \nabla u.\nabla(v-u)\ge 0 \end{cases}$$

où $q(x,y)=\begin{cases} -0.4+(0.25-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \quad si\ x^2+y^2\le 0.09 \\ 0\ ailleurs \end{cases}$

et $K=\left\{u\in H_0^1(\Omega)/u(x,y)\ge q(x,y)\right\}$ où $\Omega=[-0.5,0.5]\times[-0.5,0.5]$

Pour simplifier les calculs, on utilisera les symétries axiale et diagonale.

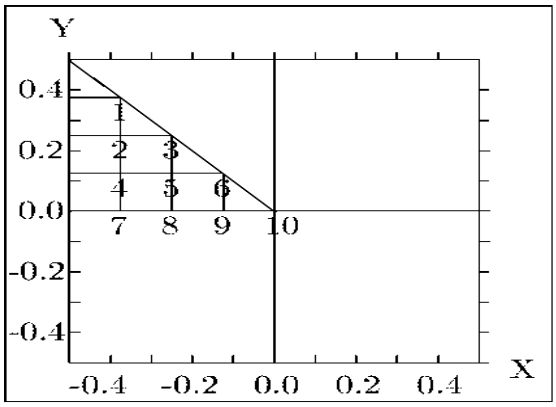

Figure 1. Domaine de résolution du problème IP_1

On compare le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la solution pour les trois méthodes, ainsi que l'erreur absolue au voisinage des deux points, l'un « 9 » situé à l'intérieur de la région de contact et l'autre « 1 » situé à l'extérieur.

4.1.1 Résultats numériques

Pour la méthode des approximations successives, pour le paramètre de relaxation $\omega=1.87$, voir le tableau 1 ci-après. Pour les résultats obtenus par la méthode du Lagrangien, pour le paramètre de relaxation $\omega=1.3$, et pour $\rho=10^{-3}$, voir le tableau 2. Quant aux résultats obtenus par la méthode de la pénalisation, pour le paramètre de relaxation $\omega=1.83$, et $\varepsilon=10^{-3}$, voir le tableau 3.

Nous remarquons d'abord que les résultats numériques obtenus corroborent l'estimation théorique de l'erreur qui est d'ordre 1 c'est-à-dire $o(h)$. Nous constatons que le pas le plus fin est h=1/64, les trois méthodes sont plus ou moins équivalentes par rapport à la précision des résultats. Néanmoins par rapport au nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation est de loin supérieure avec seulement 111 itérations. Notons également la convergence monotone car l'erreur diminue lorsque h tend vers zéro.

©UBMA - 2012

Tableau 1. Résultats obtenus par les approximations successives pour le problème IP_1.

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 9 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 1 »	Erreur absolue
1/8	61	0.08412291	0×10^{-8}	0.00631396	2.69×10^{-4}
1/16	71	0.08412291	0×10^{-8}	0.00642734	1.13×10^{-4}
1/32	187	0.08412291	0×10^{-8}	0.00651700	2.38×10^{-5}
1/64	849	0.08412291	0×10^{-8}	0.00653688	4.06×10^{-6}

Tableau 2. Résultats obtenus par le LAGRANGIEN pour le problème IP_1.

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 9 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 1 »	Erreur absolue
1/8	285	0.08257862	9.59×10^{-3}	0.00631396	6.88×10^{-4}
1/16	698	0.08380959	1.98×10^{-3}	0.00643205	1.11×10^{-5}
1/32	1071	0.08412051	3.64×10^{-4}	0.00652008	1.33×10^{-6}
1/64	1763	0.08412853	7.301×10^{-6}	0.00653717	1.206×10^{-6}

Tableau 3. Résultats obtenus par la pénalisation pour le problème IP_1.

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 9 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 1 »	Erreur absolue
1/8	60	0.08357922	5.51×10^{-5}	0.00628545	2.30×10^{-4}
1/16	72	0.08395678	1.67×10^{-5}	0.00642068	1.13×10^{-5}
1/32	86	0.08408121	1.67×10^{-5}	0.00651461	2.41×10^{-5}
1/64	111	0.08411248	1.04×10^{-6}	0.00653635	4.02×10^{-6}

4.1.2 Représentation de la région de contact

La détermination de l'approximation de la région de contact est obtenue à posteriori à l'aide de la vérification $u_h(x,y)=q(x,y)$ pour le pas h=1/128. La courbe en pointillés (Fig. 2), est l'interface séparant la région de contact de celle de non contact. Cette approximation est identique à celle obtenue par Sissaoui [8].

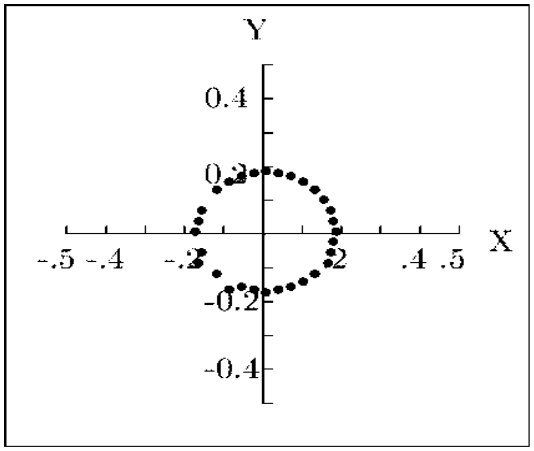

Figure 2. Région de contact du probléme IP_1

©UBMA - 2012

4.2 Exemple 2

$$(IP_2)\begin{cases} Trouver\ u \in H_0^1(\Omega)\ tel\ que: \\ \int \nabla u.\nabla(v-u) \geq \\ \qquad \int_\Omega (-2x-y)(v-u)d\Omega \end{cases}$$

Où $K = \{u \in H_0^1(\Omega) / u(x,y) \geq -0.08\}$ et $\Omega = [0,1]\times[0,1]$

La figure 3 représente le domaine de résolution $\Omega = [0,1]^2$ du problème. Pour les mêmes raisons invoquées dans l'exemple 1, on considère deux points l'un « 5 » situé à l'intérieur de la région de contact et l'autre le point « 7 »situé à l'extérieur de celle-ci.

4.2.1 Résultats numériques

Pour la méthode des approximations successives, pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.83$, voir le tableau 4. Pour la méthode du Lagrangien $\omega = 1.8$ et $\rho = 2\times10^{-3}$ voir le tableau 5. Ainsi que pour la méthode de pénalisation pour $\omega = 1.86$ et pour $\varepsilon = 0.001$ voir le tableau 6. Par rapport à la précision des résultats obtenus, les trois méthodes sont sensiblement équivalentes. Néanmoins par rapport au volume de calcul, la méthode de pénalisation est de loin supérieure aux deux autres avec seulement 110 itérations. Nous remarquons également la convergence monotone des trois algorithmes.

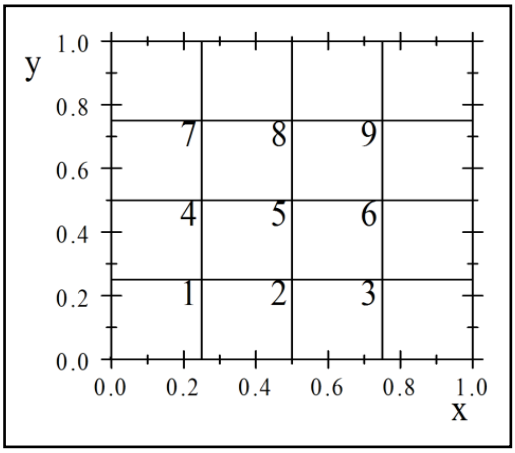

Figure 3. Domaine de résolution du problème IP_2

Tableau 4. Résultats obtenus par les approximations successives pour le problème IP_2 .

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 5 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 7 »	Erreur absolue
1/8	45	-0.079999998	0×10^{-8}	-0.058370613	9.201×10^{-6}
1/16	55	-0.079999998	0×10^{-8}	-0.052910805	5.604×10^{-5}
1/32	71	-0.079999998	0×10^{-8}	-0.054401796	8.14×10^{-6}
1/64	185	-0.079999998	0×10^{-8}	-0.054448225	1.53×10^{-6}

©UBMA - 2012

Tableau 5. Résultats obtenus par le Lagrangien pour le problème IP_2 .

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 5 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 7 »	Erreur absolue
1/8	464	-0.08676835	6.76×10^{-3}	-0.05444845	7.38×10^{-4}
1/16	831	-0.080121247	1.21×10^{-3}	-0.05294783	9.27×10^{-5}
1/32	1150	-0.08017659	1.76×10^{-4}	-0.05445532	6.24×10^{-5}
1/64	1536	-0.08001349	1.041×10^{-5}	-0.05444832	8.85×10^{-6}

Tableau 6. Résultats obtenus par la pénalisation pour le problème IP_2 .

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 5 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 7 »	Erreur absolue
1/8	57	-0.080021068	2.107×10^{-5}	-0.054452535	4.75×10^{-6}
1/16	75	-0.080005854	5.85×10^{-6}	-0.054401461	5.58×10^{-5}
1/32	91	-0.080001466	1.46×10^{-6}	-0.054448429	8.85×10^{-6}
1/64	110	-0.080000363	3.65×10^{-7}	-0.054455746	1.54×10^{-6}

4.2.2 Représentation de la région de contact

On obtient l'interface, séparant les deux régions de contact et de non contact obtenue également par Glowinski [14] (Fig. 4).

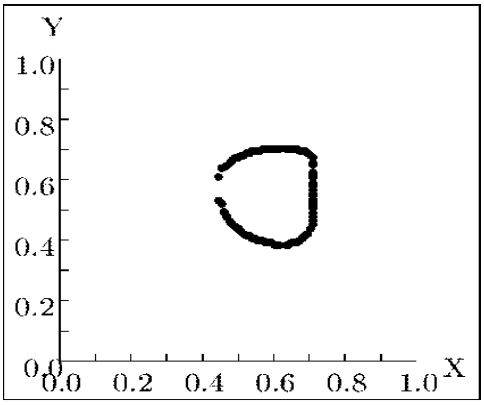

Figure 4. Région de contact pour le probléme IP_2 .

5. PROBLEME DE SIGNORINI

5.1 Description du problème

Le problème de Signorini est un problème très connu et peut être considéré comme un cas particulier du problème de l'obstacle dans le sens où la contrainte d'inégalité est seulement imposée sur une partie Γ_1 de la frontière Γ . La formulation forte est formellement donnée par :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & p.p \quad dans \quad \Omega \\ u = 0 & p.p \quad sur \quad \Gamma_0 \\ u \geq 0, \dfrac{\partial u}{\partial n} \geq g & \\ et \ u(\dfrac{\partial u}{\partial n} - g) = 0 & p.p \quad sur \quad \Gamma_1 \end{cases} \tag{9}$$

Où $\Omega \subset IR^2$ est un domaine de frontière Γ suffisamment régulière. On suppose que $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, $f \in L^2(\Omega)$ et g une fonction suffisamment régulière sur Γ .

5.2 Formulation variationnelle

La formulation (9) du problème est appelée formulation forte. On définit I.V. relative à ce problème.

©UBMA - 2012

On pose $V = H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K\ tel\ que : \\ a(u,v-u) \geq L(v-u)\ \ \forall v \in K \end{cases} \quad (10)$$

Où $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, d\Omega$,

$L(v) = \int_\Omega f\, v \, d\Omega$

et $K = \left\{ v \in H^1(\Omega) : u\big|_{\Gamma_0} = 0, u\big|_{\Gamma_1} \geq 0\, p.p \right\}$

D'après Brazis [15], la solution u de ce problème est dans $H^2(\Omega)$

5.3 Discrétisation par éléments finis

On considère une triangulation T_h définie dans la section (2.3).

L'espace $H^1(\Omega)$ est approché par l'espace d'éléments finis suivant

$H_h = \left\{ u_h \in C^0(\overline{\Omega})\ tel\ que : u_h\big|_\Gamma \in P_1 \right\}$ On définit $\Gamma_h = \left\{ P \in \Sigma_h \bigcap \Gamma \right\}$ Alors K est approché par :

$K_h = \left\{ u_h \in H_h, u_h(P) \geq 0, \forall P \in \Gamma_h \right\}$ K_h est un convexe fermé de H_h et $K_h \subset K$ [4].

Le problème discret associé s'écrit :

$$\begin{cases} Trouver\ u_h \in K_h\ tel\ que : \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) \\ \qquad \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (11)$$

D'après Glowinski [4], ce problème admet une solution unique qui vérifie :

Théorème 6 [4] On suppose les angles θ de la triangulation T_h uniformément bornés par $\theta_0 > 0$, quand $h \to 0$, alors :

$$\lim_{h \to 0} \| u_h - u \|_{H^1(\Omega)} = 0$$

où u_h et u sont des solutions de (11) et (10) respectivement .

Théorème 7 [16] Il existe une constante C, indépendante du pas h , de la solution u, de f , et de u_h la solution de (11) qui satisfait :

$$\| u_h - u \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$$

6. ALGORITHMES DE RESOLUTION ET EXPERIMENTATION NUMERIQUE

Les algorithmes de résolution étant les mêmes que ceux utilisés pour le problème de l'obstacle, on les adapte facilement au cas du problème de Signorini. Les résultats numériques sont donnés ci-dessous pour le problème suivant :

$$(IP_3) \begin{cases} Trouver\ u \in H^1([0,1]^2)\ tel\ que : \\ \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) d\Omega \geq \\ \quad \int_\Omega (1000 \sin(2\pi x))(v-u) d\Omega \end{cases}$$

Où $K = \left\{ v \in H^1(\Omega), u\big|_{\Gamma_0} = 0\, et\, u\big|_{\Gamma_1} \geq 0 \right\}$,

$\Gamma_0 = \left\{ (x,y) \in \partial\Omega : x = 0 \right\}$

et $\Gamma_1 = \partial\Omega \big| \Gamma_0$

6.1 Résultats numériques

Pour la méthode des approximations successives, pour le paramètre de relaxation $\omega = 1.8$, voir le tableau 7. Pour la méthode du Lagrangien, pour $\omega = 1.7$ et pour $\rho = 0.001$ voir le tableau 8.

Pour la méthode de pénalisation, pour le paramètre $\omega = 1.8, \varepsilon = 0.001$ voir le tableau 9. On observe que par rapport à la précision des résultats obtenus, les trois algorithmes sont sensiblement équivalents quant au nombre d'itérations pour les méthodes les approximations successives et de pénalisation . Il est supérieur à celui du Lagrangien car nécessitant seulement 570 itérations. Il convient aussi de signaler que la convergence est monotone pour les trois algorithmes.

©UBMA - 2012

Pour la détermination de la région de contact, la région en pointillés sur la figure 5, représente l'approximation de la région de contact. Elle est identique à celle obtenue par Blum et Suttmeier [17].

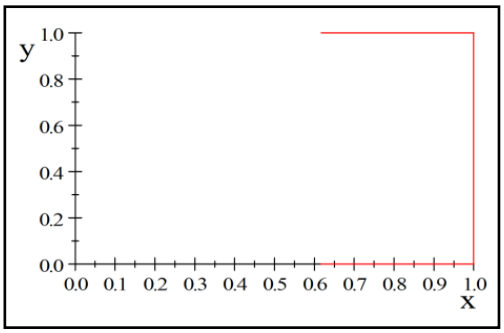

Figure 5. Région de contact pour le probléme IP_3.

Tableau 7. Résultats obtenus par les approximations successives pour le problème IP_3.

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point «1 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 5 »	Erreur absolue
1/8	43	20.12327	9.692×10^{-2}	6.301563	0.184945
1/16	52	20.05528	2.893×10^{-2}	6181117	0.6449842
1/32	120	20.03473	8.388×10^{-3}	6.135973	1.935×10^{-2}
1/64	570	20.02609	2.536×10^{-4}	6.117041	4.229×10^{-4}

Tableau 8. Résultats obtenus par le LAGRANGIEN pour le problème IP_3.

Pas	Nombres d'itérations	Solutions pour le point « 1 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 5 »	Erreur absolue
1/8	772	20.0049	0.1016731	-0.05444845	0.1774025
1/16	1963	20.07207	2.846×10^{-2}	6.214642	6.134×10^{-2}
1/32	1430	20.04070	8.081×10^{-3}	6.147403	1.796×10^{-2}
1/64	2237	20.02604	4.081×10^{-4}	6.116222	1.115×10^{-4}

Tableau 9. Résultats obtenus par la pénalisation pour le problème IP_3.

Pas	Nombres d'itérations	Solution pour le point « 1 »	Erreur absolue	Solutions pour le point « 5 »	Erreur absolue
1/8	46	20.12791	2.136×10^{-2}	6.293557	0.3951173
1/16	56	20.05470	4.580×10^{-2}	6.177499	9.83×10^{-2}
1/32	115	20.03432	1.443×10^{-2}	6.1314116	3.10×10^{-2}
1/64	569	20.02583	2.269×10^{-4}	6.11643	1.03×10^{-4}

©UBMA - 2012

7. CONCLUSION

Notre but n'est pas de donner de conclusions générales, mais des conclusions relatives aux problèmes traités dans ce travail. La méthode des approximations successives est globalement la plus satisfaisante en termes de précision et de volume de calcul. En outre, elle est conceptuellement simple et facile à programmer.

La méthode de pénalisation est simple conceptuellement mais son implémentation sur ordinateur est difficile à cause du choix optimal du paramètre de pénalisation qui n'est pas aisé. Scholtz [18], à titre d'exemple, suggère de prendre $\varepsilon = \frac{1}{h^2}$.
Cependant pour les pas fins avec ce paramètre la méthode diverge à cause de la propagation des erreurs d'arrondis. Il est donc difficile de proposer un paramètre optimal. Enfin la méthode du Lagrangien, bien qu'elle semble satisfaisante sur le plan de la précision des résultats, elle est la moins intéressante car elle introduit une inconnue supplémentaire augmentant dramatiquement la taille du problème quand le pas tend vers zéro. Cependant, d'un point de vue pratique, cette inconnue supplémentaire possède souvent une interprétation physique qui a son intérêt.

Nous envisageons d'étendre cette étude aux problèmes à contrainte structurelle différente de celle de type obstacle tel par exemple, le problème de torsion élastoplastique où l'inégalité est de type : $|\nabla u| \leq 1$ et les problèmes avec des contraintes du type divergence [11]. Nous comptons également poursuivre ce travail par l'étude de la problématique : quel type d'algorithme pour quel type de contrainte ?

REFERENCES

[1] Duvaut G., Lions. J.L., 1972. Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 387p.

[2] Freidman A., 1982. Variational principles and free boundary problems. John Wiley and Sons, New-York.710 p.

[3] Glowinski R., Lions J.L. and Tremolieres R., 1981. Numerical analysis of variational inequalities. North-Holland. Amsterdam.778p.

[4] Glowinski R., 1984. Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer-Verlag, NewYork. 493p.

[5] Glowinski R., Neittaanmaki P., 2008. PDE'S modelling and numerical simulation. Springer. 292 p.

[6] Imoro.B., 2000. Discretised obstacle problems with penalities on nested grids. *Appl. Num.Math*, Vol. 32, 21-34.

[7] Kikuchi N., Oden J.T., 1988. Contact problems in elasticity.A study of variationnal inequalities and finite element methods. Philadelphia, Siam. 509 p.

[8] Sissaoui H.,1983. Variational methods for inequality constraints problems. Ph. DThesis. Université de Sheffield, UK, 322p.

[9] Xue L. and Gheng X.L. 2004. An algorithm for solving the obstacle problems, *Comp. Math*,Vol. 48, 1651-1657.

[10] Ciarlet P., 1978. The finite element method for elliptic problems. North-Holland Amsterdam. 530p.

[11] Brezzis H.,Stampacchia G.,1968. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bull. Soc. Math. France*.Vol. 96, 153-180.

[12] Falk R., 1974. Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities. *Mathematics of computation*.Vol28, Number 128, p963-971.

[13] Arnautu V.,Neittaanmaki P., 2003. Optimal control from theory to computer programs. Kluwer Academic Publishers. London. 475p.

[14] Travainen P.,1999. Two-level Schwarz methods for unilateral variational inequalities, *Siam journal of numerical analysis* Vol.19, 273-290.

[15] Brezis H., 1972. Problémes unilatéraux, *J. de Math Pures et Appliquées*, Vol.51, p1-168.

[16] Atkinson K., Han W., 2001. Theorical numerical analysis Springer-Verlag, New York. 450p.

©UBMA - 2012

[17] Blum H., F.T. Suttmeier F.T., 2000. An adaptative finite element dicretisation for a simplified Signorini problem, *Calcolo*, Vol. 37(2), p 65-77.

[18] Scholtz R., 1984. Numerical solution of the obstacle problem by the penalty method. *Math Comp.* Vol. 32, 297-306 .

©UBMA - 2012