

الحلول المقترحة من طرف المنطقانية لحل نقائض نظرية المجموعات الكانتورية.

Solutions proposed by the logicalism party to solve the contradictions of cantorian set theory .

نضرة جعفري¹، سامية لونة²

¹ جامعة الجزائر 02.nadhra.djafri@univ-alger2.dz

مخبر مشكلات العلم والحضارة

² المدرسة العليا للأساتذة بوزريعة، louna.samia@ensb.dz

مخبر التربية والإبستمولوجيا

تاريخ الاستلام: 2025/07/20 تاريخ القبول: 2026/01/11 تاريخ النشر: 2026/01/23

ملخص:

تهدف هذه الدراسة إلى بيان الحلول المقترحة التي قدمتها نزعة من نزعات فلسفة الرياضيات المعاصرة وهي المنطقانية أو اللوجستيقا. ظهرت هذه النزعة من أجل حل مفارقات نظرية المجموعات الكانتورية، التي أتت في سياق توسيع فكرة العدد. هذه النظرية لم تكن مبدئية، أي أنها لم تبني بناء أكسيوماتيكيا، ولم تحقق الصورة، فلم تسلم من عيوب اللغة الطبيعية، التي أدت بدورها إلى ظهور نقائض في بنائها الداخلي. وقد حاولت المنطقانية إيجاد أساس متين تبني عليه الرياضيات المعاصرة، وهو المنطق، أي أنها قامت برد مفاهيم الرياضيات إلى مفاهيم ومبادئ منطقية. ليتجسد بذلك المشروع المنطقي في الإيديوغرافيا، التي وضعها مؤسس المنطقانية غوتلوب فريج، وفي نظرية الأنماط لبرتراند راسل، والعمل الضخم الذي قام به كل من راسل ووايتهد تحت عنوان "مبادئ الرياضيات"، وذلك بهدف صورة الرياضيات، وقد ساهمت كل هذه المحاولات في تأسيس المنطق الرمزي المعاصر. كلمات مفتاحية: المنطقانية، نظرية المجموعات، نظرية الأنماط، غوتلوب فريج، برتراند راسل.

Abstract:

This study aims to clarify the proposed solutions presented by one of the tendencies of contemporary mathematical philosophy which is logicalism or logistics. This tendency emerged in order to solve the paradoxes of cantorian set theory

Which came in the context of expanding the idea of number.

This theory was not principled, it was not built axiomatically, have not achieved the formalizing. It was not spared from the defects of natural language, which in turn led to the emergence of paradoxes in its internal structure. Logicalism has tried to find a solid foundation on which contemporary mathematics is built, which is logic. That is, it has returned the concepts of mathematics to logical concepts and principles. Thus, the logical

project was embodied in the ideography developed by the founder of logicalism Gottlob Frege, in the theory of patterns by Bertrand Russell, and the huge work carried out by Russell, and Whitehead under the title "Principles of Mathematics", with the aim of formalizing mathematics. All of these attempts contributed to the establishment of contemporary symbolic logic.

Keywords: Theory of sets, logicalism, Gottlob Frege, Bertrand Russell, Styling theory .

المؤلف المرسل: نضرة جعفري

1. مقدمة:

تسعى هذه الدراسة إلى توضيح الحلول المقترحة التي قدمها أحد اتجاهات الفلسفة الرياضية المعاصرة وهو المنطقانية (logicism)، ولقد ظهر هذا الاتجاه من أجل تحقيق هدف رئيسي هو حل المشكلات الرياضية التي برزت في نظرية المجموعات الكانتورية (Cantorian Set Theory).

جاءت نظرية المجموعات الكانتورية في سياق توسيع فكرة العدد، وقد عمل جورج كانتور

(1845-1918) George Cantor على تطوير هذه النظرية في الفترة ما بين 1883م و 1895م، إلا أنها لم تكن مبدئية، أي أنها لم تبنى بناء أكسيوماتيكي (Axiomatic)، ولم تحقق الصورة (Formalization)،

ونتيجة لذلك لم تسلم هذه النظرية من عيوب اللغة الطبيعية، مما أدى إلى ظهور تناقضات (Paradoxes) في بنائها الداخلي، هذا مادفع بالمنطقة والرياضيين المعاصرين إلى محاولة إيجاد أساس متين تبنى عليه الرياضيات المعاصرة، ومحاولة حل هذه النقصان، من بينهم أنصار النزعة المنطقانية الذين أكدوا أن هذا الأساس هو المنطق، وعلى رأسهم المنطقي والرياضي الألماني غوتلوب فريج Gottlob Frege

(1842-1925) الذي يعتبر المؤسس الفعلي للمنطقانية، وبهذا ارتكز المشروع المنطقي على فكرة إرجاع مفاهيم الرياضيات إلى المفاهيم والمبادئ المنطقية، وقد تجسد هذا المشروع في اللغة الرمزية المتمثلة في الإيديوغرافيا (Ideography) التي طورها غوتلوب فريج، ثم جاء المنطقي والرياضي الإنجليزي برتراند راسل (1872-1970) Bertrand Russell الذي قدم نظرية الأنماط (Theory of patterns)، وألف كتاب مشترك مع ألفرد نورث وايتهد Alfred North Whitehead (1861-1947)،

تحت عنوان: "مبادئ الرياضيات" (Principia Mathematica)، يمكن مقارنته بكتاب أرسطو

(Aristotle (384-322 BC) "التحليلات" (Les Analytics)، وهو يهدف إلى صورة الرياضيات

(Formalizing Mathematics)، وقد ساهمت هذه المحاولات في إرساء أسس المنطق الرمزي .

وبناء على ماسبق يمكن طرح الأسئلة التالية :

- فيما تتمثل أفكار النزعة المنطقانية ؟ وإلى أي مدى استطاعت هذه النزعة حل مشكلات نظرية المجموعات الكانتورية ؟ وما هو أثر المشروع المنطقي في تطوير المنطق والرياضيات من جهة ، وفي تطوير فلسفتي المنطق والرياضيات من جهة أخرى ؟

2- نظرية المجموعات :

تعد نظرية المجموعات الركيزة الأساسية التي يقوم عليها البناء الرياضي الحديث، إذ أصبحت كل فروع الرياضيات ترد إليها، لتوفر بذلك إطارا موحدًا تبنى عليه المفاهيم الرياضية والمنطقية المعاصرة، فأصبحت منطلقًا لتطور المنطق والرياضيات في العصر الحديث .

1-2 تعريفها :

نظرية المجموعات (Theory of sets) هي من أهم النظريات المعاصرة والأبحاث الرياضية، التي أصبحت أساس العلم الرياضي بجميع فروعها ، فجميع المفاهيم الرياضية تبنى على أساس نظرية المجموعات . (الأحمد، 1979، صفحة 6) فلقد دخلت فكرة المجموعات (the set) ميدان التحليل، وأصبح ينظر إلى قيم الدالة كمجموعة ، و ترجع هذه النظرية في نشأتها إلى الرياضي الألماني من أصل روسي جورج كانتور (1845-1918) George Cantor ، الذي أنشأ نظرية واسعة للمجموعات نشرها من 1883 إلى 1895 م ، فهي تشمل مختلف أنواع الأعداد والمجموعات ، لتتسع لدراسة المجموعات اللامتناهية ، فقد أدخل كانتور إلى مجال الدراسات الرياضية دراسة جديدة لفكرة اللامتناهي . وقد أكد برتراند راسل على أهميتها، بإعتبارها الأساس الذي تقوم عليه الرياضيات الحديثة ، إذ أكد أن جميع المفاهيم الرياضية يمكن ردها إلى مبادئ منطقية يعبر عنها بلغة المجموعات . (الصادقي، 1999، صفحة 25)

وقبل التطرق إلى البعد التاريخي لفكرة اللامتناهي تجدر الإشارة هنا إلى أن نظرية المجموعات الكانتورية لم تنشأ عند كانتور كاملة مكتملة بل كان لاطلاع هذا الأخير على أبحاث رياضيين سابقة عليه الدور الفعال في تشييد نظريته ، فقد اتجه كانتور إلى قراءة كل ما تعلق بالمتسلسلات المثلثية (متسلسلات فورييه)، للرياضي الفرنسي جوزيف فورييه (1768-1830) Josef Fourier الذي برهن عام 1822م أنه يمكن باستخدام مجموع متوالية مثلثية لانهائية ، تمثيل رسم بياني وهو عبارة عن منحى دقيق جدا يوضح أعدادا من النقط المتناهية غير المتصلة (الصادقي، 1999، صفحة 25) . هذا من جهة ، ومن جهة أخرى ، وبعد انهيار فكرة الاتصال الهندسي ، وتقدم التحليل باكتشاف ديكارت للهندسة التحليلية و بعد ظهور حساب التكامل (Integral Calculus) و حساب التفاضل (Differential Calculus)، وتطور نظرية الدوال (Theory of Functions) باكتشاف الفرنسي كوشي (1789-1857) Cauchy للدالة المنفصلة

(Fonction discontinue) والدالة التحليلية (أحد إحداثيها عدد تخيلي)، وبالتالي إدخال الأعداد التخيلية في ميدان التحليل، فقد أصبح القرن التاسع عشر قرن الأعداد التخيلية. (الجابري، 1976، صفحة 94).

فالرياضيات الحديثة و المعاصرة شهدت تغيرا جذريا في المفاهيم و الكائنات الرياضية، فبالإضافة إلى الأعداد الطبيعية والأعداد الصماء، ظهرت الأعداد التخيلية والمركبة، وأصبح التحليل كله مبنيا على فكرة العدد، وبالتحديد على الأعداد الصحيحة. وفي هذا الإطار ظهرت نظرية المجموعات لكانتور، والتي قامت بتدقيق فكرة اللانهائي، وإدخال المجموعات اللانهائية إلى نظرية الأعداد، وقد تزامن الاهتمام بهذه النظرية من طرف كانتور مع أبحاث التشيكي الإيطالي الأصل بولزانو برنهارد (1781-1848) Boulzano Bernhard حول نظرية المجموعات، ونظرية الرياضي الألماني ريتشارد ديدكند (1831-1916) Richard Dedekind في العدد التي ساهمت في تطور النظرية.

و تجدر الإشارة إلى أننا لو أردنا تحديد السياق التاريخي لفكرة اللانهائي سنجد بأنها تعود إلى زينون الإيلي (490-430) Zeno of Elea، الذي طرح فكرة اللامتناهي كدليل على عدم وجود الحركة والكثرة، فالتقسيم يكون إلى ما لا نهاية، أثناء حركة السهم، كما أثار أرسطو هذه الفكرة وانتقد زينون الإيلي، وأثبت وجود لا نهاية بالقوة ولا نهاية بالفعل (الفندي، 1969، صفحة 112).

و طرحت هذه الفكرة كذلك في العصر الحديث، فقد أكد الفيلسوف الفرنسي الحديث رينيه ديكارت René Descartes (1596-1650)، وجود الله الذي لا ينتهي، وأكد إسحاق نيوتن Isaac Newton

(1643-1727) بأن المكان والزمان غير منتهيين، وقد تناول برنارد بولزانو Bernard Bolzano

(1781-1848) فكرة اللامتناهي رياضيا، فقد قابل بين سلسلة الأعداد الصحيحة (1، 2، 3، 4، ...) و سلسلة الأعداد الزوجية المتضمنة في السلسلة الأولى (2، 4، 6، 8، ...) وهما سلسلتان لا منتهيتان، فاستنتج بأن العدد اللامتناهي الكبر خاصيته هي أن الكل يساوي جزءه، إلى أن جاءت محاولات كانتور في الربع الأخير من القرن التاسع عشر، والتي كانت لها قيمة عظيمة في مجال الرياضيات. وهذا ما أكدته دافيد هيلبرت (David Hilbert 1862-1943) في مقال له معنون بـ: "حول اللانهاية" (On the infinite) بقوله: "هي أشبه مما تكون بجنة أنشأها كانتور للرياضيات وللرياضيين" (Hilbert, 2012)، هذه المقولة دافع بها هيلبرت عن عمل جورج كانتور ضد الإنتقادات التي وجهت له حول نظرية المجموعات ومفهوم اللانهاية الذي ابتكره، وقد أكد راسل على أهمية نظرية المجموعات بإعتبارها الأساس الذي تقوم عليه الرياضيات الحديثة، إذ رأى أن جميع المفاهيم الرياضية يمكن ردها إلى مبادئ منطقية يعبر عنها بلغة المجموعات، فقد أرجع فكرة العدد إلى فكرة المجموعة. (الصدقي، 1999، صفحة 25).

و يعرف كانتور المجموعة في كتابه " حول أسس نظرية المجموعات اللامتناهي " بقوله :

>> نسمي مجموعة كل اجتماع من المواضيع التي تخص تصوراتنا المحددة والتمايزة فيما بينها،

وقد قسم كانتور المجموعات إلى: مجموعات متناهية ، وهي المجموعات التي لها عدد متناهي من العناصر، و مثال ذلك: لدينا المجموعة م={كراس،سبورة،طاولة، باب}، ولدينا المجموعة س={0، 2، 4، 6}، كلاهما مجموعة متناهية مكونة من 4 عناصر، يطلق على عناصرها اسم العدد الأصلي (العدد العاد أو قوة المجموعة)، ومجموعات لا متناهية، وهي مجموعات عدد أعضائها أو عناصرها لا نهاية له، ومثال ذلك مجموعة الأعداد الطبيعية م = {1، 2، 3، 4، 5.....} (الجابري، 1976، صفحة 97) . وهناك مجموعات متجاوزة للانهاية (Transfinite sets) ، فعندما حاول كانتور دراسة فكرة المجموعة توصل إلى إكتشاف الأعداد الموعلة أو المتجاوزة للانهاية ، فإذا قابلنا بين مجموعة الأعداد المتجاوزة للانهاية ومجموعة الأعداد الطبيعية ، فهذه الأخيرة تعتبر لانهاية صغيرة بالنسبة إلى الأعداد المتجاوزة للانهاية (الأعداد الحقيقية) (الصادقي، مسألة اللانهاية في الرياضيات، 1999، صفحة 75) .

و يمكننا الإشارة إلى أن هناك طريقتين لتحديد مجموعة منتهية أو غير منتهية، فبالنسبة إلى الطريقة الأولى، وهي التعريف بالمصادق، و معناه ذكر أعضاء أو موضوعات المجموعة عضوا عضوا ، ومثال ذلك م={ قلم ،سبورة ،كرسي ، طاولة}، فالمجموعة م تتكون من 4 عناصر ، أما الطريقة الثانية، وهي التعريف بالمفهوم ،وهو إيجاد خاصية أو مجموعة خصائص لعناصر المجموعة، تميزها عن باقي المجموعات، ومثال ذلك المجموعة التالية : م={أصفر، أحمر، أخضر، أبيض}، فهذه الموضوعات عبارة عن ألوان، وهي تشترك في خاصية جامعة مانعة (موساوي أ.، 2018، صفحة 103)

2-2 نقائص نظرية المجموعات :

رغم الدور الأساسي الذي لعبته نظرية المجموعات الكانتورية في تأسيس الرياضيات الحديثة ، إلا أنها لم تخلو من نقائص ومفارقات كشفت عن نقائصها ، مما استدعى تطوير صيغ أكسيوماتية أكثر صرامة.

2-2-1- مفارقة بورالي فورتى :

أول من اكتشف وجود تناقض في نظرية كانتور هو بورالي فورتى (Cezare Burali Forti)

(1861-1931)، وهذا ما صرح به راسل بقوله : "لقد اكتشف بورالي التناقض المتصل بأكبر عدد ترتيبي قبل أن اكتشف تناقضى" (راسل، 1960، صفحة 92)، فقد اكتشف بورالي مفارقتة عام 1897 م قبل اكتشاف راسل لنقيضته بست سنوات ، وتنص هذه المفارقة على أن مجموعة الأعداد الترتيبية تؤدي إلى مفارقة في السياق الذي وضعت فيه ، فهناك قاعدة من القواعد التي وضعها كانتور تنص على أنه يمكن ترتيب الأعداد اللامتناهية ترتيبا تصاعديا (الأول، الثاني، الثالث) بين كل عددين يوجد دائما عدد أقل من الآخر ، وأكبر الأعداد اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد ، فمثلا إذا أخذنا مجموعة أكياس من الحلوى ، كيس فارغ ، كيس فيه حبة واحدة ، كيس فيه حبتان ، كيس فيه ثلاث حبات ،..... وهكذا إلا مالا نهاية من حبات الحلوى . فإذا أخذنا الكيس الذي فيه عشر حبات هو الكيس المرتب رقم 11 ، فهو أكبر الأعداد الترتيبية في هذه السلسلة ، لكنه ليس أكبر الأعداد الترتيبية

ككل، فأكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس هو أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ، وهذا تناقض ، فلا وجود لأكبر عدد ترتيبي لجميع الأعداد (الفندي، فلسفة الرياضة، 1969، صفحة 112) .

2-2-2 مفارقة كانتور : سميت هذه المفارقة باسم مكتشفها كانتور، حيث اكتشفها عام 1899م ، و صرح بها عام 1932م ، ومعناها أنه إذا تم توزيع عناصر مجموعة ما إلى مجموعات جزئية ، فإن هذه المجموعات تكون أكبر عددا من عناصر تلك المجموعة (الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، 1976، صفحة 100) . ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي: المجموعة م = {1,2,3} فالمجموعات الجزئية هي

م={ $\emptyset$ ، {1}، {2}، {3}، {1,2}، {1,3}، {2,3}، {1,2,3}} . فالعدد الأصلي لعناصر المجموعة م هو 3 بينما العدد الأصلي للمجموعات الجزئية هو 8 ، و بالتالي فالمجموعات الجزئية أكبر عددا من عناصر المجموعة م ، فحسب كانتور لا وجود لأكبر عدد أصلي ، لأن العدد الأصلي للمجموعات الجزئية أكبر من العدد الأصلي للمجموعة م (مجموعة كل المجموعات) التي يفترض أن يكون عددها الأصلي أكبر، وهذا التناقض أكده برتراند راسل في كتابه " فلسفتي كيف تطورت " من خلال مثال لتوضيح المفارقة حيث يقول: >> عند ذهابك مثلا إلى المطعم ، و تكون أمامك اختيارات لتناول الطعام (ثلاثة أنواع من الحلوى) فتنتج لديك ثمان طرق للتصرف، فقد لا تتناول شيئا، و قد تتناول النوع الأول أو الثاني أو الثالث ، أو قد تختار نوعين معا ، إما الأول والثاني ، أو الأول والثالث، أو قد تختار الثاني والثالث ، أو تختار تناول الأنواع جميعها ، وبهذا فقد أكد راسل أن الجزء أكبر من الكل وهذا تناقض << . (راسل، 1960، صفحة 96)

2-2-3- نقيضة راسل : تحدث راسل عن هذه النقيضة في كتبه الثلاث : "مبادئ الرياضيات"، و" مقدمة للفلسفة الرياضية "، و"أصول الرياضيات"، حيث اكتشف هذه النقيضة عام 1901م ، ونشرها عام 1903م ، وهي عبارة عن تناقض داخلي لنظرية فريج ، وهي التي دفعته إلى وضع نظرية الأنماط المنطقية لحل المتناقضات المنطقية ، ويشرح راسل هذه النقيضة في كتابه " فلسفتي كيف تطورت " من خلال مثال توضيحي حيث يقول : " إذا أخذنا فئة كل ملاعق الشاي لما وجدنا هذه الفئة ملعقة شاي ، أي في هذه الحالة لا تكون عضوا لذاتها، ولكن فئة كل الأشياء التي ليست ملاعق شاي هي أيضا ليست ملعقة شاي . و معنى هذا أنها عضو في ذاتها ، و في هذا تناقض " (راسل، 2014، صفحة 45)

3-الحلول المنطقانية لنقائض نظرية المجموعات :

تهتم المنطقانية بمحاولة تأسيس الرياضيات بجميع فروعها على قواعد منطقية صارمة، وقدمت حلولاً لمفارقات نظرية المجموعات من خلال صياغة مبادئ دقيقة تمنع التناقضات، وبذلك أصبحت أساساً متيناً تقوم عليه الرياضيات.

3-1- تعريف المنطقانية (Logicalism):

هي أحد الاتجاهات المعاصرة في فلسفة الرياضيات، نشأت بهدف حل النقائض التي ظهرت في نظرية المجموعات الكانتورية، ويعود الفضل في ظهور هذا الاتجاه إلى غوتلوب فريج، ليحاول فيما بعد إكمال المشروع المنطقي كل من برتراند راسل ووايتهد من خلال عملهما المشترك "مبادئ الرياضيات"، (موساوي، 2018، صفحة 140)، فهدف هذا الكتاب هو صوغ المنطق و الرياضيات معا، وقد أكد المنطقيون ضرورة إرجاع المفاهيم الرياضية إلى المفاهيم و المبادئ المنطقية، هذه الأخيرة التي تشكل أساسا متينا للصرح الرياضي، وتساهم بشكل أساسي في تجاوز التناقضات الرياضية (موساوي أ.، 2015)، و بالتالي يمكن استنتاج قوانين علم الحساب باستخدام تعريفات و ثوابت منطقية، وقواعد للقيام بعملية الاستنباط نستمد منها المنطق، فالرياضيات تعرض بواسطة مفاهيم وتعريف المنطق في صورة نسق منطقي دقيق (موساوي، 2015، صفحة 197)

2-3 المشروع المنطقي عند غوتلوب فريج:

يعود الفضل في تأسيس الاتجاه اللوجستيقي إلى فريج، الذي حاول إيجاد أساس متين للعلم الرياضي، فقام بصوغ المنطق و الرياضيات معا، مما دفعه إلى تجديد المنطق، الذي كان وسيلة لتحديد سبل و مفاهيم وحقائق العلم الرياضي، وقد قام باختراع لغة رمزية سماها الإيدوغرافيا (l'idéographie)، و مصطلح الإيدوغرافيا يتكون من شقين (Idéo) أي الفكرة، (Graphie) أي الكتابة، و هي عبارة تعني الكتابة بواسطة الرموز الخطية (موساوي، 2015، صفحة 196)، و تجدر الإشارة إلى أن هذه الرمزية لم تعد مستعملة اليوم بسبب تعقيداتها، ويعتبر فريج أول من بنى نظريات المنطق الرياضي في شكل نسق إستنباطي، حيث وضع قواعد نظرية الحساب المنطقي للقضايا الأولية، و أسس عليها بقية النظريات المنطقية: "نظرية العلاقات"، "نظرية الأصناف"، "نظرية دالات القضايا"، كما بين الأساس المنطقي الذي تبنى عليه نظرية الأعداد الطبيعية، و يقوم النسق المنطقي الذي شيده فريج على أساس فكرتين أوليتين هما: الإستلزام (c) و السلب (~)، و ثلاث تعريفات هي: الفصل (لا)، الوصل (و)، المساواة (=)، كما أنه قام بوضع رموز للثوابت المنطقية (زيدان م.، 1979، صفحة 153)، وقد أكد فريج في مقاله "الدالة و الفكرة" "Function and begriff" العلاقة بين المنطق و الرياضيات من خلال تبيانته التشابه بين مفهوم الدالة في الرياضيات، ومفهوم الفكرة

(التصور) في المنطق، فقد طبق فكرة الدالة الرياضية في المنطق من خلال دالة القضية، وهي صيغة تتكون من دالة (تصور)، غير مشبعة، و مكان خالي: مثلا (.....عالم)، و إذا وضعنا الحجة (عدد أو شخص، أو شيء) مكان النقاط تصبح قضية يمكن الحكم عليها بالصدق أو الكذب (فرنان، 2006، الصفحات 27-28).

وبالإضافة إلى توظيف فريج للمفاهيم الرياضية في ميدان المنطق، فقد أقام نظرية المعنى والإشارة (الدلالة)، وهي أساس موقفه اللوجستيقي، حيث بين فيها التمايز بين معنى الرمز أو اللفظ و دلالاته فمثلا الصيغتان: $3 + 3$ و 3^2 تشيران إلى عدد واحد، وهو الرقم 6، لكن معناهما يختلف، فالأولى تدل على فكرة الإضافة، والثانية تدل على فكرة التربيع (زيدان م.، 1979، صفحة 159).

وقد أكد فريج على ضرورة استبعاد كل ما هو نفسي ، مرتبط بالأحكام النسبية و التمسك بالقوانين المنطقية، لأنها أساس الحساب المنطقي (قاسم، 1991، الصفحات 109-110) ، فالحقائق المتحصل عليها في الرياضيات ، باستخدام مبادئ وقوانين المنطق هي حقائق موضوعية موحدة وواحدة ، بعيدة كل البعد عن الأحكام الذاتية ، كما أن الأعداد باعتبارها موضوعا للرياضيات، لا يمكن أن تكون من اختصاص علم النفس، بل هي موضوعات منطقية محضة، فعلم الحساب وجميع استدلالاته يجب أن تقوم على قوانين وقواعد المنطق، وهذا تحقيقا لهدف فريج من خلال منطقيته، وهو وضع القوانين المنطقية ثم إخضاعها إلى مجموعة قليلة من القضايا، ثم يشتق منها الرياضي القوانين عن طريق الاستدلال مع وجود شروط منطقية، مستبعدا كل معرفة مستوحاة من الخبرة الحسية ، فقد قام أولا باستخراج العيوب المنطقية الموجودة في المنطق التقليدي بعد تحليل بنية عبارات اللغة الطبيعية ، ثم قام بتحليل قضايا الحساب المبنية على شكل استدلالات متضمنة للروابط المنطقية مستخدما اللغة الرمزية، ومميزا بين اللامعرفات والمعرفات و الثوابت المنطقية والمتغيرات، (زيدان، المنطق الرمزي، نشأته وتطوره، صفحة 156).

وقد حاول فريج جعل علم الحساب دون الهندسة عبارة عن استنتاجات و ذلك من خلال الاعتماد على مقدمات منطقية باستخدام لغة الرموز، فكانت رمزيته بذلك وسيلة لوضع نظرية لحساب القضايا، وكذلك لوضع باقي نظريات المنطق الرمزي في شكل نسق استنباطي غير متناقض يتم فيه اشتقاق القضايا انطلاقا من أفكار ومبادئ أولية ، فأسس بذلك المنطق الرمزي .

ويمكننا القول بأن فريج يطمح من خلال مشروعه المنطقي إلى تجسيد أفكار جوتفريد فيلهلم لايبنتز (Gottfried Wilhelm Leibniz) "الحساب المنطقي" (Logical Calculus) ، فلايبنتز هو أول من أبرز التشابه الموجود بين المنطق والرياضيات من خلال الحساب المنطقي ، وأشار إلى أن الرياضيات كلها عمليات استنتاج تتم انطلاقا من مقدمات منطقية باستخدام لغة مثالية سماها "اللغة المتميزة الكلية"

(Language outstanding total)، تكون أبجدية الفكر الإنساني، فتصبح لغة عالمية ، ومن ثمة فلن يكون أي اختلاف بين الفلاسفة، ويكون بإمكانهم الوصول إلى نتائج موحدة. (Sulvian, 1970, p. 40)

وبعد أن تمكن فريج من وضع قواعد الاستنباط ، اكتشف راسل وجود تناقض في نظريته، قام بعرضه في كتابه " أصول الرياضيات " وعرف بنقيضة راسل (paradox du Russell)، حيث قام راسل بإرسال رسالة إلى فريج سنة 1902 م ، يخبره فيها بأن قاعدة من بين القواعد التي إستعملها في كتابه " القوانين الأساسية لعلم الحساب " هي سبب تناقض نظريته . (موساوي، 2018، صفحة 82)، فنقيضة راسل تتمثل في وجود تناقض داخلي في نظرية فريج ، بسبب البديهية الخامسة في نسقه، سبب هذه النقيضة هو استعمال مبدأ أن كل خاصية هي التي تحدد مجموعة الموضوعات التي لها تلك الخاصية المشتركة مثل خاصية إنسان تطابقها مجموعة البشر، في حين أنه يجب إثبات وجود المجموعة ثم نجمع العناصر المشتركة في خاصية ما (موساوي، 2018، صفحة 81)، وقد رد فريج على راسل قائلا :

>> إن اكتشافك للمتناقضة قد أحدث لدي ذعرا شديدا ، إن اكتشافك قد هز الأساس الذي أقيمت عليه علم الحساب <<(frege, 1967, p. 125) .

وفي هذه الفترة كان فريج قد كتب الجزء الثاني من مؤلفه " أسس علم الحساب " ، وكان اكتشاف راسل للمتناقضة سببا في إعادة نظره في أسس علم الحساب ، حيث أصبح يرى بأنه يجب أن يقوم هذا الأخير على أساس هندسي لا منطقي وبهذا تخلى عن مشروعه المنطقي . (فرحات، 2012، صفحة 10).

3-3 منطقانية راسل و وايتهيد :

يتمثل المشروع اللوجيستيقي لبرتراند راسل و ألفرد نورث وايتهيد في كتاب مشترك بينهما وهو "مبادئ الرياضيات" ، حاول من خلاله مؤلفاه إيجاد أساس متين يقوم عليه علم الحساب ، وإعادة بناء منطقانية فريج ، بحيث تكون خالية من التناقضات فتكون بذلك أساسا متينا للعلم الرياضي المعاصر (موساوي، 2018، صفحة 140) ، وقد تأثر راسل بمواقف جوزيبه بيانو (Giuseppe Peano)

(1858-1932) في فلسفة الرياضيات و نظرياته و رموزه ، كما إستفاد أيضا من أعمال فريج ، حيث سمع به لأول مرة عام 1901 م ، و قرأ أعماله من شدة إعجابه بنظرياته ، وكتب ملحقا في كتابه للإشادة بأعماله (زيدان م.، 1979، صفحة 174).

و يعرف راسل الرياضيات البحتة بقوله : >> الرياضيات البحتة هي فئة جميع القضايا التي صورها ق يلزم عنها ل ، حيث ق.ل قضيتان تشملان على متغير واحد ، أو جملة متغيرات هي بذاتها في القضيتين ، علما بأن كل من ق.ل لا يشتملان على ثوابت غير الثوابت المنطقية ، والثوابت المنطقية هي كل المعاني التي يمكن تعريفها بدلالة اللزوم ، فضلا عن هذا فإن الرياضيات تستخدم معنى هو في حد ذاته ليس جزءا من القضايا التي تنظر فيها ، ذلك هو الصدق (راسل، 1964، صفحة 31) ، فراسل يريد أن يوضح بأن قضايا الرياضيات كلها يعبر عنها بالصيغة التالية : ق تستلزم ل ، أو ق < ل ، تتكون من ثوابت منطقية (Constants)، و متغيرات (Variables)، ويمكن التعبير عنها بما يلي : إذا أخذت بالمقدم فيلزم عنه التالي ، فهي شبيهة بالقضايا الشرطية ، كما أن قضايا الرياضيات ، و باعتبار أنها تشتمل على ثوابت و متغيرات منطقية ، فهي تعبر عن التعميم (إسلام، 1977، صفحة 247) .

وقد قدم راسل تعريفا للأعداد الطبيعية و ذلك باستخدام مفاهيم منطقية بحتة ، فأكد بذلك على إمكانية رد الرياضيات إلى المنطق ، وذلك برد فكرة العدد إلى مفهوم الفئة ، (راسل، 1980، صفحة 277)، و تجدر الإشارة إلى أن المشروع المنطقي الذي جسده راسل و وايتهيد في كتابهما "مبادئ الرياضيات" قام على مفاهيم جديدة ، وهي القضايا الذرية ، والقضايا الجزئية ، فالحقضية الذرية هي التي لا تحتوي على أجزاء تكون قضايا ، ولا تحتوي على مفاهيم مثل كل أو بعض أولا (حمود، 2011، الصفحات 265-256) ، فهي تعبر عن وقائع ، والواقعة هي حمل المحمول على شيء معين، تحمل خواص إما في المحمول ، أو بين الموضوع و المحمول ، و مثال ذلك : "أ أحمر"، ولا تكون على صورة "أظن أنه سينجح" أو تحتوي على النفي مثال : "هذا ليس جيدا" ، كما أنها تحتوي على كلمة علاقية ، وعلى أقل عدد ممكن من الكلمات الأخرى مثال : "أ بجانب ب" (حمود، 2011، صفحة 266) ، و القضية

الجزئية لا علاقة لها مع الواقع، هي قضية مركبة من قضيتين ذريتين أو أكثر، حيث يقول راسل : >>جملتان يمكن أن تتركبا بواسطة "أو"، "و"، "إذا"، "إذا ... ليس".

وبالإضافة إلى المشروع المنطقي المجسد في "مبادئ الرياضيات" اقترح راسل نظرية الأنماط

(Theory of Type) كحل لنقائص نظرية المجموعات، هذه النظرية لها جانبان : جانب منطقي، وآخر رياضي، يرتبط الأول بتعريف العدد الطبيعي بواسطة مفاهيم منطقية وهي : الفئة والعلاقة والمثابرة، ويرتبط أيضا بتعريف الأعداد اللامتناهية والصنف الذي هو عضو في ذاته، ويرتبط الجانب الثاني بمحاولة حل نقائص نظرية المجموعات بواسطة حساب الأصناف (زيدان، 1979، صفحة 279)، وإذا جئنا إلى تحديد مفهوم نظرية الأنماط، فنحدد أولا مفهوم النمط (type)، فالنمط عند راسل مرتبط بمجال قيم الدوال، وهي التي تكون الدالة بالنسبة إليها ذات دلالة، حيث يعرف النمط بقوله :

" النمط هو مجال انطباق دالة قضية أي مجموعة الأشياء التي تصلح أن تكون قيما للدالة، وحين يكون المتغير ظاهريا في قضية ما، فمجموع قيم المتغير الظاهري تكون نمطا يتحدد بالدالة التي تتعلق بها كل القيم " (Russell, 1956, p. 75).

وتنص نظرية الأنماط على وجوب التفريق بين الفئة (classe)، والشئ الذي هو عبارة عن واقعة تجريبية، فكل الأفكار والمفاهيم علاقات أو صفات يمكن تصنيفها في أنماط مختلفة (زكريا، 1968، صفحة 287)، فقد حاول راسل تجاوز الأخطاء التي أدت إلى وجود المتناقضات، فهذه الأخيرة حسب راسل ناتجة عن وجود خطأ في النظم، فقام بوضع تدرج هرمي للقضايا والمستويات (موساوي، 2018، صفحة 84)

4- انتقادات النزعة المنطقانية:

لم تسلم هذه النزعة من الانتقادات، فقد وجه الرياضي والمنطقي الألماني كورت غودل

(1906-1978) Kurt Godel لرمزية كتاب " **principia Mathematica** " نقدا، وقد توصل إلى مبرهنة عدم الإكمال (Incompleteness Theorem) عام 1939م، والتي أثرت على المشروع المنطقي، أوضح غودل من خلالها أنه إذا أخذنا أي نسق صوري للحساب خال من التناقض فإننا نجد بأن هناك قضايا صادقة يمكن التعبير عنها بألفاظ رياضية بحتة، ولكن لا يمكن اشتقاقها من ذلك النسق للبديهيات.

وعليه من المستحيل وضع نسق للبديهيات خال من التناقض ويحتوي في الوقت نفسه على القضايا الرياضية الصادقة باعتبارها مبرهنة فيه. (موساوي أ.، 2007، صفحة 138).

وقد قدم لودفيغ فيتجنشتاين (1889-1951) (Ludwig Wittgenstein) نقدا لراسل باعتبار أنه وحد الرمزيات والميادين عن طريق تبني لغة واحدة، وتجاهل الصفة الأساسية للرياضيات وهي التنوع، ففيتجنشتاين لا يعترض على إغراق كل الفروع الرياضية في المنطق، ولكن إذا كان من يمتلك نسقا مثل النسق الراسلي، وينتج انطلاقا منه بواسطة أنساق مناسبة من التعريفات أنساقا أخرى مثل : حساب التفاضل والتكامل، فعملية توحيد

صور الرياضيات الناتجة عن المنطقانية، تحجب عنصرا أساسيا في الرياضيات ألا وهو تنوعها، ويرى فيتجنشتين بأن المشروع المنطقي جيد ولكنه لم يتحقق لأن المنطق الذي اقترح كأساس للرياضيات ليس قويا بالقدر الكافي، لأن المنطق قد اضطر إلى إدخال اعتبارات خارجة عن مجال المنطق، مثل استعمال مفهوم القضايا الذرية (Atomic Propositions)، والقضايا الجزيئية (Molecular propositions). (موساوي، 2018، صفحة 153)

وقد أكد هنري بوانكاري (1854-1912) Henri Poincaré في كتابه " العلم و الفرض "

"La science et méthode" على الطابع الحدسي لعلم الحساب، وبين بأن المنطقيين يبالغون في الاعتماد الصارم على المنطق، بينما يهملون دور الحدس الذي يعتبر أساس الإبداع الرياضي، وقد اقترح بوانكاري البرهان الرياضي أو البرهان بالتراجع (Proof to retreat) كأساس للرياضيات المعاصرة، فهو يفرض علينا بصورة ضرورية لأنه مظهر من مظاهر خاصية عقلنا، وهو تكامل بين المنطق والحدس، حيث ينتج الحدس الإبداع الأولي، بينما يقدم المنطق الصياغة النهائية، فالمنطق مجرد أداة للتحقق. (poincaré, 1902, p. 62)

أما فيما يخص نظرية الأنماط، فهي لا تميز بين مفهوم النمط، و مفهوم الرتبة اللغوية، أي بين نظرية الأنماط ونظرية رتب اللغة، فنظرية رتب اللغة تقوم على أساس تصنيف حدود اللغة، بناء على ميادين استعمالها، و ليس بناء على درجة تجريدها كما هو الحال بالنسبة إلى نظرية الأنماط، ورغم هذه الانتقادات الموجهة للمنطقانية، نجد بأن لها مدافعين عنها، من بينهم رودولف كارناب (1891-1970) Rodolf Carnap و لويس كوتير (1894-1966) Louis Cottier، كما ظهرت منطقانية جديدة مع الفيلسوف البريطاني Crispin Wright (1942-.....)، والفيلسوف البريطاني Bob Hle (1945 -)

5- خاتمة: بناء على ماسبق نستنتج مايلي:

1- ظهرت أزمة الأسس نتيجة الفصل بين المنطق و الرياضيات، والمنطقانية أتت لإعادة مكانة المنطق بالنسبة إلى الرياضيات، كما أن الرياضيات المعاصرة تطورت بفعل اللغة المنطقية، التي فرضتها الأعمال التي قام بها المناطق الرياضيون المعاصرون ، و كان لاكتشاف المفارقة في المنطق الدور الفعال و الأثر الواضح في تطوير المنطق والرياضيات معا ، فقد أدى إلى ظهور منجزات عديدة نذكر منها : نظرية الأنماط ، نظرية بدهنة الرياضيات، ظهور الحدسية عند بروير ، نظرية مستويات اللغة عند ألفريد تارسكي،بالإضافة إلى ظهور النظرية الأكسيوماتيكية للمجموعات (Axiomatic Set Theory) التي جعلت نظرية المجموعات صالحة كأساس للرياضيات، وذلك بعد محاولات الرياضيين المعاصرين أمثال راسل و إرنست زرمelo(1871-1953)، وأبراهام فرانكل (1891-1965) Abraham Fraenkel لإصلاح النظرية الكانتورية .

2- استطاعت المنطقانية (المنطق الرياضي) حل مشاكل اللانهائي، أي أنها توصلت إلى حل لفلسفة علم الحساب وهي أولى الفلسفات الرياضية، الشيء الذي عجزت عنه الرياضيات ذاتها.

3- على الرغم من النقد الذي تعرضت له المنطقانية فقد استطاعت حل بعض النقائص الرياضية الناتجة عن عدم التمييز بين أنماط الأشياء ،مثل نقيضة العدد الأصلي الأكبر للأشياء في العالم ،كما تمكن راسل من خلال مشروعه المنطقي أن يبين بأن الرياضيات نوعان :النوع الأول هو مايسمى بالرياضيات التطبيقية ،والنوع الثاني هو مايسمى بالرياضيات البحتة، وهذه الأخيرة هي المنطق وهي أساس الرياضيات ككل ،كما تمكنت نظرية الأنماط من تصنيف الدوال إلى دوال ماصدية ودوال مفهومية، فالأولى مجالها الرياضيات الخالصة ،والثانية مجالها الرياضيات التطبيقية.

قائمة المراجع:

بالعربية:

- 1- إسلام عزمي. (1977). مقدمة لفلسفة العلوم: الفيزيائية والرياضية. القاهرة: مكتبة سعيد رأفت.
- 2- الجابري محمد عابد . (1976). مدخل إلى فلسفة العلوم. العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، بيروت: مركز دراسات الوحدة العربي.
- 3- الصديقي عبد الطيف يوسف . (1999). مسألة اللانهاية في الرياضيات. دار الشروق
- 4- الفندي محمد ثابت . (1969). فلسفة الرياضة. القاهرة: دار النهضة العربية.
- 5- إيه سي جرايلنج، ترجمة إيمان جمال الدين الفرماوي (1980)، برتراند راسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، القاهرة: مؤسسة سجل العرب.
- 6- حمود جمال، (2011). المنعطف اللغوي في الفلسفة المعاصرة، برتراند راسل نموذجاً، الجزائر، منشورات الإختلاف.
- 7- خضر حامد أحمد. (1979). التحليل الرياضي. السعودية: عمادة شؤون المكتبات.
- 8- راسل برتراند، (1960). فلسفتي كيف تطورت. مكتبة الأنجلو مصرية: القاهرة.
- 9- راسل برتراند، (1964). أصول الرياضيات. مصر: دار المعارف.
- 10- زكريا إبراهيم، (1968). دراسات في الفلسفة المعاصرة. مصر: مكتبة مصر.
- 11- زيدان محمد فهمي . (1979). المنطق الرمزي، نشأته وتطوره. بيروت: دار النهضة.
- 12- فرنان دوني. (2006). مدخل إلى فلسفة المنطق. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- 13- محمد محمد قاسم. (1999). مدخل إلى مناهج البحث العلمي. بيروت: دار النهضة العربية
- 14- لودفيج فيتجنشتين. (1968). رسالة منطقية فلسفية. القاهرة: مكتبة الأنجلو مصرية.
- 15- محمد محمد قاسم. (1991). جوتلوب فريج: نظرية الأعداد بين الإبستمولوجيا والأنطولوجيا. الإسكندرية: دار المعارف الجامعية.
- 16- محمد محمد قاسم (1999)، مدخل إلى مناهج البحث العلمي، ط1، بيروت: دار النهضة العربية.
- 17- موساوي أحمد ، (2007). مكانة المنطق في الفلسفة التحليلية المعاصرة. الجزائر: معهد المناهج.
- 18- موساوي أحمد، (2015). مدخل جديد إلى فلسفة المنطق. الجزائر: دار هومه للنشر.
- 19- موساوي أحمد، . (2015). معجم المناطق. الجزائر: المؤسسة الوطنية للفنون المطبعية
- 20- موساوي أحمد، (2018). مدخل جديد إلى فلسفة الرياضيات. الجزائر: دار هومه.

بالأجنبية:

- 1- Arthur Sulvian (1970), *logicism and philosophy of language*..
- 2- Cantor, (1899) , *Sur les fondements de la theorie des ensembles* .paris: librairie scientifique a Hermann.
- 3- Russell(1950) , *Mathematical logic As Based on the theory of types* .london

المقالات :

بالعربية:

- 1- جلوب فرحات، (2012). جوتلوب فريج. مجلة أوراق فلسفية جديدة ، العدد 6.

بالأجنبية:

- 1- David Hilbert(2012), *On the infinite*, Cambridge University Press.