

أزمة اللانهائي في الفكر الرياضي المعاصر

The crisis of the infinite in contemporary mathematical thought

د. مرابطين مليّة*

قسم الفلسفة، كلية العلوم الانسانية والعلوم الاجتماعية، جامعة قسنطينة ٢

malia_philo@yahoo.fr

تاريخ القبول: ٢٠٢٣/١٢/٠٥ النشر ٢٠٢٤/٠١/٢٢

تاريخ الاستلام: ٢٠٢٣/٠١/٠٢

ملخص:

تعتبر الرياضيات و منذ أن قامت كعلم نظري عند اليونان نموذجا أعلى للمعقولة، و الدقة و اليقين، تسعى إلى محاكاته مختلف العلوم الناشئة، و كان لتطور الفكر الرياضي عبر العصور محطات مختلفة، و لعل أبرزها على الإطلاق ما حدث في نهاية القرن ١٩ و بداية القرن ٢٠، من أزمات حادة في البناء الرياضي و أهمها ما عرف بأزمة الأسس تلك التي أثارت إشكالية كبيرة في فلسفة الرياضة، و خلقت ارتباكاً و اضطراباً في صفوف الرياضيين و فلاسفة الرياضة على حد سواء، جراء البحث عن أساس موحد و ثابت لبلوغ اليقين و الصرامة الموسومة بمهما. و تفرعت عن هذه الإشكالية مشكلات أخرى، لا تقل خطورة، منها و في مقدمتها ما عرف بالمفارقات التي ظهرت في الفكر الرياضي المعاصر بعد تخلي الرياضيين عن الحدس المكاني كأساس، و اعتماد العدد كبديل حيث أفضى البحث في هذا السياق إلى تأسيس نظرية المجموعات هذه التي لم تدم إطلاقيتها و سيادتها طويلاً حتى ظهرت فيها المتناقضات و مختلف المفارقات القائمة في جوهرها على ما يعرف باللاتهائي، و لكن بصيغة جديدة تختلف شكلاً و مضموناً على ما عرف في العصور القديمة، حيث حل المفهوم الرياضي المحض محل ميتافيزيقية اللانهائي التي سيطرت طويلاً على الفكر الإنساني .

الكلمات المفتاحية: رياضيات؛ أزمة الأسس؛ المفارقات؛ نظرية المجموعات، اللانهائي.

Abstract :

Mathematics, since it was established as a theoretical science in the Greeks, is considered a higher model of reasonableness, accuracy and certainty, and the various emerging sciences seek to simulate it. The development of mathematical through out the ages had different stations, and perhaps the most prominent of all was what happened at the end of the 19th century and the beginning of the 20th century, of severe crises in mathematical construction, the most important of which was what was known as the foundations crisis.

Which raised a major problem in the philosophy of sports(mathematics), and created confusion and turmoil in the ranks of athletes(mathematicians) and philosophers of sports (mathematics) alike, as a result of searching for a unified and stable basis to achieve the certainty and rigor that characterizes them. Other problems, no less serious, branched out from this problem, among them and fore most among them what was known as the paradoxes that appeared in contemporary mathematical thought after mathematician abandoned spatial intuition as a basis, and the adoption of the number as an alternative, where research in this context led to the establishment of the theory of groups, whose absoluteness and sovereignty did not last long until contradictions and

various paradoxes appeared in it, based in their essence on what is known as the infinite, but in a new form that differs in form and content from what was known in ancient times, and where the purely mathematical concept replaced the infinite metaphysics that had long dominated human thought.

Keywords: mathematics, crisis of foundations, paradoxes, set theory, infinite.

مقدمة:

لقد احتلت الرياضيات مكانة مميزة واهتماما بالغا بوصفها نموذجاً مثالياً للعقل البشري في كل مساعيه نحو اليقين والوضوح فضلاً على الدقة والصرامة منهجاً وغاية، مقدمات ونتائج، إلا أن هذا العلم النموذج واجه في القرن ١٩ أزمات حادة وقوية على إثر تطورات عملاقة مست جميع فروع محدثة ثورة معرفية وعلمية كبيرة، الأمر الذي جعل إعادة النظر في الإطار الاستيمولوجي الكلاسيكي ضرورة معرفية أكيدة بهدف بناء استيمولوجيا جديدة مطابقة لهذا التطور، بدءاً بالالتفات إلى المبادئ والأسس التي شيد عليها الرياضيون استدلالاً لهم وبراهينهم، ولعل أكبر أزمة زعزعة اليقين الرياضي ما اصطلح على تسميتها بأزمة الأسس فما هي تداعيات هذه الأزمة على الرياضيات كبراديجم أعلى لليقين؟

١- أزمة الأسس في الهندسة

أ- هندسة إقليدس:

تعتبر بلاد الإغريق المهد الأول لقيام الهندسة كعلم صياغة و منهجاً (قاسم، ١٩٩١، صفحة ١٢٥)، لذلك فإن الحديث عن الهندسة يستحيل أن يبدأ بما دون إقليدس، و كتابه الأصول هذا الذي بنى على إثره أول نسق هندسي إكسيوماتيكي عرفته الإنسانية (زيدان، ١٩٧١، صفحة ٣٥)، و ظل هذا النسق مسيطراً على الفكر البشري زهاء العشرين قرن من الزمن حاضياً بمكانة رائدة، و إجلال و تقدير من طرف العلماء (قاسم، ١٩٩١، صفحة ١٢٧)، إذ به خطت الرياضيات أولى خطواتها نحو اعتلاء عرش اليقين، - بكل ما لهذا العرش من معاني و دلالات - و به أيضاً أصبح النهج الرياضي غرضاً تتطلع إليه كل العلوم و لعل هذا عبر عنه ديكرت في كتابه مقال عن المنهج أحسن تعبير بقوله "تلك السلاسل الطويلة من الحجج (...)"، التي اعتاد أصحاب الهندسة الاستعانة بها للوصول إلى أصعب براهينهم، يسرت لي أن أتخيل أن كل الأشياء التي يمكن أن تقع في متناول المعرفة الإنسانية تتابع على طريقة واحدة" (ديكرت، ١٩٨٥، صفحة ١٩٢). و لعل هذا أيضاً ما حدا بكانت KANT (١٧٢٤-١٨٠٤) إلى وصفه بأنه النموذج الوحيد و الضروري للمكان و الزمان على الإطلاق (كانط، ١٩٦٨، الصفحات ٨٠-٨١).

و في الحقيقة لا ترجع الشهرة التي اكتسبها هذا الكتاب و لا سر نجاحه عبر العصور إلى ابتكار إقليدس لنظريات جديدة و متفرقة كما فعل فيثاغورس من قبل، و إن كان قد أضاف نظريات أخرى في مؤلفات أخرى له، و إنما يرجع سر نجاحه إلى المنهج أو الطريقة التي اتبعها في استعراض النظريات المبعثرة و المتفرقة، و صياغتها في نسق

علمي موحد و محكم، بحيث يتوقف فيه برهان كل نظرية على نظريات أخرى سبق برهانها في داخل بناء منطقي، يستند برمته إلى أسس أو مقدمات أو لنقل - مع إقليدس - أصولا محددة تبقى خارج البرهان ممثلة في:

١- التعريفات LES DEFINITIONS : يبدأ إقليدس كتابه بالتعريفات باعتبارها مبادئ (principes)، و يتحدد النسق الإقليدي في بدايته بتعريف الحدود الأساسية للهندسة، بقضايا تشرح معنى الحدود الأولية و لا يقال عنها صادقة أو كاذبة كتعريف الخط مثلا بأنه: طول لا عرض له، والنقطة: ما ليس له بعد وعلى هذا الأساس يكون إقليدس على يقين من أن تبدأ الرياضيات بالتعريفات (الفندي م.، ١٩٩٦، صفحة ٤٤). و الملاحظ أن إقليدس لم يحاول مطلقا أن يضع تعريفا لكل الحدود التي يستخدمها في بناء النسق بدليل أن الطول و العرض هما حدود، لا معرفة تحتويها تعريفات النسق (قاسم، ١٩٩١).

٢- اللامبرهانات : و تنقسم إلى:

١- المصادر postulats : عرفها لالاند بأنها "قضايا غير بينة بذاتها لكننا ننقاد إلى تلقيها" (لالاند، ٢٠٠١، الصفحات ١٠٠٧-١٠٠٨)، فهي إذن قضايا غير واضحة بذاتها، ولكن الرياضي يطلب منا تسليم بها دون برهان مع وعد منه بأنه سيشيد عليها بنيانا رياضيا متماسكا. إذ تعد في هذا الإطار مجرد مطلب، سوى كون التسليم بها يساعد على بناء صرح رياضي معين ، و قد طلب من إقليدس التسليم معه بالقضايا التالية :

- ١- يمكن مد خط مستقيم بين أي نقطتين.
- ٢- يمكن مد خط مستقيم إلا ما لا نهاية.
- ٣- يمكن رسم دائرة بأي مركز و بأي قطر.
- ٤- كل الزوايا القائمة متساوية.

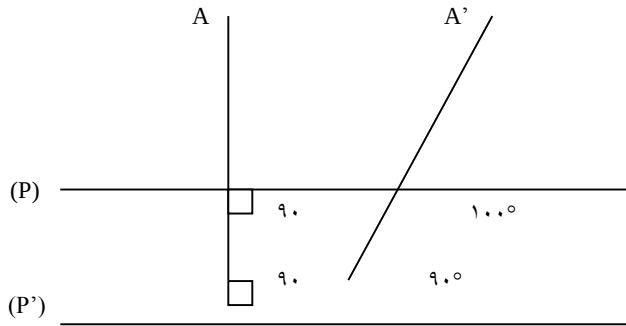
٥- إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع الزاويتين داخليتين من جهة واحدة ومن جهة القاطع فإن المستقيمين أو امتدادهما سيلتقيان (محمد، صفحة ٨٧).

٢- البديهيات l'Axiomes : هي مقدمات قبلية تعد بنية بذاتها و تقبل على أنها صحيحة بلا برهان، و توضع بقرار صادر عن العقل (لالاند، ٢٠٠١، صفحة ١٢٦)، أي أنها قضايا يصدق بها العقل لمجرد تصور مفرداتها (الأخضري، ٢٠٠٥، صفحة ١٠٩) على هذا الأساس تكون قضايا واضحة بذاتها نقبلها دون البرهنة عليها ، و ذلك لشدة وضوحها لدرجة أن إنكارها يقودنا إلى الوقوع في التناقض و من أمثلتها :

- ١- إذا أضيفت كميات متساوية إلى متساويات كانت النتائج متساوية.
- ٢- المساويان لثلاث متساويان.
- ٣- الكل أكبر من الجزء، و كلها قضايا نقبلها دون البرهنة عليها أي أننا نخدس صحتها و صدقها (إبراهيم، صفحة ٧٩).

و بهذا يكون إقليدس قد شيد هندسته على جملة من التعاريف و المسلمات و البديهيات. هذا وينبغي الإشارة إلى أنه على الرغم من أن البديهيات قد اعتبرت دوما مقبولة لا شك فيها، و على الرغم كذلك من أن

التعريفات قد ضرب حولها بسياج من الصمت لأنه لا يمكن التقدم في البحث دون حدود معرفة أو لا معرفة تعريفا دقيقا، بيد أن المسلمات الإقليدية قد بقيت دوما محلا للشك والتساؤل خصوصا و أن إقليدس يطلب منا التسليم معه بها، دون مطالبة بالبرهان عليها، و لكن دون ادعاء منه أيضا بأنها واضحة بذاتها (الجابري، صفحة ٧٥) ، و على هذا الأساس كانت المسلمة التي أثارت كثيرا من التردد و الشك تلك المعروفة بمسلمة التوازن، و التي تصاغ عادة كما يلي : من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد موازي للمستقيم الأول (الجابري، صفحة ٧٥). و التي كانت دون شك وراء ظهور هندسات مخالفة لهندسة إقليدس. إذ مع مجيء كبار الرياضيين في ق ١٩ تأكدت ضرورة النظر فيها، ودراسة إمكانية ردها إلى قضايا أبسط منها لكنهم فشلوا في محاولتهم، و قالوا بالتسليم بها دون البرهنة عليها، و اكتشفوا استقلالها على باقي المسلمات. ويمكننا أن نمثلها على النحو التالي: حيث إذا كان لدينا مستقيمان (p) و (p') و قطعهما مستقيم (AB) مشكلا زاويتين قائمتين كان المستقيمان متوازيين، كما هو واضح في الشكل المقابل. إلا أنه و في المقابل لم يستطيعوا التخلي عنها، لأن في ذلك انخيار للهندسة الإقليدية برمتها، و انخيار لحديث الإتصال الذي بنى عليه اليونان كل الرياضيات ، و عليه تكون هذه المسلمة و بشهادة المختصين في هذا المجال هي التي ألهمت شرارة ما عرف في الفكر الرياضي المعاصر بأزمة الأسس. أي على أي أساس نقيم البناء الرياضي؟



ب- الهندسة الإقليدية Geometrie non euclidien :

لقد كان للمسلمة الخامسة- كما سبق ورأينا- تاريخا طويلا و شيقا، إذ أنه و على الرغم من أن إقليدس يصنفها ضمن مبادئ يفترض بأنها واضحة بذاتها، إلا أنها كانت على عكس ما بدت عليه، وهذا ما قاد الرياضيين في مختلف العصور إلى محاولة البرهنة عليها و الرجوع بها إلى قضايا أبسط منها، ولكنهم لم يفلحوا في ذلك. بيد أن ذلك لم يكفل لهم الاستغناء عنها، لأن في ذلك انخيار للصرح الإقليدي كله (الجابري، صفحة ٧٥)، وضمن سلسلة المحاولات للبرهنة على مسلمة التوازي، ما ذهب باستخدام البرهان بالخلف "Démonstration parabsurde" والذي ينص على استحالة بطلان القضية، يتضمن في ذاته صحتها ونذكر في هذا الصدد محاولة الرياضي نصير الدين الطوسي ذو الأصول الفارسية "Nasir Al-Din Tusi" (٦١٢-؟) الذي أفرد أكثر من مقالة للبرهنة عليها أهمها تلك التي استخدم فيها البرهان بالخلف على صحة المسلمة، و هذا من أجل إثبات استحالة بطلان المصادرة، مما يتضمن التأكيد على صحتها (*) كما نجد في العصر الحديث القس الرياضي الإيطالي جيور لا موساكيري

”Girolamo Sacheri“ (١٦٦٧-١٧٣٣) وكلاهما يقوم برهانهما على فرض الزاوية الحادة بأنه لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم معين من نقطة خارج هذا المستقيم لأن ذلك لا يتسق و طبيعة الخط المستقيم بل و يتناقض مع باقي مسلمات إقليدس (محمد، صفحة ٨٩)، و المهم في برهان ساكيري - على الرغم من سلبه إثبات فقط (استحالة نقيض المسلمة) - إلا أنه أتاح فرصة التوسع في اختبار الفروض المضادة للمسلمات إقليدس. و ما ذلك إلا إيذانا بميلاد هندسات أخرى لا تتبنى النهج الإقليدي. و قد كانت أول محاولة جزئية تلك التي قام بها الروسي لوباتشوفسكي “N.Lobachevsky” (١٧٩٢-١٨٥٦) في إطار محاولة إثبات منطوق المسلمة الخامسة بواسطة البرهان بالخلف. إذ افترض أولاً عكس القضية، أي أنه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم لا موازي واحد للأول كما يقول إقليدس بل موازيان أو أكثر، انطلاقاً من هذا الفرض راح يستنتج نتائج، فتوصل إلى عدد من النظريات الهندسية دون أن يوقعه ذلك في أي تناقض. و بمعنى آخر دون أن يؤدي ذلك إلى بطلان فرضه.

بل و استنتج من هذه الفرضية جملة من القضايا المرتبطة بها ارتباطاً محكماً لا يقل تسلسلها ضبطاً عن قضايا إقليدس، و لا تتضمن شيء من التناقض (صليبا، صفحة ١٨٥) وعلى هذا الأساس لم يتوصل مطلقاً إلى إثبات صحت المسلمة، و يمكن حصر ما تميز به هذه الهندسة، و مخالفتها للنسق الإقليدي في النقاط التالية:

١- المكان سطح مقعر درجة الانحناء به أقل من الصفر ($0 >$) عكس الفرض الإقليدي القائل بالسطح المستوي والذي درجة انحنائه مساوية للصفر.

٢- مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين، و هي عند إقليدس مساوية لـ 180° تماماً.

٣- من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم عدد لا نهائي من المستقيمت الموازية له (محمد، صفحة ٩١).

و بما أن التناقض لم يحدث في نسق لوباتشوفسكي فإن هذا يعني أن المسلمة الخامسة مستقلة تماماً عن المسلمات الأخرى، وعليه يكون إلى نظام يشيد على عكسها يمتلك نفس المقدار في المشروعية الذي يمتلكه النظام المشيد عليها هي نفسها، مما يجعل هندسة لوباتشوفسكي تقف على الأقل مع هندسة إقليدس موقف الند للند (الجابري، صفحة ٧٦)، و بهذا أصبح أمام هندسات لا إقليدية متعددة، وهي النتيجة التي عززتها بعد مرور ما يقرب الربع قرناً من زمن النتائج التي توصل إليها الرياضي الألماني برنارد ريمان B. Reiman (١٨٢٦-١٨٦٦) باكتشافه لهندسة أخرى لا تخالف الهندسة الإقليدية فحسب، بل هندسة لوباتشوفسكي المطلقة أيضاً، حيث اتخذ منطلقاً يخالف الأول و الثاني معاً، مفاده أنه من نقطة خارج المستقيم لا يمكن رسم أي موازي له*، و أن أي مستقيمين مهما كانا وكيف ما كان وضعهما لا بد و أن يتقاطعا و في هذا تصور لمكان ليس له من الأبعاد إلا الطول و العرض (موي، صفحة ١٤١) و هي بذلك تخالف الأنساق السابقة في القضايا التالية:

١- المكان سطح كروي درجة الانحناء به أكبر من الصفر ($0 <$).

* - الانطلاق كان من مصادرة مخالفة لمصادرة إقليدس تماماً.

٢- الخط المستقيم لا يمكن أن يمتد إلى ما لا نهاية و إنما هو منتهي لأنه دائري أو قوس من الدائرة (الجابري، صفحة ٧٦) و بذلك تسقط المسلمة الثانية في النسق الإقليدي المطلق.

٣- لا وجود لمستقيمات متوازية، وكلها تتقاطع.

٤- تكون مجموع زوايا المثلث أكبر من قائمتين (محمد، صفحة ٩١).

و يمكن أن نلخص نسق كل واحدة من الهندسات السابقة في الجدول التالي (الفندي م.، ١٩٩٦، صفحة

(٥٨)

الهندسة	إقليدس	لوباتشوفسكي	ريمان
مقوماتها			
السطح	مستو لا محدود	مقعر لا محدود	محدب محدود
الإنحناء	مساو للصفر	أقل من الصفر	أكبر من الصفر
مجموع زوايا المثلث	180°	أقل من 180°	أكبر من 180°
عدد المتوازيات	مواز واحد	عدد لا نهائي	لا يوجد مواز

و من هذا المنطق تكون أبرز النتائج التي أسفر عنها ظهور هندسات مخالفة لهندسة إقليدس نجد ما يلي:

١- **تغير النظرة إلى المبادئ:** إذا كان من عهد قريب ينظر إلى المبادئ على أساس أنها مطلقة لا تقبل الإنكار وواضحة بذاتها فإنها أصبحت بعد التغير الذي حصل في الحقل الرياضي نسبية و إمكانية إنكارها واردة دون أن يؤدي ذلك إلى تناقض ظاهري أو باطني. فضلا على أنها لا تكون واضحة إلا في داخل نسق معين، و قد ترتب على هذا التغير في المفاهيم إبطال الفصل بين البديهيات و المسلمات، وأصبحت التفرقة بينهما أمرا ثانويا بدليل تغير مفهوم البداهة من فكر إلى آخر حتى أصبحت جميعها تؤخذ كمجرد فروض أو بتعبير بوانكاريه مجرد موضوعات convention أو تعريفات متكررة واتفاقات بين الناس.

٢- **تغير مفهوم يقينية البرهان الرياضي:**

هذا التصور الجديد لطبيعة المبادئ أو الأسس قد انعكس أثره على البرهان الرياضي نفسه، إذ تحدث المعاصرون منطقة و رياضيون عن طبيعة النسق الإستنباطي الإقليدي و أطلقوا عليه و صف النسق اليقيني باعتباره يؤدي إلى نتائج ضرورية لانطلاقه من مبادئ صحيحة، صحة مطلقة، و مثاله على ذلك القياس الضروري عند أرسطو أما التصور الجديد فإنه يجعل منه نسقا فرضيا استنتاجيا استنباطيا، و به يصبح البرهان الرياضي أكثر تواضعا (*) لأن لسان حاله يشير فقط إلى أنه إذا وضعنا هذه المبادئ أساسا للاستنتاج فهي النتائج التي ترتب عنها، و أصبحت الضرورة الرياضية لا تخص القضايا المبدئية نفسها، بل فقط الرابطة المنطقية التي تجمع بينها في النسق الاستدلالي وإلى

* - خاصة بعد الذي وجه له - البرهان الرياضي - من طرف أعلام بارزة في الحقل الرياضي ذاته من أمثل النمساوي لودفيغ فيتغنشتاين وكذا المنطقي الرياضي كورت غودل.

جانب الهندسة الالاقليدية ظهرت الهندسة الإسقاطية ، و كلها تثبت أحقيتها و صحتها و توقع الإنسان في حيرة و قلق عن أي الهندسات صحيح؟

إن عالم الهندسة الكلاسيكي (التقليدي) يرى في هندسة إقليدس الصحيحة وحدها و الضرورية للزمان و المكان، على حد تعبير كانط أما عالم الهندسات المعاصرة فإن الأمر عنده يختلف تماما إذ لا ترفض أي هندسة، و لا ينفي بعضها بعضا إلا داخل منظومة هندسية معينة، بعد أن كان النسق الاستنباطي القديم صادقا صدقا مطلقا، أما الحديث فإنه أصبح يتحدث و يعبر عن نفسه من خلال أنساق لا حصر لها في مجال علم واحد (عوض، ٢٠٠٦، صفحة ١٥٤). و عليه و يظهر هندستي "لوياتشوفسكي" و "ريمان" إلى جانب ظهور الهندسات القياسية الأخرى عاد السؤال القديم الجديد المتعلق باليقين الرياضي يطل برأسه من جديد في صيغة أكثر وضوحا بحيث لم تعد الإجابة عن أي الهندسات صادق و أيها كاذب؟ ذات معنى بعد أن أصبح السؤال ذاته لا معنى له و لا جدوى منه، حيث بعد أن أصبحت المطابقة للواقع لا تعد مطلقا معيارا لأجل البت في مسألة اليقين، تسرب الشك إلى الأساس التجريبي الواقعي، و حل محله ما يسمى بالاتساق أو مطابقة الفكر لذاته "Consistance"، و هذا التصور الجديد لليقين الرياضي كان بمثابة طعنة كبرى لنظرية كانط في حدس المكان « l'intuition spécial »، و التي تربعت طويلا على عرش الفكر الرياضي معتبرة هندسة إقليدس الوحيدة الضرورية المعبرة عن خواص المكان، إذ كان الفضل للهندسات الالاقليدية في توضيح استقلال قضايا الهندسة عن المكان. أين أصبحت الحقيقة تقاس بالميزان المنطقي الصرف، والمتمثل في عدم تناقضها داخل النسق الواحد، و على هذا الأساس أصبح الحديث عن صحة هذه الهندسة أو تلك حديث لا معنى له (الجابري، صفحة ٧٨) و على حد تعبير بوانكاريه (*) إن هندسة ما لا يمكن أن تكون صحيحة أكثر من أخرى بل يمكن أن تكون أكثر ملائمة "plus comonde" وتكون على إثر هذا " الهندسة الالاقليدية أكثر الهندسات ملائمة و ستبقى كذلك (...) لأنها أبسطها جميعا" (بوانكاريه، ٢٠٠٢، صفحة ١٣٠) و لأنها تنطبق أيضا على خصائص الأجسام الصلبة الطبيعية (الجابري، صفحة ٧٨) و بذلك تصبح الحقيقة الرياضية التي كانت إلى عهد قريب لا تعلوها حقيقة أخرى فقط الحقيقة الملائمة أولى بؤادر أزمة اليقين الرياضي وحتى اقتراح بوانكاريه ذاته لم يسلم من النقد اللاذع . فإذا كانت هندسة إقليدس هي الملائمة للعالم المعاش فإنها غير ملائمة لعوالم أخرى و هذا ما أثبتته نظرية النسبية المعقدة التي قال بها أنشتين التي تتلاءم مع هندسة ريمان (الجابري، صفحة ٧٨). و مكنم الغرابة أن هذه الهندسات ليست متناقضة، رغم أن المسلمات التي تستند إليها حول المتوازيات ليست واحدة مشتركة و كل ما يسوغ قوله هو أن الرياضيات ليس كل ما فيها يقينا مطلقا وهي حقيقة تقضي على رأي كانط، الذي يعتبر بنية المكان الإقليدي صورة قبلية عالمية و ضرورة للتفكير الإنساني، فالهندسة الكلاسيكية التي كانت إلى القرن ١٩ مأخوذة كحقيقة مطلقة - تظهر كحالة - خاصة من حالات الهندسة و هي حالة تقوم على المكان المستوي. أما الهندسات المغايرة لها فهي التي أعلنت أنه ليس لدينا أي دليل عقلي على أن المكان يتمتع بأبعاد

* - فيلسوف وعالم رياضي فرنسي (١٨٥٤-١٩١٢) من مؤلفاته: العلم و الفرضية ١٩٠٦، العلم و المنهج ١٩٠٨.

ثلاثة طول و عمق و عرض. و أن هندسة إقليدس عرفت رواجاً لأنها أقرب إلى حدسنا الذي لا يهون عليه تصور المكان على صورة أخرى تتصور فيها مكاناً خالياً من الأبعاد، و نحذف قضية المتوازيات حذفاً تاماً، و التوغل في التجريد الرياضي كما تدعوا إلى ذلك جماعة بوريكي و بهذا تصل الرياضيات إلى الحد الذي قال فيه راسل مستسخراً بأنها العلم الذي لا يعرف عما يتحدث، و لا إذا ما كان يتحدث عنه صحيحاً بل هي فقط فن قول الشيء الواحد بكلمات مختلفة (بلانشي، ٢٠٠٤، صفحة ٩٩).

و بهذا أصبحت الرياضيات توصف بأنها نظم فرضي استنتاجي *Système Hypathético - déductif* أي مجرد بناء فكري يشيد بواسطة فروض وقع عليها الاختيار دون مراعاة صدقها أو كذبها، والصدق الوحيد المطلوب منها هو خلو هذا الصرح من أي تناقض جديد (الجابري، صفحة ٨٠).

بناء على ما سبق ذكره جاز لنا الحكم بأن مطلع القرن ١٩ شهد حركات نقد فكري داخلي توجه من خلالها الرياضيون إلى الفحص و نقد نظرياتهم الرياضية القائمة بقصد التثبت منها، و تأكيد سلامة براهينهم (٣-٤، Reichenbach, ١٩٨٥، pp. ٣-٤)، و ظهرت على إثر ذلك مشكلة فرضت نفسها، و هي تبرير تلك البديهيات التي يبدأ بها النسق الرياضي، و تلك تمثل في الواقع المشكلة الأساسية لكل علم و على أساس هذا الطرح كان التشكيك في بديهيات حدس الإتصال التي أقامت عليه الرياضيات صرحها العقلي منذ اليونان الذي كاد يعصف بها إلى أدراج النسيان بفعل الأزمة التي وقع فيها الرياضيون، حول الأساس السليم الذي يجب أن يقام عليه العلم الرياضي. بعد أن حجبوا الثقة عن الامتداد الهندسي وولوا وجوههم شطر الأسس أو الأصول العديدة لعلم الحساب و الامتداد بها إلى التحليل كقاعدة يقينية تستند عليها الرياضيات و يعد في هذا الصدد جورج كانتور أبرز ممثلي هذه النزعة بمشروعه الجديد المعروف بـ **نظرية المجموعات**

٢- أزمة نظرية المجموعات و ظهور اللانهائي الرياضي

١- نظرية المجموعات عند جورج كانتور:

أ- تعريفها: نشير بداية إلى أن نظرية المجموعات (*) لم تكن اكتشافاً و إبداعاً كانتوريا محضاً، وإنما كانت نتيجة جهود حثيثة للعلماء و الرياضيين بدء من التحول من الهندسة إلى التحليل من خلال ديكرات، وصولاً إلى ظهور حساب اللانهايات الصغرى أو ما يعرف بالتكامل و التفاضل مع كل من ليبني و نيوتن، وظهور نظرية الدوال التي أقيمت على أساس فكرة الإتصال الهندسي — إلا أنه سرعان ما ظهرت عدة إكتشافات رياضية زعزعت يقين الرياضيين بفكرة ملازمة التفاضل و التكامل للإتصال مما أدى إلى إعادة النظر في مبادئ الهندسة التحليلية و التوجه إلى الاعتماد على أساس جديد في تحسيب التحليل، و إقامة هذا الأخير على الأعداد الصحيحة الموجبة عن طريق ترييض الأعداد الصماء و التخيلية وكذا الأعداد الصحيحة السالبة، و الأعداد اللامتناهية إلى الأعداد الصحيحة

* - تستخدم بعض المراجع "نظرية المجاميع" للدلالة على نفس النظرية ولكن الأصح القول "نظرية المجموعات" لأنه كلمة مجاميع هي جمع لكلمة مجموع، اما المجموعات فهي جمع لكلمة مجموعة و هي بعينها التي يقصدها كانتور.

الموجبة، و في هذا الإطار جاءت محاولة الألماني جورج كانتور G. Cantor (١٨٤٥ - ١٩١٨) (*) (Belna, ١٩-٤٢, pp. ٢٠٠٠) الذي انصب اهتمامه على دراسة مختلف الأعداد، لا سيما اللامتناهية منها، هذه الأخيرة و في قراءة اسقراطية - لتاريخها - كما سبق و أشرنا إلى ذلك في الفصل الأول - نستشف أنها كانت و منذ زينون الإيلي موضع جدل صاحب بين الرياضيين و الفلاسفة، وكان لا بد لها من الإنتظار قرونا طويلة حتى أمكن فهم طبيعة هذا العدد، وبعبارة صريحة لم يكن في الإمكان أن تنضج فكرة اللامتناهي وتصاغ في أعداد و عمليات إلا بعد أن نضج الفكر الرياضي في ق ١٩ (محمد، صفحة ١١٥) مع أعلامه : بولزانو (١٧٨١ - ١٨٤٨)، ديدكند (١٨٣١ - ١٩١٦)، كوشي (١٧٨٩ - ١٨٥٧) ثم كانتور الذي كان جريئا إلى حد بعيد إذ كان معه الظهور الفعلي لنظرية لمجموعات: La théorie des ensembles و بفضلها اعتبرت نظرية المجموعات فرعاً رئيساً من فروع الرياضيات المعاصرة، و سمحت بتعريف دقيق لتصور اللاهائي (Encyclopédie, ١٩٩٩).

تلك التي ركن إليها الرياضيون أخيراً كأساس جديد للرياضيات بعد أن نشرت لأول مرة ما بين عامي (١٨٩٥ - ١٨٩٧)، و تعد نظرية المجموعات بالتعريف تلك التي تعني بالتأليف (Combinaison) بين الأعداد منطلقة من ثلاثة حدود أولية لا معرفة و هي المجموعة « Ensemble »، العنصر « Elément » و فعل الانتماء « Appartenance » (الجابري، صفحة ٩٥) و بصفة عامة تختص نظرية المجموعات بالتأليف بين الأعداد في مجموعات وفقاً لعلاقات ثابتة و محددة سواء أكانت أعداداً أصلية « cardinale » [١، ٢، ٣...] أو مرتبة « Ordinale » [أول، ثان، ثالث...] متناهية « finite » أو لا نهاية « infinite » فلكل خواصه و نظرياته (الفندي م.، ١٩٦٩، صفحة ١١٤) و عند تعريفنا لمجموعة الأشياء الرياضية يجب أن نهتم أولاً بطبيعة العلاقة بين هذه الأشياء فمجموعة الأعداد الطبيعية المنتهية تشكل مجموعة و هذه الأخيرة لها عدد، هو أصغر أعدادها و لرمز لها بالرمز α . (Darbon, ١٩٤٩, p. ٨) هذا و يرمز كانتور بحرف الألف العبري لأصغر العداد اللامتناهية المرتبة (الفندي م.، ١٩٩٦، صفحة ١١٦) مع العلم أن كانتور قد اقترح أن تعرف نظرية المجموعات بأنها حشد من الموضوعات المحددة و المتميزة و المرتبطة فيما بينها بخاصية ما تفصلها عن غيرها، وهذه الموضوعات تسمى أعضاء أو عناصر المجموعة تخضع لشروط حددها كانتور في:

١- التحديد: انتماء العضو (العنصر) إلى المجموعة انتماءً صريحاً و واضحاً لا لبس فيه.

٢- التمييز : عدم تكرار نفس العضو في نفس المجموعة مرتين.

٣- الإشتراك في خاصة ما: و هو الذي يفصل به مجموعة عن مجموعات أخرى (محمد، صفحة ١٦٧) (*).

** - رياضي ألماني ولد بسان بيتاسبورغ (روسيا) كرس نفسه للرياضيات منذ سنة ١٨٦١، و درس إلى جانبها الفلسفة و الفيزياء و تحصل على الشهادة الجامعية النهائية تحت عنوان نظرية الأعداد، نشر مقال عن المجموعات سنة ١٨٨٩، ومقال آخر بعنوان سؤال قاعدة عن نظرية المجموعات سنة ١٨٨١، في نهاية حياته أصيب بمرض عقلي توفي على إثره.

* - كالخاصية التي تفصل بها دارسي الفلسفة عن دارسي الرياضيات أو الطب أو أي تخصص آخر.

و تجدر الإشارة إلى شيء مهم في نظرية المجموعات الكانتورية وهي أن كانتور استعمل المجموعات دون أن يحدد طبيعة الأشياء التي تحتويها (نقاط، اعداد، خطوط...)، و هو الأمر الذي فسره الكثيرون بأنها أقصى أمانى كانتور في توحيد فروع الرياضيات من هندسة و جبر و تحليل (Gerard, p. & Mary Bartholy, ١٩٧٨, ٢٩٨) على حد سواء، و لهذا عدت نظرية المجموعات مع بداية القرن ٢٠ الأساس الصحيح و السليم و المنطقي للرياضيات و لعل هذا ما أكدته بصورة غنية عن التعريف أحد أكبر الرياضيين في المؤتمر الذي انعقد في سنة ١٩٠٠ - بكل فخر - و نقصد به بوانكاريه إذ يقول: " الآن يمكن أن نقول أننا وصلنا إلى الصرامة الكاملة " (Cline, p. ٢٠٢).

و إذا حاولنا أن نفهم نظرية المجموعات بشكل واضح هناك بعض المفاهيم لا بد من ضبطها، و لا يمكن تجاوزها في إطار محاولتنا الإحاطة بمفارقات هذه النظرية و التي بينت بشكل واضح اللانهائي عند كانتور، و هي التي سنحاول شرحها في موضع لاحق.

ب- أهم مفاهيمها: انتقل كانتور بعد تحديده لما يقصده بنظرية المجموعات إلى تقسيم المجموعات إلى

قسمين:

(١) المجموعات المنتهية:

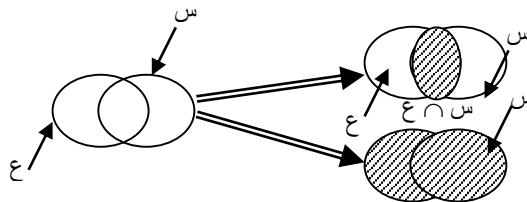
و تتكون من عناصر عددها متناه كالاتي: لتكن لدينا المجموعة م مكونة من :

{ ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ } هي مجموعة متناهية مكونة من ٧ عناصر.

(٢) المجموعات اللامتناهية:

و تتكون من عناصر لا نهاية لها كالاتي م = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ... } وهي مجموعة لا متناهية لأنه لا نهاية لعددها (الجابري، صفحة ٩٧)، هذا و يطلق على عناصر المجموعة المنتهية باسم العدد الأصلي أو العدد العاد أو قوة المجموعة.

و كان من الطبيعي أن تبدأ نظرية المجموعات الكانتورية بعلاقات أولية تربط بين المجموعة وأعضاؤها، وتسمى علاقة العضوية و يرمز لها كانتور ب $\in$ أو الإنتماء (Appartenance) و نقول س عضو في م ١ عضو في المجموعة س أو بالرمز " $\in$ س " أما المجموعات الفرعية في مجموعة كلية فالعلاقة القائمة بينها و بين المجموعة الرئيسية الكلية فهي علاقة الإحتواء « inclusion » و نرمز لها $\subseteq$ و نقرأ م محتواة في ل و نكتب $M \subseteq L$ (محمد، صفحة ١١٨)، بالإضافة إلى مفاهيم أولية أخرى مثل التقاطع و الاتحاد و يمكن توضيح هذين المفهومين بالشكل التالي (Mashaal, ٢٠٠٠, p. ٣٩):

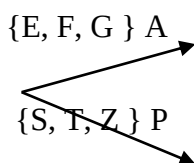


س ع
ع

و الجدير بالذكر أن كانتور و في دراسته للمجموعات، استند على طريقة المقابلة النظرية - على غرار ما فعله بن قرة و بولزانو قبله - لإقامة المقارنة بين أعداد مجموعتين سواء كانتا متناهيتين أو لا متناهيتين، و على هذا الأساس يمكن لنا ببساطة أن نقيم تناظرا بين مجموعة أحرف الأبجدية الفرنسية $E = \{A, \dots, Z\}$ و مجموعة الأعداد $L = \{1, \dots, 26\}$ و هاتين المجموعتين المتناهيتين متساويتين لأن كل عضو أو عنصر من الأول يقابل و يناظر عضوا أو عددا في المجموعة الثانية، و العكس صحيح (Boll, p. ٢٢٢).

و هذه العلاقة بين المجموعات سواء كانت متناهية أو غير متناهية أطلق عليها كانتور علاقة التكافؤ أو التشابه (*)، و في الحقيقة يكون كانتور قد اقترح هذه العلاقة و جعلها وسيلة فعالة في تعيين الأعداد الكبيرة أو اللامتناهية التي يتيسر معها العد، ويكون أبسط مثال لها ما أورده راسل في كتابه (أصول الرياضيات) حين يقول أن عدد الرجال الحياء في مجتمع جميع الرجال و النساء فيه متزوجون، و لا يسمح بتعدد الزوجات، هو نفسه عدد النساء الأحياء (بيتراند، صفحة ١٠) و انطلاقا من هذه العلاقة - التقابل النظري - أراد كانتور المقارنة بين مختلف مجموعات الأعداد ليدرك مدى التكافؤ أو التشابه فيها مع علمه المسبق بلا نهائية مختلف أنواع الأعداد (وليم تاووسروس:).

و توصل بواسطتها أيضا إلى نتيجة مفادها أنه و متى استطعنا أن نقيم مقابلة نظيرية بين مجموعتين فإن لهما نفس العدد العاد أو الأصلي، و إذا كانت المجموعة A - متضمنة أو جزئية من المجموعة P - فإن العدد الأصلي A أصغر أو يساوي العدد الأصلي P و يرمز لها بـ $P(A)$ (Cousquer). علما أن العدد الأصلي لمجموعة من المجموعات نحصل عليه عند كانتور ليس بتعداد عناصر المجموعة بل بعملية تطبيق تزواج بين عناصر مجموعتين على الأقل و نقول أن جميع المجموعات التي يمكن المقابلة بين عناصرها واحدا بواحد هي ذات قوة متساوية أو متعادلة « Equinumeriques » فهو إذن ما تشترك فيه جميع المجموعات المتعادلة مع المجموعة المقترحة (المعطاة) (فرنان، ٢٠٠٦، صفحة ٣٨). و عليه إذا كانت المجموعتين A و P تجمعهما علاقة - تساوي القوة « I » قلنا أنها تشتركان في خصيصة معينة و هي أن 0 هو العدد الأصلي لهما على النحو التالي (فرنان، ٢٠٠٦، صفحة ٣٩).



و تلكم هي أهم المفاهيم الرياضية التي انطوت عليها نظرية المجموعات.

* - تحدث هذه العلاقة إذا أمكن وضع عناصر المجموعة أ في تناظر « Correspondance » واحد بواحد مع عناصر المجموعة ب تماما مثلما تناظر أصابع اليد اليمنى أصابع اليد اليسرى.

ج - تطبيقاتها : بعد تحديد المفاهيم الأساسية التي تقوم عليها نظرية المجموعات و العلاقات الرئيسة التي تجمع بين مجموعاتها، توصل كانتور و انطلاقا من خصائص المجموعات إلى الحديث عن إمكانية إقامة تقابل نظيري بين مجموعة الأعداد الزوجية و الفردية و كذا الطبيعية و النسبية و الجبرية، بما أن لها نفس العدد الأصلي أو نفس القوة.

كما توصل كانتور و على غرار بولزانو و انطلاقا من خصائص المجموعات اللامتناهية، أن المجموعة الجزئية اللامتناهية تكون متساوية مع المجموعات الكلية، بمعنى أن الجزء متساو مع الكل، وهذا ما يتضح بصورة جلية بين مجموعة الأعداد الطبيعية و بعض أجزائها المتمثلة في مجموعتي الأعداد الزوجية والفردية على حد سواء، و على سبيل المثال لا الحصر.

و إلى جانب هذا أكد كانتور بصراحة من خلال أبحاثه، عن عدم إمكانية إقامة تناظر بين مجموعة الأعداد الطبيعية بمجموعة الأعداد الحقيقية للسبب التالي: بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية مكافئة أو متقابلة نظريا مع مجموعة الأعداد الجبرية، فإن مجموعة الأعداد المتسامية أو المتعالية (*) ليس لها ما يقابلها في مجموعة الأعداد الطبيعية. و عليه فإن مجموعة الأعداد الحقيقية ليست لها نفس القوة مع مجموعة الأعداد الطبيعية، بل إن قوتها أو عددها العاد أكبر بكثير من قوة أو العدد العاد لمجموعة الأعداد الطبيعية (Belna, ٢٠٠٠, pp. ٨١-٨٢). وبهذا ينتفي ما اعتقده الرياضيون طويلا بأن مجموعة الأعداد الطبيعية مكافئة لمجموعة الأعداد الحقيقية ، بالموازاة مع اعتقاد غاليلي بأن المجموعات اللامتناهية متساوية (الصادقي، ١٩٩٩، صفحة ٣٨).

هذا فضلا على عدم اعتبار كانتور مجموعة الأعداد الحقيقية ذاتها على أنها المجموعة اللاهائية الأكبر من جميع المجموعات الأخرى، وذهب إلى أن هناك مجموعات لا نهائية أكبر من بعضها البعض إلى ما لا نهاية، ومن هذا المنطلق تكون الأعداد المتجاوزة للامتناهي لا نهائية، شأنها في ذلك شأن الأعداد التي لا نهاية لها (وليم تاووسوس:). هذا و يرمز كانتور لمجموعة الأعداد المتجاوزة للامتناهي بالرمز $\subset$ حيث أن :

$\alpha_1 > \alpha. \wedge C = \alpha_1 / \subset = 2^\alpha$. (Belna, ٢٠٠٠, p. ١٢١) بمعنى أن العدد العاد لمجموعة الأعداد الحقيقية $\subset$ هو أيضا العدد الأصلي لجميع المجموعات المكافئة لهذه المجموعة و يكون أصغر من تلك التي لها قوة أكبر من قوة مجموعة الأعداد الحقيقية.

إضافة إلى ذلك يرى كانتور أيضا أنه توجد عدة رتب للأعداد العادة للمجموعات اللامتناهية (α) وهذه الرتب مستمرة إلى ما لا نهاية و إذا رتب ترتيبا تصاعديا تشكل المتتالية التالية:

$\alpha, \alpha_1, \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{2W+1}, \alpha_{2W}, \dots, \alpha_{W+1}, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha.$ (Sinaceur, ١٩٩٤, p. ٩٠٩) و هي أعداد

لا نهاية لها - في نظر كانتور - ليعترف في نهاية المطاف بوجود اللاهائية المطلقة التي يرمز لها بالرمز اليوناني Ω التي لا يمكن إدراكها أو معرفتها (الصادقي، ١٩٩٩، صفحة ٦١).

* - علما أن الأعداد المتعالية وكذا الأعداد الجبرية كلاهما ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

و في هذا الصدد يطلق كانتور على الأعداد التي تتجاوز لا نهاية الأعداد الطبيعية بالأعداد المتجاوزة للمتناهي و على المجموعات المكافئة اسم المجموعات القابلة للعد. و يذهب إلى تعريفها بأنها كل مجموعة تكون عناصرها ممكنة العد، في طريق الأعداد الطبيعية أما المجموعات المستمرة (المتجاوزة للمتناهي) فهي التي تكون عناصرها غير ممكنة العد عن طريق الأعداد الطبيعية (Boll, p. ٢٢٢) (*). و إذن تكون المجموعات القابلة للعد لها نفس العدد الأصلي لمجموعة الأعداد الطبيعية (α). بينما المجموعات المتجاوزة للانتهائي هي التي يكون عددها العاد أو الأصلي أكبر من العدد الأصلي لمجموعة الأعداد الطبيعية.

و إلى هذه اللحظة تعتبر نظرية كانتور معقولة جدا، لكن ما إن أكد بأن هذه الأعداد – المتجاوزة للمتناهي – هي لا متناهيات بالفعل، و ليست لا متناهيات بالقوة. حتى قامت ثورة عارمة ضد الأفكار والمعتقدات التي سادت طويلا قبله على طول المسار التاريخي للانتهائي – كما سبق و أن رأينا – و التي اعتبرت اللامتناهي الوحيد الأوحد الموجود بالفعل هو اللامتناهي الإلهي، بينما وإن تنوعت اللامتناهيات الأخرى لا تعدو أن تكون إلا لا متناهيات بالقوة فقط. و بذلك يكون كانتور قد ميز فعلا وبدقة بين اللامتناهي بالقوة و اللامتناهي بالفعل فيكون في نظره الأول القصد منه كمية محدودة متغيرة تزداد ازديادا يتجاوز كل النهايات المحدودة، أي أنها عملية ينمو بواسطتها عدد إلى ما وراء المعدودات، بينما يقصد بالثاني كمية مثبتة تقع فيما وراء كل الكميات المحدودة بمعنى أنها ليست عملية بل إنها في ذاتها عدد (وليم تاووضروس:) و هذا النموذج للامتناهي بالفعل يتجسد عند كانتور في مجموعة الأعداد الحقيقية (سليمة، ٢٠٠٥، صفحة ١٤٠).

و بهذا يكون كانتور – دون إنكار جهود لايبنتز و بولزانو قبله – أول من درس اللامتناهي دراسة رياضية بحتة و توصل من خلالها إلى وضع مفهوم رياضي خالص و أصيل للامتناهي الفعلي (الرياضي). و وفق هذا الاعتبار جاز لنا اعتباره أول من أحدث القطيعة المطلقة مع التصورات السابقة للامتناهي الفعلي و التي سيطرت على الفكر البشري لا سيما في مرحلته الوسيطية ممثلا في اللامتناهي الإلهي.

هذا فضلا عن تجسيد مختلف لا نهايات الأعداد في أعداد أصلية (عادة) متجاوزة للامتناهي مقارنا بينها ومتوصلا في ذات الوقت إلى وجود لا متناهيات أكبر من أخرى.

بناء على ما سبق، و على ضوء ما تقدم يمكننا أن نستنتج بأن نظرية المجموعات بعد أن نشرها كانتور، وأصبحت متداولة عند الرياضيين، اعتمدت كأساس للرياضيات حيث نجحت فعلا في استيعاب مختلف فروع الفكر الرياضي، ولكن بتعمق الرياضيين و العلماء فيها بكل جوانبها و في كل محتوياتها، تم الكشف عن مفارقات و نقائص انطوت عليها النظرية مما أدى إلى إثارة جدل حاد و نقاش صاخب في نهاية ق ١٩ و بداية ق ٢٠. و هذا ما سنحاول كشفه في إطار استعراضنا لأهم مفارقات هذه النظرية.

٢- مفارقات نظرية المجموعات:

* – إن كانتور يقسم المجموعات اللامتناهية إلى قسمين: مجموعات قابلة للعد و مجموعات مستمرة.

إن نظرية المجموعات التي اعتبرها الرياضيون أخيرا الأساس الجديد للرياضيات و ركنوا إليها بعد الهزة و الأزمة العنيفة - أزمة الأسس - التي زعزعت أركانها، و غيرت الكثير من مفاهيمها كمثال و نموذج أعلى في الدقة و اليقين تسعى إلى محاكاته و النسج على منواله كل العلوم. حتى أصبح الرياضيون غير قادرين - بكل ما تحمله الكلمة من معان - عن التفاهم فيما بينهم، وعاجزين على إقناع بعضهم بعضا ، بالرغم من أنها - نظرية المجموعات - تعد أعظم ما توصل إليه الفكر الرياضي إلا أن ذلك لم يكن مانعا من استمرار الشك حول وجود أساس كلي و موحد تستند إليه الرياضيات في النظرية ذاتها فماهي إلا سنوات قليلة حتى بدأت النقائص تظهر فيها من جوانب متعددة و بدأت المفارقات (Lalande, ١٩٦٨, p. ٧٣٤) (*) تنخر جسد النظرية و بات من الواضح أنها و إن جاءت بتصورات جديدة ظاهرها فيه الوضوح و اليقين، فإن باطنها يكشف عن مفارقات خطيرة تأبى على الدقة و الصرامة و الوضوح المنطقي، وهذا إن دل على شيء في الحقيقة فإنما يدل على أن الكلمة الأخيرة و القول الفصل في أزمة الأسس لم يزل غائبا، و أن تصورات كانتور للأعداد و مجموعاتا يحتاج إلى معالجات أخرى حتى يمكن أن تكون قواعد يقينية تحمل البناء الرياضي بأكمله (محمد، صفحة ١٣١). و لعل أشهر هذه المفارقات التي انطوت عليها النظرية تلك التي كشف عنها كانتور ذاته فيها عام ١٨٩٩ إلى جانب مفارقات أخرى و تتعلق في الأساس بمفارقة الرياضي الإيطالي فورتى، و الخاصة بأكبر عدد ترتيبي و كذا تلك المتعلقة بمجموعة كل المجموعات التي كشف عنها الرياضي المنطقي بيرتراند راسل. و سنعمد في الإشارة إلى هذه المفارقات على أساس الترتيب التاريخي للإعلان و الظهور الفعلي لها و بذلك تكون أولى هذه المفارقات زمانيا مفارقة بورالي فورتى ١٨٩٥ ثم مفارقة راسل سنة ١٩٠١ ثم مفارقة كانتور التي تم الإعلان عنها سنة ١٩٣٢ بالرغم من اكتشافها منذ سنة ١٨٩٩.

أ- مفارقة بورالي فورتى Bourali Fourti (١٨٦١ - ١٩٣١م).

و هي أقدم مفارقات نظرية المجموعات و تعد سابقة زمانيا من مفارقة راسل بتصريح من هذا الأخير بقوله "لقد اكتشف بورالي فورتى التناقض المتصل بأكبر عدد ترتيبي قبل أن أكتشف تناقضي" (راسل، فلسفتي كيف تطورت، ترجمة محمد مرسى محمد، ١٩٨٠، صفحة ٩٢) و تعد الأعداد الأصلية و الترتيبية الإطار النظري للمفارقة إذ تنص النظرية ٤٩ في الأعداد الترتيبية الكانتورية أن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيبا تصاعديا بحيث أنه من بين كل عددين أيا كانا يوجد دائما عدد أقل من الآخر و أن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد.

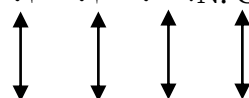
إذ يميز كانتور بين الأعداد العادة أي التي يعد بها (١، ٢، ٣، ...) و الأعداد الترتيبية و هي نفس الأعداد مرتبة ترتيبا تصاعديا (أولا، ثانيا، ثالثا، ...) (الجابري، صفحة ٩٩).

و يرى بورالي فورتى أنه إذا أخذنا هذا العدد الأخير (في سلسلة الأعداد) كطرف وحيد في المقارنة فلا بد من أن يكون وفقا للنظرية نفسها باعتباره عددا لا متناهيا أقل من عدد آخر لا نعلمه، فإن أكبر الأعداد المرتبة

* - يعرف أندريه لالاند في معجمه المفارقة بأنها كل ماهو مخالف للرأي العام معتمدا بالتقدير أو بالاشتباه. ونقول بأن المفارقة بوجه عام هي محاكمة تبرهن على صدق وكذب الحكم في آن واحد.

اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية و هذا تناقض (الفندي م.، ١٩٦٩، الصفحات ١١٦-١٩٥) و عليه تكشف لنا هذه المفارقة أنه و متى حددنا أكبر الأعداد الترتيبية فإنه يتعين لنا أنه بإمكاننا إضافة (١) فنحصل على عدد ترتيبي جديد يكون هو الأكبر (الفندي م.، ١٩٩٦، صفحة ١١٦)، و يمكن توضيح هذه النظرية باختصار كما يلي:

(١) الأعداد العادة N. Cardinaux: ٠، ١، ٢، ٣، ن $\Leftarrow$ دالة على الكم



(٢) الأعداد الترتيبية N. Ordinaux: أولاً، ثانياً، ثالثاً، رابعاً ن - ١ $\Leftarrow$ دالة على الكيف و هنا نقع ببساطة في مفارقة لا نهائي أكبر لا نهائي آخر $ن + ١ < ن$ و إذن فلسلسلة الأعداد الترتيبية ليس لها حد أخير و بالتالي في هذه الحالة يكون لهذه السلسلة ذاتها عدد ترتيبي أكبر من أي حد في السلسلة أي أكبر من أي عدد ترتيبي و يكون بذلك أعلى من اللانهاية و هذا تناقض (الجابري، صفحة ١٠٠).

ب- مفارقة الفئة ل: راسل (مجموعة جميع المجموعات) B. Russell (١٨٧٢-١٩٧٠)

و هي أشهر المفارقات التي انطوت عليها نظرية المجموعات، وقد اكتشفها راسل و هو يتأمل برهان كانتور القائل بعدم وجود عدد أصلي هو الأكبر و ذهب إلى القول في كتابه "مقدمة للفلسفة الرياضية" إلى القول: "عندما نظرت لأول مرة في هذا التناقض سنة ١٩٠١ حاولت الكشف عن خلل في برهان كانتور القائل بعدم وجود عدد أصلي هو الأكبر (...)، و انتهيت إلى تناقض جديد هو كالآتي: الفصل الشامل الذي نبحث أمره و الذي يجب أن يشمل كل شيء و يجب أن يشمل نفسه كواحد من أعضائه (...)، ولكن عادة لا يكون الفصل عضواً من نفسه فالإنسانية مثلاً ليست إنساناً (...) و هكذا كل من الفرضية - على أنه عضو و ليس عضو من نفسه - تستلزم تناقضاً" (راسل، ١٩٦٢، صفحة ١٩٨) و نفهم من هذا أن النقيضة التي يقصدها راسل هنا تتعلق بمجموعة جميع المجموعات التي لا تشتمل على ذاتها و إذا رمزنا لهذه المجموعة بالرمز A يمكن أن نتساءل حسب راسل عما إذا كانت A عنصراً من A أم لا؟

إنه إذا كانت $A \in A$ فهي تحقق الخاصية التي تميز عناصر A يعني أن $A \notin A$

و إذا كانت $A \in A$ فإن A ليست عنصراً من نفسها، يعني أن $A \in A$ (Cohen, p. ٢٤)

و لتقريب هذا التناقض ضرب راسل مثال ملاعق الشاي لتوضيحها قائلاً: إذا أخذنا فئة ملاعق الشاي فإننا لا نجد هذه الفئة ملقعة شاي، أي أنها ليست عضواً في فئة ملاعق الشاي، و لكن فئة كل الأشياء التي ليست ملاعق شاي هي أيضاً ليست ملقعة شاي، و معنى هذا أنها عضو لذاتها أي أن الفئة تكون أحياناً عضواً لذاتها و أحياناً أخرى لا تكون عضواً لذاتها (حمود، فلسفة اللغة عند لودفيغ فيتغنشتاين، أطروحة دكتوراه دولة في الفلسفة، ٢٠٠٧-٢٠٠٨، صفحة ٢١٤). و في هذا الإطار يندرج مثال الفهارس المشهور.

و لتوضيح هذه المفارقة بطريقة رياضية نلجأ إلى افتراض أن هناك فئة كل الفئات التي ليست أعضاء في ذواتها و نرمز لها بـ (أ) و عندئذ لدينا :

$$(١) (س) / (س \in أ) = - (س \in س) \text{ و بوضع أ مكان (س) نحصل على ما يلي:}$$

$$(٢) (أ \in أ) = - (أ \in أ) \text{ و هذا تناقض (متى، ١٩٨٣، صفحة ٦٥).}$$

وجدير بالذكر أن راسل يكون قد وضع هذا التناقض في عبارة مضبوطة بدلالة المحمولات أي صورة المحمول الذي لا يقبل الحمل على نفسه فإذا سلمنا أن ما لا يقبل الحمل على نفسه هو محمول يترتب على ذلك أن الغرض بأن هذا المحمول إما أن يقبل الحمل على نفسه أو لا يقبل و النتيجة في هذه الحالة واضحة، و هي أن ما لا يقبل الحمل على نفسه ليس محمولا (بيرتراند، صفحة ١٧٥).

و على هذا الأساس إذا كانت هناك مجموعات تشتمل على نفسها و أخرى لا تشتمل على ذاتها فكذلك يوجد نوعان من الصفات: صفات تحمل على نفسها و مثالها الصفة " مجردة " هي نفسها مجردة و الصفة " معقول " هي في ذاتها معقول، و صفات لا تحمل على نفسها مثل صفة محسوس ليست ذاتها محسوسة و صفة " دائري " ليست دائرية ... إلخ. و لو تساءل سائل أي النوعين نضع فيه صفة " ما لا يحمل على نفسه " ؟ فإن القول أنها غير قابلة للحمل هو في ذات الوقت حملها على ذاتها و بذلك فهي قابلة للحمل وفي هذا تناقض بعينه (حمود، ١٩٩٥ - ١٩٩٦، صفحة ٢٦١).

و عليه و مما تقدم يمكننا أن ندرك أن هذه النقيضة في الأصل على شاكلة نقيضة الكذاب الشهيرة و هي في أبسط صورها الرجل الكذاب الذي يقول " أنا أكذب " حيث إذا كان يكذب يقول الحقيقة، وإذا قال الحقيقة كان يكذب (Russell, p. ١٩٧).

ج- مقارنة كانتور G. Cantor (١٨٤٥ - ١٩١٨)

تعرف أيضا بمفارقة العدد الأصلي الأكبر، ويتعلق الأمر بتلك المفارقة الشهيرة التي كشف عنها كانتور نفسه في نظرية المجموعات ذاتها المرتبطة بأكبر الأعداد الأصلية سنة ١٨٩٩ - كما سبق ذكره - إلا أن الإعلان الرسمي لها لم يكن إلا في حدود سنة ١٩٣٢. حيث تنص نظرية المجموعات على إمكانية توزيع عناصر مجموعة ما إلى مجموعات جزئية تكون أكبر عدد من عناصر تلك المجموعة (الجابري، صفحة ١٠٠)، فإذا كان لنا مجموعة E مكونة من ثلاثة عناصر على النحو التالي: $E = \{A, B, C\}$. و بما أن عدد عناصر مجموعة جزئية لمجموعة أصلية هو 2^n حيث n هي عدد عناصر المجموعة الأصلية. و من الواضح إلى جانب هذا أن $2^n < n$ ، و عليه يكون عدد عناصر المجموعة الجزئية وتطبيق القانون السابق

مج (ع) هو $2^3 = 8$ كالتالي:

$$E = \{A, B, C\}$$

$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}, \{\emptyset\}$ ، أي أن عدد المجموعات الجزئية ثمانية: ثلاث فئات أحادية، ثلاثة فئات ثنائية، فئة ثلاثية، و فئة خالية. و يمكننا تحليل هذه النتيجة بالقول أن المجموعات الجزئية لمجموعة ما أكبر من عناصر تلك المجموعة، وهذه المجموعات التي يمكن أن توجد تشترك في خاصية واحدة على الأقل هي كونها جميعا مجموعات جزئية، و اشتراكها في هذه الخاصية يسمح لنا باعتبارها عناصر لمجموعة تضمها جميعا هي مجموعة جميع المجموعات - و التي أشار إليها راسل بل هي أساس مفارقتها، ومنه ندرك أن كانتور يكون قد أدرك هذه المفارقة و وقع فيها قبل أن يكشفها راسل رسميا - ثم إن مجموعة جميع العناصر يمكن توزيعها حسب القاعدة السابقة إلى مجموعات جزئية تكون أكثر عدد من عناصر هذه المجموعة و بهذا يكون عدد الفئات أو المجموعات أكبر من عدد الأعضاء التي تتألف منها بالرغم من أننا نميل فطريا إلى الظن أن فئة كل الأشياء في العالم تحتوي عددا من الأعضاء مساو لما يمكن أن تحتوي عليه أية من الأعضاء، بحيث تنقاد بفعل الاعتقاد إلى أنه لا يمكن أن نحصل على فئة أكبر من فئة كل الأشياء الموجودة في العالم ليتبين لنا العكس في أن المجموع الكلي للأشياء في العام ليس العدد الأكبر مطلقا، و عليه فلا وجود لعدد أصلي أكبر لأنه أمكن تأليف ٨ فئات من ٣ أفراد و ٢٥٦ فئات من ثمانية فئات أفراد وهكذا...

و لراسل كبير الفضل في تقريب هذا التناقض الذي كشف عن كانتور إلى أذهان الناس في كتابه فلسفتي كيف تطورت بقوله " إفرض أن مضيفك قد خيرك في نهاية الطعام بين ثلاثة أنواع من الحلوى و دعاك لتناول نوع أو نوعين أو لتناول الثلاثة جميعها، حسب مشيئتكم فكم طريقة من طرق التصرف أمامكم؟ إنك قد ترفض الأنواع جميعها و هذا اختيار واحد، وقد تأخذ منها نوعا واحدا، وهذا ممكن على أنحاء ثلاثة، ومن ثم يتيح لك هذا ثلاثة اختيارات أيضا، و قد تختار اثنين من بينها و هذا أيضا على أنحاء ثلاث. أو أنك تختار الثلاثة جميعها و هذا يتيح لك إمكانية واحدة نهائية وبذلك مجموع الاختيارات الممكنة ثمانية " (راسل، ١٩٨٠، صفحة ٩٦).

أي أن المجموع الكلي للاختيارات هو $2^3 = 8$ (مهران، ١٩٧٩، صفحة ٢٧٢).

و المتمعن في هذه الثغرة التي كشفها كانتور في نظريته يتوصل إلى إدراك محتوى المفارقة التي تنص عليها و هي أن الجزء أكبر من الكل في تعارض جلي بين البديهية التقليدية القائلة بأن الكل أكبر من الجزء - و التي لم تعد صحيحة إلا مع الأعداد المتناهية أما اللامتناهية فإن الصورة تقلب رأساً على عقب و باعتبار كانتور من أبرز الرياضيين الذين كان لهم شأن واسعاً و هاماً في دراسة اللامتناهية فقد كان من الطبيعي وصوله إلى هذه المفارقة على اعتباره - اللامتناهي -، قد أثار تساؤلات عديدة عند الرياضيين وفلاسفة الرياضة على حد سواء مما أدى إلى الوقوع في مفارقات مختلفة في الصياغة بالرغم من أنها تصب كلها في قالب واحد و من بين هذه التساؤلات هل يمكن للامتناهي أن يكون أكبر من لا متناهي آخر؟ و هل جزء من لامتناهي هو ذاته لا متناه ؟ وهذا السؤال الأخير يطرح مفارقة تكمن في أن الجزء إذا كان لا متناه فهو ليس جزء و إذا كان متناه فهو ليس لا متناه (Sinaceur, ١٩٩٤, p. ٩٠٤).

وعليه وعود على بدء يمكننا بناء على التحليل السالف الذكر القول أن اليقين الرياضي بدأ يتزعزع منذ أن تسرب الشك الى صحة المبادئ والأسس التي قامت عليها الرياضيات، خاصة بعد ظهور الهندسات اللاإقليدية واكتشاف الدوال المنفصلة المناقصة لفكرة الاتصال الهندسي في منتصف القرن ١٩.

وقد انتفض الرياضيون على إثرها للبحث عن أساس جديد للرياضيات غير الهندسة تركز إليه، فالتجها صوب العدد وكانت محاولات جورج كانتور في سياق نظرية المجموعات من الاسهامات الجادة التي حاولت حد بعيد استيعاب مختلف فروع الرياضيات، وبالرغم من ظهور مختلف المفارقات في نظرية المجموعات والتي كانت في جوهرها متعلقة بالمجموعات اللامتناهية فإن نزعات مختلفة حاولت حلها كالنزعة المنطقية والحديثة والاكسسوماتيكية كل من منطلقها ومنتهاهها لتؤكد في نهاية المطاف أن كل الأبحاث التي تتعلق بالرياضيات ومسألة اليقين فيها تسعى إلى اكتشاف آفاق جديدة تؤمن بالقدرة الإبداعية للعقل البشري في كل زمان ومكان وهو الذي يجعلها محل جدال ونقاش مستفيض لا يلبث أن يركن .. فيتجدد باستمرار.

قائمة المراجع

بالعربية

- عبد الرحمان الأخضرري. (٢٠٠٥). مبادئ علم المنطق. دمشق: منار للنشر و التوزيع.
- ابراهيم، إبراهيم. مصطفى (s.d.). في فلسفة العلوم. الإسكندرية: دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر والتوزيع.
- أندري لالاند. (٢٠٠١). موسوعة لالاند الفلسفية، ج ٢، ترجمة خليل أحمد خليل. بيروت: منشورات عويدات.
- برنارد راسل. (١٩٨٠). فلسفتي كيف تطورت، ترجمة محمد مرسى محمد. القاهرة: مؤسسة سجل العرب.
- بلانشي، روبر. (٢٠٠٤). نظرية العلم (الاسيمولوجيا)، ترجمة محمود يعقوبي. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- بوانكريه، هنري. (٢٠٠٢). العلم و الفرضية، ترجمة حمادي بن جاد الله. بيروت: المنظمة العربية للترجمة.

- بيرتراند، راسل. أصول الرياضيات، أصول الرياضيات، ج٢، ترجمة محمد مرسى أحمد، مراجعة فؤاد الأهواني. مصر: دار المعارف.
- حمود، جمال. (١٩٩٥-١٩٩٦). فلسفة اللغة عند لودفيغ فيتغنشتاين ، أطروحة دكتوراه دولة في الفلسفة. الجزائر: قسم الفلسفة جامعة قسنطينة.
- حمود، جمال. (٢٠٠٧-٢٠٠٨). فلسفة اللغة عند لودفيغ فيتغنشتاين ، أطروحة دكتوراه دولة في الفلسفة. الجزائر: قسم الفلسفة جامعة قسنطينة.
- ديكرات، رينيه. (١٩٨٥). مقال عن المنهج، ترجمة محمود محمد الخضير، مراجعة و تقديم محمد مصطفى حلمي. القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب.
- راسل، برتراند. (١٩٦٢). مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسى أحمد. القاهرة: مؤسسة سجل العرب.
- زيدان، محمد. فهمي. (١٩٧١). أزمة اليقين في الرياضيات و المنطق ، مجلة الفكر المعاصر (٧٩).
- سليمة، جراح. (٢٠٠٥). التصور الحديث لمنطق أرسطو "مشكلة مبدأ الثالث المرفوع . الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون.
- الصديقي، عبد الله. يوسف. (١٩٩٩). مسألة الالتهام في الرياضيات، نظرية جورج كانتور. عمان: دار الشروق للنشر و التوزيع.
- صلاح محمود عثمان محمد. (بلا تاريخ). الاتصال و اللاتناهي بين العلم و الفلسفة.
- صليبا، جميل. المنطق، مكتبة الفكر الجامعي. بيروت: منشورات عويدات.
- عوض، عادل. (٢٠٠٦). منطق النظرية العلمية المعاصرة. الاسكندرية: دار الوفاء لنيا الطباعة و النشر.
- فرنان، روني. (٢٠٠٦). مدخل إلى فلسفة المنطق، ترجمة محمود اليعقوبي. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- الفندي، محمد. ثابت. (١٩٩٦). فلسفة العلوم و مناهجها. الإسكندرية: دار المعرفة الجامعية.
- كانط، د. (١٩٦٨). مقدمة لكل ميتافيزيقيا مقبلة، ترجمة نازلي اسماعيل حسين، مراجعة عبد الرحمان بدوي. القاهرة: دار الكتاب العربي للطباعة و النشر.
- متى، كريم. (١٩٨٣). المنطق الرياضي. بيروت: مؤسسة الرسالة.
- محمد ثابت الفندي. (١٩٦٩). فلسفة الرياضة. لبنان: دار النهضة العربية بيروت.
- محمد عابد الجابري. تطور الفكر الرياضي و العقلانية المعاصرة. بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية.
- محمد محمد قاسم. (١٩٩١). نظريات المنطق الرمزي، بحث في الحساب التحليلي و المصطلح. الإسكندرية: دار المعرفة الجامعية.
- مهران، محمد. (١٩٧٩). فلسفة برتراند راسل. القاهرة: دار المعارف.
- موي، بول. (s.d.). المنطق و فلسفة العلوم، ترجمة فؤاد زكرياء. الاسكندرية: دار الوفاء لدنيا الطباعة و النشر.

- Belna, J. p. (٢٠٠٠). Cantor. Paris: les belles lettres.
- Boll, M. (s.d.). Les deux infini. Paris: Larousse.
- Cline, M. (s.d.). Les fondements des mathématique. revue La Recherche(٥٤).
- Cohen, G. (s.d.). Logique et théorie des ensembles. revue la logique(١٥).
- Cousquer, E. (s.d.). : L'infini en mathématique. Consulté le ٢٠ ١٢, ٢٠٢١, sur <http://médiamantsfr/pdf/infini>
- Darbon, A. (١٩٤٩). la philosophie des mathématiques. Paris: P.U.F.
- Encyclopédie. (١٩٩٩). Encarta. Paris: microsoft.
- Lalande, A. (١٩٦٨). vocabulaire technique et critique de la philosophie. Paris: presses universitaire de France.
- Mary Bartholy, J. p., & Gerard , p. (١٩٧٨). La science : epistémologie générale. paris: édition maynard.
- Mashaal, M. (٢٠٠٠). la Thiorie des ensembles. Revue pour la science(٢).
- Reichenbach, H. (١٩٨٥). The philosophy of space and time, translated by a Marie Reichenbach and John Freund Dover. New York, : publication Inc New York, .
- Russell, B. (s.d.). Essay in analysis. USA: Library of Congress catalogue .
- Sinaceur, H. (١٩٩٤). L'infini. revue la recherche(٢٦٨).

ويغرافيا:

- ٢٠٢١/٠١/٢٠ ولیم تاووضروس: . (بلا تاریخ). كانتور اللانهاية و الإنسان. تاريخ الاسترداد ٢٠ ٠١، ٢٠٢١،

من <http://h.com/math١٠.html>