

من فلسفة الرياضيات المعاصرة

د. الأخضر شريط

جامعة الجزائر

الملخص

إن الغرض من هذا البحث هو الوقوف على جانب من جوانب فلسفة الرياضيات المعاصرة، من خلال تتبع علاقتها بالمنطق. وإبراز العلاقة هذه من الطرح الذي قدمته المدرسة البنائية ممثلة في هنري بوانكاريه « Henri Poincaré » في هذا الشأن. وكيف أنها جعلت الرياضيات تتأسس على فكرة البرهان الرياضي. الشيء الذي تنفيه المدرسة المنطقانية ممثلة في الطرح الذي قدمه برتراند راسل Bertrand Russelle "من خلال اعتباره الرياضيات تتأسس على مايسميه بالرياضة البحتة: أي المنطق. ومنه فإن "بديهية الرد" تقوم مقام البرهان بالتراجع Démonstration Par Reccurence. وهي وليدة ما عرف عند راسل بنظرية الأنماط المنطقية. « La théorie des types logiques. ومن هنا يمكن حصر الإشكالية التي نود معالجتها في التالي: ماهي العلاقة التي تربط المنطق بالرياضيات وأي من هما مؤسس للآخر؟

للإجابة على هذا التساؤل سوف نتبع الخطوات التالية :

- في مفهوم فلسفة الرياضيات النشأة والتطور.
- في العلاقة بين الرياضيات والمنطق.
- عرض وتحليل موقف المدرسة البنائية في الرياضيات (موقف هنري بوانكاريه).
- عرض وتحليل موقف المدرسة المنطقانية (موقف برتراند راسل).
- خلاصة تركيبية.

في مفهوم فلسفة الرياضيات النشأة والتطور.

إن التساؤل عن الأسس التي تقوم عليها الرياضيات، وما إذا كانت أسسا صحيحة أم غير صحيحة هو من صميم فلسفة الرياضيات. والتي هي فرع من فروع وتخصص من تخصصات فلسفة العلوم. كما أن فلسفة الرياضيات هي تلك البحوث التي اهتمت بتطور الرياضيات على مراحل تاريخية. محاولة منها لإيجاد حلول للعراقيل وللأزمة التي انتابتها عبر هذه المراحل. هذا بخصوص المفهوم والميدان. أما بخصوص النشأة والتطور فيمكن إيجاز مايلي:

لقد كان لنتيجة المواقف الفلسفية اليونانية على اختلافها توقف تطور الرياضيات لما لا يقل عن 10 قرون.

فالفيثاغوريون كان لمفهوم العدد لديهم أثر، هو نقض مفهوم العدد الأصم أو العدد اللأعقلي كما نسميه أو كما يحلو للبعض تسميته، فإن $2\sqrt{2}$ ليس لها ليس حل لديهم لأسباب سنوافيها الحق في المعالجة حين يحين أوانها.

كما كان للرياضيات عند أفلاطون موقف فلسفي، إذ أن الأعداد المتعالية Les nombres transcendants كفكرة باتت تتأرجح بين عالم المثل، وعالم الحس، فلا هي أعداد تجريدية، ولا هي أعداد تشخيصية، بل هي أعداد متعالية. إن هذا التفسير من أفلاطون كان بمثابة حجر عثرة في تطور الرياضيات لأن فكرة العدد المتعالي فكرة فلسفية أكثر منها رياضية. بمعنى أنها فكرة كان يمكنها أن تقبل تفسيراً أحادياً للأشياء ألا وهو التفسير الأفلاطوني.

ولقد كان لمحاولة أرسطو الناقد لأستاذه أفلاطون في فكرة الأعداد المتعالية أثر وخيم أيضاً، فلقد عالج الكي بالكي (الفكرة بالفكرة) الموقف الفلسفي بموقف فلسفي مغاير له، ولكنه موقف.

فأرسطو الذي بنى الرياضيات وخاصة نظرية العدد "Théorie du nombre" على فكرة العدد المجرد، وأن هذا الأخير هو المفهوم المجرد، وهو موقف فلسفي. وإن فكرة الفصل بين العدد والشكل الهندسي (الفصل بين الهندسة والحساب) عند اليونان وعند غيرهم في حضارات ما قبل الإسلام أدى إلى توقف الرياضيات إلى ما لا يقل عن 10 قرون كما قلنا.

ولقد كان لظهور المفهوم التصوري "Concept formel" دفع لتطور الرياضيات، فبما ترى كيف كان ذلك ؟ هذا ما سنحاول أن نتعرف عليه مع النقطة الموالية في البرهان التاريخي على أن أسس الرياضيات أصيبت أكثر من مرة بهزات، طالما صُححت وعولجت عبر التاريخ، وسنتعرف على هذا التصحيح من تناولنا لحقبة تاريخية أخرى ألا وهي الرياضيات عند المسلمين.

* الأعداد المتعالية Les nombres transcendants: إن هذه الأعداد كانت عند أفلاطون وهي أعداداً ما ورائية أي أنها لم تمر على محك تجربة وبالتالي فهي غير علمية، فهي مثالية.

* المفهوم التصوري Concept formel: إن هذا المفهوم الذي هو الصورة الذهنية المجردة عن الأشياء، وهو معنى كلي، كان مفهوماً دينياً مع المسلمين. فطبقوه على العلوم ومنها الرياضية.

يمكن القول أن الرياضيات مع المسلمين عرفت دفعة تطويرية هائلة، وهي بهذا تكون قد تحرّرت من الحصر الذي فرضته الفلسفة اليونانية بجعل مفهوم العدد محصوراً في مفهوم العدد الطبيعي فقط المبني على التجربة وكخلاصة في هذا المجال يمكن قول مايلي :

- ساهم الرياضيون العرب في ظهور مجموعة العدد الحقيقي (Nombre réel).

- كان لهم الفضل في إيجاد مخرج لما يعرف بالعدد الأصم (Nombre irrationnel).

بابتكار حل جديد للعدد الأصم.

- كان مفهوم الصفر عند العرب تصوراً جديداً واكتشافاً رائعاً ساهم في تطوير الرياضيات.

- جعل العرب من العدد والشكل الهندسي التقاء : إذ خدم العدد الشكل الهندسي كما أن

الشكل الهندسي خدم العدد.

- في حساب المثلثات أقام العرب علم المثلثات بالطريقة الجديدة التي توصلوا بها إلى إيجاد ما

يعرف اليوم بالمماس

- مهّد العرب لظهور الهندسة التحليلية قبل ديكارت بما لا يقل عن ثمانية قرون بحيث

أصبح من الممكن التعبير عن معادلات رياضية جبرية بالأشكال الهندسية.

وكخلاصة لمفهوم وتطور الرياضيات يمكن القول أن هذه الأخيرة قد اعترضت مسيرة

تطورها أزمة لا نرى داعياً لتتبع مسيرة هذه الأزمة الطويلة وفقط نكتفي في هذا البحث المتواضع

بالإشارة إلى الصعوبات التي واجهت الرياضيين وبالأخص في نظرية المجموعات، وبخصوص مفهوم

اللانهاية، ومفهوم الأعداد ما بعد النهاية، مفهوم مبدأ الثالث المرفوع، وظهور مجموعة المفارقات.

كما أننا نشير إلى أن تطور الرياضيات وفلسفة الرياضيات هو الآخر اعترضته أزمة. فمع

الفيثاغوريين وموقفهم من الرياضيات (كانت بداية الأزمة)، ومع المواقف الفلسفية لكل من أفلاطون

وأرسطو (كانت الأزمة قد تعمقت أكثر) ، رغم محاولة ديوفانتس، كما أن الشاهد أيضاً من

التاريخ على أن فلسفة الرياضيات وجدت حلاً لها عند اكتشاف المفهوم التصوري مع الحضارة

الإسلامية، والتي من المعروف أنها قد مهّدت لعدة أشياء رياضية حدثت مع عصر النهضة الأوروبي

وعلى الخصوص مع ديكارت والرياضيين الذين جاؤوا بعده.

في العلاقة بين الرياضيات والمنطق.

عرض وتحليل موقف المدرسة البنائية في الرياضيات (موقف هنري بوانكاريه).

إذا كان مفهوم البرهان بالتراجع استعمال رياضي بحث فما هي مكانته كاستعمال

منطقي؟ وهل بالإمكان إقامته كذلك؟ وهو الشيء الذي سوف نستعين فيه، عندما نتعرض لمقارنته

ببديهية الرد التي قال بها راسل، ويتضح أكثر مفهوم البرهان بالتراجع عندما نعرض أوجه النقد

التي تعرّض لبوانكاريه إليها وخصوصاً من خصمه راسل. وكذلك يحدث الشيء نفس لما يعرض راسل

لما يسميه بديهية الرد، وتعرض هذه الأخيرة للنقد من طرف بوانكاريه؛ ومن نقد الطرحين: أي طرح بديهية الرد وطرح البرهان بالتراجع، نخلص إلى نتائج تخص المقارنة بين المفهومين، وبين أبعاد هذين المفهومين. ذلك إذا هو الهدف المبتغى من وراء عرض مفهوم البرهان بالتراجع في هذا البحث.

بديهية الرد والبرهان بالتراجع من خلال وجهة نظر بوانكاريه

إن بديهية الرد حسب بوانكاريه لا تمثل شيئا أمام قوة البرهان بالتراجع وذلك لعدة اعتبارات، ولكن إذا كانت كذلك فهل وفق بوانكاريه في نقده لبديهية الرد التي جاء بها راسل؟ ذلك ما سنتناوله في هذه النقطة، والتي سنركز فيها على النقد الذي قدمه بوانكاريه والذي جاء في (مجلة الميتافيزيقا والأخلاق 1909) وهو عبارة عن محاولة من بوانكاريه في هذا الميدان.

بداية يتنكر لهذا الجديد الذي جاء به راسل ألا وهو بديهية الرد فيقول عنها أنها بديهية جديدة، ومع مطلع المقال يُقر بوانكاريه ويعترف أنه غير واثق من فهم فكرته جيدا، ولذلك فإنه يُفضل أن يترك لراسل الكلمة والتي يقول فيها هذا الأخير "نحن نفترض أن كل دالة مساوية في كل قيمتها لدالة محمولة ذات البرهان نفسه"، وحتى نفهم هذا الإقرار أو الإثبات يجب أن نعود للتعريف المقدمة في بداية المذكرة. ويتساءل عن ما معنى الدالة؟ وما معنى الدالة الحملية. (fonction prédicative)؟، فإذا أثبتت قضية بالنسبة لشيء غير معني (س) فهي دالة قضاوية (propositionnelle) لـ (س) (1).

ويرى بوانكاريه أن القضية هذه ستكون من درجة معينة في هرمية الأنماط، ولن تكون هذه الدرجة هي نفسها مهما كان س مادامت مترتبة عن درجة س، فعندئذ ستسمى الدالة المحمولة (prédicative) إذا كانت من الدرجة ك+1 لما يكون س من الدرجة ك. وحتى بعد هذه التعاريف فإن بوانكاريه يعترف أن هذه البديهية لم يعد معناها واضحا، ولذلك فإن بعض الأمثلة سوف لن تكون دون جدوى.

ويرى بوانكاريه أن السيد راسل لم يقدمها وهو لذلك يتردد في تقديمها من عنده خشية تشويه فكرته، التي لم يتأكد من فهمها جيدا، لكن بوانكاريه يعود ليرى أنه ورغم فهمه لها "هناك شيء لا أشك فيه وهو وجود أن هنالك بديهية جديدة، ويأمل بعدها أنه يكون قادرا على برهنة مبدأ الاستقراء الرياضي (induction mathématique). ثم يردف قائلا "وأنا أقل ميلا إلى الشك في إمكانية تحقيق هذا طالما أنني أضن أن هذه البديهية ما هي إلا شكل آخر للمبدأ نفسه" (2).

ويعقب بوانكاريه أو يعلق تعليقا على الزعم الذي كان سائدا من أن هناك من كان يقول أنني أبرهن مصادرة* إقليدس مرتكزا على إحدى نتائجها، ومعتبرا أن هذه النتيجة كحقيقة مؤكدة

(1) Poincaré (Henri), L'axiome de réductibilité, RMM, T, XVII (N°4-1909) Librairie Armand colin, Paris, P.469.

(2) Ibid, p.469.

* مصادرة: postulat: قضية يطلب التصديق بها لحاجة العقل إليها في الاستدلال، وربما سميت المصادرات "أوضاع" أو

من تلقاء نفسها، ليتساءل عما جنوه أو ربحوه؟ ليقول "فهذه الحقيقة مهما كانت مؤكدة أو جلية، فهل هي أكثر جلاء أو وضوحاً من المصادرة (postulat) نفسها؟".

وحسبه فنحن لا نجني شيئاً بخصوص عدد المصادرات فهل نجني شيئاً على الأقل بخصوص النوعية؟ بما ذا تتفوق البديهية الجديدة على مبدأ الاستقراء (principe d'induction)؟

(1) هل هي جديدة بصياغة أبسط وأوضح؟ هذا شيء ممكن لأن الذي يقدمه راسل لنا قابل دون شك للتحسين، لكن هذا أمر غير محتمل أو غير مرجح (1).

في هذا التساؤل الأول يريد بوانكاريه أن يقول أن البديهية الجديدة التي جاء بها راسل غامضة أو في منتهى الغموض، وبأسلوب تهكمي كأنه يرجو من راسل أن يوضحها وييسّطها أكثر، حتى تكون في منتهى الوضوح ومنتهى البساطة، إذاً بديهية الرد حسب بوانكاريه غامضة شكلاً ومضموناً، ثم بعد هذا يطرح التساؤل الثاني وهو:

(2) هل أن بديهية الرد أكثر عمومية من مبدأ الاستقراء؟ بحيث لا يمكن برهنة هذه البديهية انطلاقاً من هذا المبدأ.

إن هذا التساؤل الثاني يقيمه بوانكاريه ليتقصى حقيقة مبدأ هام في البرهان وهو مبدأ التعميم؛ فإذا كان المبدأ يحقق العمومية، فذلك من خصائصه، ولكن إذا لم تكن بديهية الرد محققة لهذا المبدأ، وأن مبدأ الاستقراء يحققه، فلماذا نترك الأصح ونتشبث بالواهي، وتعلق أنه جديد (إن هذا المعيار الذي يتساءل فيه بوانكاريه معيار علمي، بمعنى أيضاً إنه يتساءل عن جوهر البرهان) وأما التساؤل الثالث فهو كالتالي.

(3) هل أن استعمال هذه البديهية أقل عمومية ظاهرياً من المبدأ (أي مبدأ الاستقراء) بحيث لا ندرك مباشرة أنا الثاني محتوي في الأول، رغم أن الأمر كذلك؟

إن هذا التساؤل أيضاً جوهرى بحيث يمس جوهر هذه البديهية فيتساءل بوانكاريه إذا كانت لا تحقق العمومية مظهرياً، فهل معنى هذا أنها في صلبها هي محتواه في المبدأ أي مبدأ الاستقراء؟ ثم يعود عن هذا التساؤل ولا ينفي أن تكون البديهية أي بديهية الرد محتواه في المبدأ ثم ينتقل بنا بوانكاريه إلى التساؤل الرابع وهو:

(4) هل استعمال هذه البديهية أكثر تطابقاً للنزاعات الطبيعية لعقلنا؟ وهل يمكن تبريرها نفسياً؟ وإن هذا التساؤل الرابع هو أيضاً تساؤل لا يخلو من التهكمية، إن بوانكاريه يسخر هذه المرة من راسل، ليرى أنه إذا لم تكن تحقق أو تجيب (أي بديهية الرد) على كل التساؤلات السابقة، فما يبقى لها

"أصول موضوعة" والفرق بينهما هو من جهة قوة الإقناع، قال ابن سينا: "فما كان من الأوضاع" يتسلمه المتعلم من غير أن يكون في نفسه له عناد، سمي "أصلاً موضوعاً" على الإطلاق. وما يتسلمه مسامعاً، وفي نفسه له عناد "سمي" "مصادرة" علماً أن ابن سينا يجعل مصادرة "أقليدس" مثلاً من جملة الأصول الموضوعة. فالمصادرات مرادفة للأوضاع والمسلمات ويمكن أن تسمى أيضاً بالموضوعات أو بالأصول الموضوعة.

(1) Ibid, p.469.

سوى أنها، قد تحقق رغبة طبيعية وهي أنها تتلاءم مع طبيعة عقولنا، ومع أيضا رغباتنا النفسية ويكتفي بوانكاريه بطرح هذه التساؤلات، إذ تنقصه المعطيات للإجابة عنها كونه لم يتوصل حتى إلى الفهم الكامل لمعنى هذه البديهية لكنه يعود ليقول: "وإن لم يسعني أن أدرك هذا المعنى كلية على ضوء المعلومات الموجزة المقدمة من طرف السيد راسل، يمكنني على الأقل إبداء بعض التخمينات"⁽¹⁾، والتخمينات التي يبيدها تكون كالتالي: يقول "هاهي قضية مثل تعريف العدد الصحيح، فالعدد الصحيح النهائي عدد ينتمي لكل الفئات التراجعية (Classes récurrentes) هذه القضية لا معنى لها في حد ذاتها، ولن تكتسب معنى إلا إذا أوضحنا ترتيب فئات التراجع التي نتحدث عنها، ولحسن الحظ يحدث ما يلي: كل صحيح من الدرجة الثانية هو بالأحرى صحيح من الدرجة الأولى كونه ينتمي لكل فئات التراجع للدرجتين الأولى، وبالتالي لكل الفئات من الدرجة الأولى، مثلما يكون كل عدد صحيح من الدرجة الكافية (Ke) بالأحرى صحيحاً من الدرجة ك - الدرجة الأولى. وهكذا يؤدي بنا الأمر إلى تحديد سلسلة فئات تزداد ضيقاً أكثر فأكثر، أعداداً صحيحة من الدرجة الأولى والدرجة الثانية.... من الدرجة النونية (ne) والتي كل واحدة منها تحتوي في سابقتها⁽²⁾.

وبعد هذا التخمين الأول الذي يبيده بوانكاريه يضيف: اسمي عدداً صحيحاً من الدرجة □ كل عدد ينتمي لكل هذه الفئات في آن واحد. وسيكون لهذا التعريف للعدد الصحيح من الدرجة □ معنى، ويمكن أن نعتبر هذا التعريف كمساواة للتعريف المقدم أولاً للعدد الصحيح الذي لم يكن عنده تعريف.

ثم بعد هذا يتساءل بوانكاريه: هل هذا تطبيق صحيح لبديهية الرد كما يعنيه السيد راسل؟ لا أقدم هذا المثال إلا على مضض. ومع هذا فلنرض به ولنعدّل النظرية المراد برهنتها بخصوص مجموع عددين صحيحين لقد أثبتنا يقول بوانكاريه أن مجموع صحيحان من الدرجة الكافية (Ke) صحيحين من الدرجة □، وبودنا أم نستخلص أنه إذا كان س و ن صحيحين من الدرجة □ فإن المجموع ن+س هو أيضاً صحيح من الدرجة □.

وبالفعل فإنه يكفي لهذا أن نثبت أنه صحيح من الدرجة ك مهما كان ك كبيراً. إلا أنه إذا كان ن و س صحيحين من الدرجة □، سيكونان بالأحرى صحيحين من الدرجة ك+1، وبالتالي فإنه بمقتضى النظرية القائمة سلفاً، ن+س صحيح من الدرجة ك... وهذا ما كان يجب برهانه⁽¹⁾ وهو مطلوب.

وبعد هذا العرض للفكرة، إن بوانكاريه يخامره شك في الطريقة التي يمكننا أن نخدم بها لبديهية السيد راسل؟ ثم يجيب: أدرك جيداً أنها ليست هذه هي تماماً، وإن السيد راسل قد يعطي للتفكير شكلاً آخر إلا أن الأساس سيبقى هو هو.

(1)Ibid, p.471.

(2)Ibid, p.472.

(1)Ibid, p.471.

ثم إن بوانكاريه يبدي رأيه في أنه ليس من صلاحيته أن يناقش هذا النمط من البرهان ويرى بأنه سيكتفي في الوقت الحاضر بالملاحظات التالية:

يذكر بوانكاريه أولاً أنه اضطر إلى إدخال مفهوم الأشياء من الدرجة $\square$ إلى جانب مفهوم الأشياء من الدرجة النونية (ne)، ويعتقد أنه نجح فيما يخص الأعداد الصحيحة أن يُعرّف أو أن يحدد هذا المفهوم الجديد. (أي مفهوم بديهية الرد). غير أن بوانكاريه يرى بأن استخدام هذه المفاهيم لا يفيد دائماً أو قد لا ينجح دائماً، ويأتي بمثال على ذلك ألا وهو مثال الكريتي الكذاب (l'épiménide) ليقول بأن هذا لا يصح إطلاقاً، إذ في رأيه أن ما ضمن النجاح هو الطرف الآتي:

فالتصنيف المدروس لم يكن حملياً* (prédicatif) وأدت إضافة عناصر جديدة إلى تغيير ترتيب العناصر التي أدخلت ورُقبت أو صُنفت فيما سبق. إلا أن هذا التغيير لم يكن ممكناً إلا في اتجاه واحد، كان بالإمكان أن نكون مجبرين على تحويل أو نقل أشياء من الفئة أ، إلى الفئة ب، (أي من فئة الأعداد الصحيحة إلى فئة الأعداد الغير الصحيحة)، ولكن لأبدأ من الفئة ب إلى الفئة أ، فالأمر يستلزم - حسب بوانكاريه - ميثاقاً أو اتفاقاً جديداً لتعريف أو لتحديد أشياء من الدرجة $\square$ في الحالات التي قد تستوجب أن يجري هذا التغيير أحياناً في اتجاه، وأحياناً أخرى في اتجاه آخر (2).

وثانياً يذكر بوانكاريه أن تعريف الأعداد الصحيحة من الدرجة $\square$ ليس هو ذاته في حالة الأعداد الصحيحة من الدرجة ك، كون ك عدد نهائي (fini). والأعداد الصحيحة نعرفها عن طريق البرهان بالتراجع (par récurrence) باستنتاج مفهوم العدد الصحيح من الدرجة ك من مفهوم العدد الصحيح من الدرجة ك-1، نعرف الأعداد الصحيحة من الدرجة $\square$ بمحاذاة الحد، بإخضاع هذا المفهوم الجديد لمجموعة غير محدودة من مفاهيم سابقة، أعني مفاهيم الأعداد الصحيحة لكل الدرجات المنتهية (finis). ويذكر بوانكاريه أن التعريفين قد يكونان غير مفهومين بالنسبة لمن قد لا يعرف سلفاً ما معنى عدد متناهي (finis) فهماً - كما يقول بوانكاريه - يفترضان تمييز الأعداد المنتهية والأعداد اللانهائية فليس على أساسهما الذي نأمل أن تؤسس هذا التمييز.

هذا هو نقد بوانكاريه لبديهية الرد، وإن هذا النقد سوف يقابله رد آخر من برتراند راسل، وهو ما سوف نتبعه في البند أو مع النقطة الموالية.

رد راسل على انتقادات بوانكاريه بخصوص بديهية الرد:

الحقيقة أن الرد جاء به راسل على الانتقادات التي وجهها بوانكاريه لما أسماه آنذاك بالبديهية الجديدة (أي بديهية الرد)، والتي رأى كما مر معنا في البند السالف أن هذه البديهية هي في نهاية المطاف ليست سوى خطر على الرياضيات لما اتسمت به من منطقة حتى العلاقات الرياضية أي العلاقات التي يسميها راسل بالثوابت المنطقية - إنما جاء هذا الرد في مقال لراسل بين فيه

* حملي: prédicatif: صفة حكم أو قضية بنسب فيها محمول إلى موضوع

(2)Ibid, p.472.

فعاليات الملتقى الوطني لتعليمية الرياضيات في المدرسة والجامعة ————— 03 / 04 / 2009 ماي 2009

الأهمية الفلسفية للمنطقانية والذي كان عبارة عن محاضرة أقيمت يوم 22 مارس عام 1911 بمدرسة الدراسات الاجتماعية العليا، والذي نشر بمجلة الميتافيزيقا والأخلاق (الجزء التاسع عشر رقم 3 1911)، والذي حاول فيه أن يبين الأهمية الفلسفية للمنطقانية. (للعلم أن هذه المحاضرة جاءت كتعليل على الانتقادات التي وجهها له بوانكاريه بخصوص الفكرة التي جاء بها راسل عن نظرية الأنماط.

وارتأينا كباحثين أن نعرض ما جاء في هذه المحاضرة بما يناسب موضوع بحثنا ونعلق عليها من حين لآخر.

بداية يعتذر راسل عن أنه لربما لن يتمكن من إيصال فكرته للحاضرين بسبب مشكلة اللغة ولأن الموضوع المتناول واسع جداً، حيث لن يتمكن من التركيز على عمق أفكاره نظراً لتوسعه الهائل ثم يواصل قائلاً "عند حديثي عن المنطق الرياضي بودي استعمال هذه العبارة بمعناها الواسع، فأنا أفهم أن أعمال كانتور (Cantor) على العدد اللانهائي، وكذلك أعمال فريجه (Frege)، وأعمال بيانو (Peano) وويرستراس (Weirstrass) هي عملية إخضاع الرياضيات إلى علم الحساب (Arithmétique)؛ وهذا معناه في نظر راسل "نخصوا أو أجملوا كل التحليل في دراسة الأعداد الحقيقية" (1). ومن ذلك كله فإن النتائج التي يمكن التوصل إليها من خلال هذه الأعمال أن المنطق الرياضي (2) أصبح يحمل تعريفاً جديداً من خلال الأعمال التي قام بها هؤلاء عن الرياضيات. وبذلك فإن راسل يرى أن المنطق الرياضي هو كل عمل منطقي يهدف إلى تحليل واستنباط لعلم الحساب، وكذلك للهندسة، بواسطة مفاهيم تنتمي بكل وضوح إلى المنطق. وبناءً على هذا التعريف فإن النقاش سوف يكون - حسب راسل - مهم لدرجة أن المناطق والرياضيين، لم يتمكنوا من التعرف على هذه الأهمية إلا بعد هذه التوضيحات. ومنه فإن عمل المنطق الرياضي يمكن اعتبار ثلاث أشياء فيه:

النتائج الرياضية.

طريقة الاستدلال الرياضي، كما تلخصها الأعمال المعاصرة.

ما تنطوي عليه طبيعة القضايا الرياضية، حسب التحليل الذي أقامه المنطق الرياضي. ويعترف راسل أنه لا يمكن فصل هذه النقاط الثلاثة بعضها عن بعض. وأن الذي يبدوا فصلاً ما هو إلا للضرورة المنهجية، ثم يمكننا أن نعتقد - حسب راسل دائماً - أن الترتيب العكسي قد يكون أفضل، أي أن نبدأ بما تنطوي عليه طبيعة القضايا الرياضية، ثم ما هي طريقة الاستدلال الرياضي اللائقة؟ ثم وأخيراً ما هي النتائج التي يمكن أن نتحصل عليها؟ إلا أن المشكلة المطروحة - في نظر

(1) Russell, (Bertrand) - L'importance philosophique de la logistique - R.M.M, T, XIX (n°3-1911), p.281.

(2) إن رد راسل على بوانكاريه بخصوص انتقادات هذا الأخير لبديهية الرد سوف لن يكون مفصلاً عن الفهم الكلي للمنطق الرياضي، ولذلك كان لابد من هذه النظرة على المنطق الرياضي ككل ثم ندخل في صميم الرد.

راسل - أمامنا على غرار المشاكل الفلسفية الحقيقية هي مشكلة تحليل، وفي مشاكل التحليل نجد أن أفضل طريقة هي تلك التي تنطلق من النتائج وتنتهي إلى المقدمات.

إن أروع النتائج التي أسفرت عليها الطريقة الجديدة من وجهة النظر الفلسفية، هي النظريات الدقيقة التي شكّلت عن اللانهائي (l'infini) المتصل (le continu).

يقول راسل: "نعلم أنه لما يتعلق الأمر بتجميعات لانهائية (collections infinies)، مثلاً تجميع للأعداد الحقيقية النهائية يمكن إقامة مطابقة مقابل نظيري (bi-univoque) ما بين التجميع كله، وجزء من التجميع، فمثلاً تطابق كهذا الموجود ما بين الأعداد الحقيقية النهائية والأعداد الزوجية، ما دامت علاقة عدد نهائي لزوجية هي ثنائية توحيد. بديهي إذاً أن يكون عدد من التجميع اللانهائي مساوياً لعدد من جزء من هذا التجميع" (1).

بعد هذا يرى راسل أننا كنا نعتقد أن هناك تناقضاً. فحتى لايبينتز (Leibniz)، وإن كان من أنصار اللانهائي الحالي - أنكر العدد اللانهائي بسبب هذا التناقض المزعوم.

ويضيف راسل قائلاً: "...كي نشرح الاستقراء التام، فإننا نسمي "خاصية وراثية" لعدد ما، خاصية تنتمي إلى $n+1$ ما دامت تنتمي إلى n هذا هو الحال مثلاً في خاصية أكبر من 100: فإذا كان عدد أكبر من 100 فإن تابعه هو أيضاً يكون أكبر من 100، ويضيف قائلاً: "لنسمي خاصية استقراء لعدد خاصية وراثية يكتسبها العدد صفر، هذه الخاصية عليها أن تنتمي إلى 1 مادام أنها وراثية وتنتمي إلى الصفر، وبالتالي عليها أن تنتمي إلى 2 مادام تنتمي إلى 1، وهكذا دواليك" (2).

هذا المثال الذي يضربه راسل هو من أجل إزالة اللبس عن شيء كان قد سمي تناقضاً، وهو الخاص بالعدد اللانهائي، بحيث - وكما وضع ذلك - فإن العدد اللانهائي، بما له من خاصية وراثية، يمكنه هو الآخر أن ينتمي إلى عدد نهائي والعكس صحيح؛ أي أن العدد النهائي هو الآخر ينتمي إلى العدد اللانهائي، والأمثلة الموضحة تؤكد على أنه من الصفر إلى اللانهائي معناه القول من الصفر إلى الذي يتبعه، وبالعكس من اللانهائي إلى النهائي معناه أيضاً من الصفر إلى ... التابع وهكذا دواليك.

لقد وصل الأمر بكانتور إلى وضع علم الحساب للأعداد اللانهائية، وبواسطة هذا العلم حل بصفة كاملة المسائل القديمة حول طبيعة اللانهائي التي ما كانت تعرقل الفلسفة منذ العصور القديمة (3).

واضح جداً أن العمل الذي قام به كانتور هو عمل جبّار في ميدان علم الحساب (L'arithmétique)؛ فلقد عمل على حل كل المسائل العالقة بالانهائي، وهي هنا إشارة من برتراند راسل لكانتور الذي تمكّن من الرياضة الفلسفية من أجل حل مسائل عويصة طالما كانت تُشوّق

* المتصل: continu: كل لا يتركب من أجزاء فعلية بل ربما تخيلنا فيه الأجزاء من جهة ما هو قابل للقسمة.

** مقابل نظيري: bi-univoque

Ibid, p.282. (1)

Ibid, p.283. (2)

Ibid, p.283. (3)

الفلسفة عامة، وإذن فإن حل المسألة العمومية: أي مسألة العدد اللانهائي، هو تطور ساعد للوصول إلى الفلسفة الرياضية، هذا ما كان يرمي إليه راسل من خلال قوله السابق، حسب ما نعتقد.

ويرى أن مشكلة المتواصل أيضا كانت هي الأخرى على علاقة وطيدة بالعدد اللانهائي، فحسبه، منذ زينون الإيلي والنقائض التي كانت عالقة لديه وصعوبات في تحليل الفضاء والزمن والحركة، تجد نفسها كلها مشروحة بواسطة النظرية المعاصرة للمتواصل.

ولتعميق الفهم يقول راسل "إننا وجدنا نظرية غير متناقضة، من خلالها يتربك الاتصال من عناصر متميزة بشكل لا نهائي بعدد لا نهائي، الشيء الذي كان ذي قبل مستحيلا" (1)، ثم إن مفاهيم اللانهائي والمتصل من الممكن أن تشكل مفاهيم الدالة، والمتغير، وأنها بالتالي من الممكن أن تبرهن. ولتوضيح ذلك فإن راسل يقول بأن البرهان يمكنه أن يكون موضحاً بالمثال التالي:

معروف أن هناك قانونا يقول "كلما تكرر نفس السبب من جديد فإن نفس الأثر متكرر"، ولكن نلاحظ أن نفس السبب لا يتكرر من جديد أبداً، وإن ما يجري فعلاً هو مجرد علاقة ثابتة ما بين أسباب من نوع معين والآثار التي تنتج عنها، فحيثما وجدت هذه العلاقة الثابتة كانت النتيجة (الأثر) دالة العلة (أو السبب)، وبواسطة هذه العلاقة الثابتة نلخص في صيغة واحدة عدداً غير متناه من الأسباب والمسببات (نتائج)، ونتجنب بذلك الفرضية الشائعة القائلة بتكرار نفس السبب.

وفي رأي راسل يمكننا أن نحل بفكرة الرابط الثابت أو بفكرة الدالة هذا النوع من المسائل، وهو الذي يعطي "سلطة للرياضيات كي تعالج تسلسلياً من لا نهائية معطيات" (2).

إن فكرة الدالة أي فكرة العلاقة الثابتة هي التي تفسر سر قدرة الرياضيات على المعالجة الآتية لمعطيات لا نهائية.

وفي رأي راسل كي نفهم فكرة الدالة في الرياضيات، يجب أولاً أن نفهم طريقة الاستنباط الرياضي، فمعروف جداً أن البراهين الرياضية هي دائماً استنباطية، بما فيها تلك التي تنم عن طريق ما سمي بالاستقراء التام، أي أننا من الاستقراء التام نستنبط الأمور الرياضية، وعليه فإن راسل يعتمد أكثر لتوضيح فكرة الدالة على المثال الكلاسيكي، الذي به استدلال استقرائي هذا المثال هو:

كل الناس فاني

سقراط إنسان

سقراط فان

فمعروف أيضاً أننا لو عوضنا سقراط بأرسطو أو أفلاطون، فإن الاستقراء يبقى هو هو، بمعنى أن عمل المتغيرات في العبارات هو غير عمل الروابط التي هي ثوابت، فلو لخصنا العبارة السابقة في ما يلي:

(1) Ibid, p.283.

* هذا القانون هو قانون السببية وسوف يركز عليه راسل لتبيان حقيقة البرهان.

(2) Ibid, p.283.

* المتغير هو ما يقابل ترجمة: La variable

لو أن كل الناس قانون وأن س إنسان، فإن س يكون فان. وهذا التعميم أولي في العبارة التي أخذناها كمثال "... لكن من السهل أن نذهب بعيداً ، فلا شيء يمنع من الناس، والقانون هم الذين يهتموننا، لو أن كل الأعضاء في فئة أ ما هم أعضاء في فئة ب، ولو أن س هو عضو في الفئة أ فإن س هو عضو في الفئة ب" (1).

وعليه، فإننا نقول أننا أمام عبارات رياضية أو بالأحرى منطقية - رياضية، ومنه فإن المنطق الرياضي هو الذي بإمكانه حل هذه المسائل أو تلك التي طالما بقيت عالقة في المثال الذي سبق وإن أوردته راسل، أي مثال العلية الذي هو مبدأ من مبادئ العلوم، أو نقول أنه قانون علمي، فهذا القانون الذي يشكل قاعدة للعلوم، إنما هي قاعدة من نوع آخر نتحاشى فيه التكرارية الافتراضية، ونستعيدهما بالدقة المنطقية، "وعليه فلا بد من قضية لا تحمل ثوابت أخرى غير ثوابت منطقية". لكن راسل يحاول أن يزيل الغبار عن شيء مهم جداً ألا وهو الثابت المنطقي، لأنه الرابط الذي تقوم عليه القضية، فإنه يبدأ في تعريفه وذلك لعدة أمور طالما علقنا بهذا الأساس في كل عبارة منطقية يقول راسل: "إن الثابت يكون منطقياً لو أن القضايا التي يوجد بها تضمه دائماً، حتى عندما تحاول أن تعوضه بمتغير" وهو يريد من خلال هذا التعبير أن يبين ما "لقوة" (2) الثابت المنطقي من خاصية: وخاصيته أنه لا ينجر مع أي تغير كان، فالثابت المنطقي هو الرابط الذي يربط بين قضية وأخرى أو بين مجموعة قضايا، وكل محاولة تجعل منه متغيراً (variable) تفقد هذه الخاصية، وبالتالي لا يمكننا أن نقول عنه أنه "ثابت" (constant) ❖❖.

والثوابت المنطقية في الحقيقة تكون الشكل الخالص للقضية (La pure forme de la proposition) وإن القضية الصورية لا تضم ثوابت أخرى غير الثوابت المنطقية.

ولتوضيح هذه المسألة أكثر، يضرب راسل مثال يقول: لنأتي إلى اختصار الاستنباط الذي يبين أن سقراط فان على الشكل التالي: لو أن س هو أ، عندها لو أن كل أ هو ب ينتج عنه أن أ هو ب فالثوابت هنا هي: يكون واحد (أ هو) (est un)، كل (tous)، إذا ... ف (si alors). هذه الثوابت المنطقية، وينظره واضحة: إنها تصورات صورية خالصة.

ولتوضيح كل هذا نقول أن مسألة الثوابت المنطقية لا يمكنها أن تأخذ هذه الصيغة، إلا إذا أقمنا اختباراً - إن شئنا - على كل ما يمكن أن يكون متغيراً، فإذا فعلنا كل ذلك وتغير ما هو متغير، وبقي ما هو غير متغير، فذاك هو الشكل المنطقي الخالص للقضية.

بينما لو نقول: "هاهما شيئان ، و هاهما شيئان آخران، إذن هاهما أربعة أشياء ككل"، فإن هذا الاستنباط في القضية الرياضية هذه لا يحقق أن تكون هذه الأخيرة خالصة (pure)، لأن الأشياء

** الثابت هو ما يقابل ترجمة: Constant

(1) Ibid, p.284.

(2) Ibid, p.285.

* المتغير: Variable: حد أو كمية قابلة للتغير لارتباطها بحدود أخرى متغيرة.

** الثابت: constant: وهو الرابط الذي يربط العلاقة بين قضيتين، ومعها كان شكل أو صيغة القضية فهو لا يتغير.

هنا غير محددة، وعليه فإننا نعد هذا النوع من القضايا قضايا استنباطية تعود إلى الرياضة التطبيقية، لأنها لا تحقق "الصرفية" ❖ (la purification).

ولنفرق أكثر بين ما هو "رياضي خالص" وبين ما هو رياضي تطبيقي؛ أي بين ما يمكن أن ينتمي إلى الرياضيات الخالصة، وما يمكن أن ينتمي إلى الرياضيات التطبيقية؛ فبخصوص الذي يمكنه أن ينتمي إلى الرياضيات، الافتراضية فيه تستلزم الأطروحة، وهذا دون تحقق من الافتراضية، لكن بخصوص، أما بخصوص الرياضيات الخالصة - فحسب راسل - نقول افتراضية الصدق تستلزم أطروحة صادقة، وبعبارة أخرى نقول أن القضية المفترضة الصادقة تستلزم القضية المستنبطة الصادقة، والعكس صحيح، الشيء الذي لا يمكن قبوله في المثال الأول، لأننا في المثال الأول ما يهمنا هو كم القضية لكن في المثال الثاني ما يهمنا هو كيف القضية. ويقول راسل بهذا الصدد أن كل استنباط مقبول يجد صيغته في قضية افتراضية تنتمي إلى الرياضيات البحتة (الخالصة)، لكن في الرياضيات البحتة أو الخالصة ذاتها، فإننا لا نؤكد لا الفرض ❖ ولا الأطروحة ❖ ❖، إلا إذا قبلنا الاثنان التعبير عنهما بصيغة ثوابت منطقية (1).

ويقدم راسل أسبابا - يعتبرها علمية - للرد على السؤال لماذا اختزال الاستنباط إلى صيغة ما؟

ففي رأيه هناك سببان لذلك:

السبب الأول فائدته هي التعميم.

والسبب الثاني فائدته هي الإقتصاد في الجهود.

ولتوضيح أكثر نقول أن اختزال الاستنباط في قضية "سقراط فان" مثلا، فإننا نتحصل على نتائج لا تنطبق إلى على سقراط، بحيث لو أننا أردنا أن نعرف شيئا على أفلاطون لاضطررنا الأمر إلى إعادة التفكير.

أما عندما نتعامل مع "س" فإننا نتحصل على نتائج صالحة لكل "س" يثبت الافتراض. وبالتالي نقول إنها الأسباب أو المبررات العلمية العادية للإقتصاد وللتعميم التي تأخذ بأيدينا إلى نظرية في الطريقة الرياضية التي أشرنا إليها سلفا (1).

وبعد هذا فإن راسل يُعرِّج على توضيح أكثر لمسألة الرياضيات الخالصة. ففي رأيه أن الفرض، إذا كان معني أي يستلزم أطروحة ما، فإنه لا الفرض معني ولا الأطروحة معنية بمسألة زيد أو بوزيد؛ بمعنى أن الفرض هو اختزال لهذا الشيء، يمكن أن يكون س، أو ص، أو ع...، ولكنه أن يكون س أبيض أو س أسود أو... ومنه فإن الاستنباط هو الآخر يتبعه أي يتبع المستنبط منه. وعليه فإن

* هذه القضايا لا تحقق الصرفية بمعنى أنها ليست خالصة (pure)

* الفرض: وهو ما يقابل ترجمة: l'hypothèse.

** الأطروحة: وهو ما يقابل ترجمة: la thèse.

(1) Ibid, p.286.

(1) Ibid, p.288.

كل فرض مكن الشكل السابق يحقق استنباطا خالصا وهو رياضيا به ثوابت منطقية، رغم أن هناك ما يمكن أن يتغير في كل قضاياها [...] من الضروري أن الفرض يستلزم فعلا صدق الأطروحة أو القضية فلو أخذنا بالفرض القائل أن الفرض يستلزم القضية فإننا لا نستطيع أن نستنبط إلا في حالة يكون فيها الفرض الجديد هذا يستلزم (بصدق) القضية الجديدة، فالاستلزام هو ثابت منطقي... إذا نحن بحاجة إلى مقدمات صادقة (2).

ثم يحاول راسل أن يفصل ما بين الفرض (hypothèse) وبين المقدمة (prémisse)، فيقوم بضرب مثال على ذلك، ففي رأيه فلو أننا قلنا سقراط إنسان إذا سقراط فان، تكون القضية سقراط إنسان مقدمة لكن لو أننا قلنا، إذا كان سقراط إنسانا فإن سقراط فان، تكون هذه افتراضا. ويمكن اختصار هذا إلى اللغة الاصطناعية * والتعبير عنها باللغة الرمزية، ويرى راسل في ذلك أن هذه القضية هي قاعدة استنباطية، ومعروف أيضا أن هناك الاستعمال المتعدد في الرياضيات، إذ يمكنها أن تكون أيضا طريقة للحصول على نتائج لمقدمات.

ويصل راسل إلى القول أن "الرياضيات تتألف كلية من قضايا لا تضم سوى متغيرات وثوابت منطقية، بمعنى من قضايا ذات صبغة خالصة حيث أن الثوابت المنطقية هي التي تكون الصيغة أو (الشكل).

ويعمل كل هذا من خلال أن الرياضيات باستعمالاتها كذلك للاستقراء، فإنها تحقق به التعميم على القوانين، كما أنه أيضا يحقق لها التجريد (abstraction) عن كل ما هو شخص أو هو احساسات وتجريب، إن البعد عن كل الشكل أو الصيغة، التي سبق وأن ذكرناها معنا سقوط الرياضيات في وحل التشخيص وما ينجر عنه من احساسات وتجريب، الشيء الذي لا يمكنها من القيام بالوظيفة الموهوبة إليها، ألا وهي "تجريد" المفاهيم (القوانين) عن كل ما هو أرضي ما هو تجريبي (1) - أي منطق ملء - الذي طالما "تأثر" بمادة القضية، وكان عليه أن يأخذ من صوراً نية القضية، أعني كان عليه أن يصورن القضايا، أي يجعل القضايا من الشكل الذي ذكرناه سابقا، أي القضايا التي هي أيضا بالأساس قضايا منطقية، بمعنى تتألف من متغيرات ومن ثوابت، وهذه الأخيرة خصوصا هي التي تجعل منها (صوراً نية).

وحسب راسل دائما فإن مبدأ الاستقراء (le principe d'induction) يحقق هنا:

أولاً: أنه عام.

وثانياً: لا يستطيع أن يكون هو نفسه مبرهنا - دون حلقة مفرغة - بالاستقراء.

(2) Ibid, p.288.

* اللغة الاصطناعية: langage artificiel: وهي اللغة نستخدم فيها الرموز، وهي لغة بعض العلوم التي تمكنت من تحقيق ذلك كالرياضيات، والمنطق الرياضي ويقابلها مصطلح اللغة الطبيعية، وهي اللغة المألوفة، والتي تستخدم الألفاظ في تعبيراتها، أو هي مجموع الإشارات والحركات والتصرفات الجسدية التي تصعب التعبير والتي لا تنتج عن اصطلاح معين. (1) نبدي هنا ملاحظة هي إذا كان راسل بذلك يرمي إلى منطقانية الرياضيات فإن هذا يجعلنا نبتعد على الأقل عما كان يرمي إليه جون ستوارت مل من خلال محاولته لتأسيس المنطق التجريبي أو الإمبريقي (Emperique).

* منطق جون ستوارت مل المعروف بالمنطق التجريبي

وينتقد راسل أن تكون التجريبية الحسية وراء أي استقراء فهذه الأخيرة لا يمكنها إطلاقاً أن تبني برهاناً يقول راسل بهذا الصدد: "بديهي أن التجربة الحسية لا يمكنها أن تبرهن مبدأ ما ، ولا يمكنها أن تجعله يصبح احتمالاً... إذا المعرفة الاستقرائية ككل معرفة نحصل عليها بالاستدلال هي بحاجة إلى مبادئ منطقية قبلية *apriori* وكلية *universelles*... الاستقراء ليس شيئاً آخر سوى استنباط بعض المقدمات..." (2).

ويقدم راسل خلاصة عما جاء حول الأهمية الفلسفية للمنطقانية وهي بمثابة رد على انتقادات بوانكاريه وغيره بخصوص بديهية الرد - كما رأينا - كالتالي: يقول: "إن المنطق الرياضي حل مشاكل اللانهائي والمتواصل، وأنه مكن من فلسفة صلبة للفضاء للزمن وللحركة، وثانياً رأينا أن الرياضيات الخالصة يمكنها أن تُعرّف كمجموعة قضايا تعبر استثنائياً في مصطلحات، متغيرات وثوابت منطقية (...) وثالثاً رأينا أن إمكانية المعرفة الرياضية ترفض في الآن نفسه التجريبية والمثالية ما دام أنهما تبيينان أن المعرفة البشرية كلية لا تستنبط من الحوادث الحسية، لكن المعرفة القبلية لا يمكنها أن تشرح بكيفية ذاتية أو بـسيكولوجية" (3).

ويمكننا تحليل هذه الخلاصة على النحو التالي:

يرى راسل أن المنطق الرياضي حل مشاكل اللانهائي والمتواصل، وأنه مكن من فلسفة صلبة للفضاء للزمن و... هذا معناه أن المنطق الرياضي حقق نجاحاً على ثلاث مستويات:

فعل المستوى الأول حل مشاكل اللانهائي (*L'infini*) والمتواصل (*Le continu*) بمعنى أن المنطق الرياضي توصل إلى حل لفلسفة (1) علم الحساب، وهي أولى الفلسفات الرياضية الشيء الذي عجزت عنه الرياضيات ذاتها (رأينا بالتفصيل في تحليلاتنا السابقة)، كما أن المشاكل الفلسفية، سواء تلك المتعلقة بالفضاء أو الزمن أو الحركة الفيزيائية قد قدم لها المنطق الرياضي أيضاً حلولاً (لم نعمل على تحليلها في الصفحات السابقة تماشياً مع موضوع بحثنا) (2).

وعلى المستوى الثاني فلقد بين راسل كيف أن الرياضيات نوعان: ما يسمى بالرياضيات العادية (التطبيقية)، وما يسمى بالرياضيات الخالصة، وهذه الأخيرة هي المنطق. وفعلاً فقد وضّح كيف أن الرياضيات الخالصة هي: أولاً أساس الرياضيات ككل (العادية)، وثانياً بين أيضاً أن تفكير الإنسان - في تعامله مع المحيط الخارجي - هو تفكير منطقي، قد يبرهن وقد يبرهن؛ أي كل تعاملات الإنسان في حياته اليومية إنما تكتسب تفكيرها الصحيح من المنطق. لكن هناك من يتعامل

(2). Ibid, p.288.

* يرى راسل أن مفهوم الحس كما يقدمه بوانكاريه بـسيكولوجي

(3). Ibid, p.289.

(1) لاحظنا المشاكل الفلسفية التي اعترضت علم الحساب، مشكلة 2 والمواقف الفلسفية اليونانية إلى المواقف التي أنت بعلم الحساب أن يصمد طوال القرون

(2) تركنا ذلك عمداً لأصحاب الاختصاص.

مع هذا بالسذاجة (وعندئذ هناك حقائق يبرهن عليها اليومي (le quotidien) وهناك حقائق قد يتمكن الإنسان فيها من استخدام العلم اللائق لذلك، أي المنطق ويبرهن عليها (أي تكون برهنة منطقية من ذوي العلم والاختصاص).

ودائما بالمستوى الثاني فلقد بين راسل كيف أن الذي يستخدم الاستدلال المنطقي يستطيع أن يعرف الرياضيات البحتة (الخالصة) كمجموعة القضايا المعبرة استثناءً بمصطلحات؛ المتغيرات والثوابت المنطقية الصرفة.

وعلى المستوى الثالث فلقد بين راسل كيف أن نظرية المعرفة هي "رياضة" وبهذا المعنى فهي ليست نظرية معرفة تجريبية، ولا هي نظرية في المعرفة، يمكننا أن نقول عنها أنها نظرية جديدة في المعرفة (لأنه حسب علمنا لم نعرف أحداً قال أن المعرفة هي الكشف عن "صيغة" القضايا الرياضية منها والغير الرياضية (في نظر راسل كل القضايا الموجودة في العالم إنما هي قضايا رياضية أو يمكن اختزالها إلى قضايا رياضية) وبالتالي فإن المعرفة هي العلم بالرياضة الخالصة أي المنطق.

وبعد هذا الرد الذي جاء من راسل على الإنتقادات التي وجهها بوانكاريه بخصوص بديهية الرد، فإننا سوف نأتي على المقارنة بين النظريتين بخصوص بديهية الرد وسوف نلخص إلى نتيجة في المقارنة.

مقارنة بين وجهة نظر راسل ووجهة نظر بوانكاريه فيما يخص بديهية الرد.

إن بديهية الرد حسب بوانكاريه هي اختلاق جديد من راسل وهي أيضا عنده، غير واضحة أي أنها تتسم بالغموض (ambiguïté)، كما أنها تمنطق الرموز الرياضية، فالمساواة أصبحت هي التكافؤ ورمز الإضافة أو الجمع أصبح رابط أو ثابت أو دالة العطف (الوصل) كما أن علاقة الضرب أصبحت هي دالة الفصل، والاستلزام أصبح يُعرف القضايا الرياضية والمنطقية على حد سواء.

إن بديهية الرد وإن كانت في نظر راسل حلا منطقيا، فهي في نظر بوانكاريه جناية على الرياضيات، وهي بذلك أيضا تدخلا سافرا في الأشياء الرياضية، وذلك بما قدمته من أن مبدأ الاستقراء (وهو أهم برهان في الرياضيات) لا يحقق سوى الآلية التي يتسم بها الاستقراء هو نفسه منذ أرسطو. هذا رغم قول بوانكاريه أن مبدأ الاستقراء هو الحل الكافي للبرهان بالتراجع، لأنه يحقق العمومية؛ فيه المبدأ. وحسب راسل دائما فإن بديهية الرد تمتلك خصائص تجعل منها أنها الحل لكل ما هو رياضي، حتى أن الحلقة المفرغة تزول لما كانت أو لما طالما كانت لاصقة بمبدأ الاستقراء، وبالتالي بالبرهان بالتراجع. (أي أن الحلقة المفرغة هي الحالة التي يتم فيها الانتقال من المقدمات إلى النتائج، وهو انتقال من العام إلى الخاص أو الانتقال من العام إلى العام باستخدام الاستنباط) في الحالتين - حسب راسل- تشكل الحلقة المفرغة وذلك للسبب التالي:

إن بديهية الرد تتوفر على أهم صيغة فيها ألا وهي أن التعريف أي تعريف القضايا، يتسم بالصيغة الشرطية "إذا ... فإن" (وهي صيغة علمية). في حين أن الافتراضية هي صيغة رياضية لكن لا

تتحقق فيها الشرطية. بمعنى أنها لا تعتمد على أهم عامل من العوامل الرئيسية في كل برهنة، ناهيك عن أن الافتراضية، تعتمد على عوامل غالباً ما تكون سيكولوجية أي (طبيعية) حسب راسل. قلنا أن بديهية الرد حسب راسل هي تعريف مستنتج من صيغة شرطية أو هي الصيغة الشرطية عينها، فمثلاً إذا أردنا البرهنة على الصيغة الشائعة: كل إنسان فان، سقراط إنسان، سقراط فان، فإن هذه الصيغة ليست بها دالة، وبالتالي فالصيغة هذه لا تحقق أهم مبدأ، وأهم مبدأ هنا هي صيغة "إذا..فإن" هذه الصيغة هي التي تجعل التأكد أو الإثبات صحيحاً، فنحن نقول حينئذ إذا كان كل الناس فانين، وسقراط إنسان، إذا فإن سقراط فان.

هذه الصيغة التي تحقق الشرطية تعني:

أننا من كاذب يمكننا أن نصل إلى صادق.

وأننا من صادق يمكننا أن نصل إلى صادق

لكن من صادق وكاذب فلا نصل إلى صادق

وأننا من كاذب وكاذب نصل إلى صادق.

إذاً فإن بديهية الرد هي البديهية الواضحة من خلال هذه الصيغة الشرطية، والتي كما قلنا هي صيغة علمية، فلا يمكننا إطلاقاً أن نثبت ما هو غير بديهي، وحينئذ فإن بديهية الرد من هذا هي :

محققه لأهم مبدأ علمي ألا وهو العمومية

وهي محققة أيضاً برابطها المنطقي لأهم صيغة رياضية أعني الصيغة الرياضية أو الصيغة التي تؤكد الرياضيات الخالصة أي المنطق، ومن هنا فلا مجال للحلقة المفرغة من جهة، كما أنه لا مجال أيضاً للشك أو للريب فهي بتلك الصيغة محققة لليقين.

أما بخصوص بوانكاريه الذي يركز على البرهان بالتراجع والذي يقول عنه أنه كمبدأ عام، فإن بديهية الرد أيضاً هي الأخرى تكون عامة لكن هذه المرة بدون شروط، قياساً إلى ما تكلمنا عليه سابقاً.

ويخصوص الخصوبة التي تميز البرهان بالتراجع (لأنه يعتمد على الاستقراء):

نعتقد أن هذه الخصوبة ناتجة عن مدى اليقين الذي يتحقق بالافتراض التي يقوم عليها، بمعنى أن الخصوبة ناتجة عن أن البديهيات التي يستعملها هي من بديهيات الرد، أي تلك الصيغ التي تكون معرفه بدوال منطقية لا رياضية (فالدالة المنطقية هي دالة تؤكد على كيف العلاقة (فهي علاقة كيفية) ولا تركز على كم العلاقة، فهي إذا كانت كذلك فسوف تكون علاقة رياضية.

وإذا عدنا إلى العمومية التي تحققها بديهية الرد، سنجد أنها كذلك بما للعالم من أنواع القضايا. يرى راسل أن جل القضايا في العالم إما أنها رياضية رياضة تطبيقية أو أنها رياضية رياضة خالصة فبالنسبة للأولى، فإن التحكم فيها دائماً هو الدوال التي تتحقق بها الثوابت المنطقية، وأما بالنسبة للثانية فإن المتغيرات متغيرات والدوال ثوابت منطقية.

فكل دالة إنما هي في شكلها رياضية لكن في جوهرها منطقية ومن هنا فإن بوانكاريه كان قد رأى أن الخطر يكمن هنا وهو خطر داهم الرياضيات. ولقد كانت نظرة بوانكاريه إليه شكلية، أي لما رأى الرياضيات هي كذلك بالعلاقات الرياضية. لكن تاريخ الرياضيات المعاصر يؤكد أن النقائص التي انتهت إليها الرياضيات وجدت حلها في تحويل المجموعات إلى فئات، وليس العكس. (ملاحظة: إن الرياضيين يجمعون أن الرياضة الخالصة (أي المنطق) تمكنت من القضاء على النقائص، وبالتالي أعطت دفعة جديدة لعمل الرياضيات والمنطق).

وبعد أن قمنا بمقارنة بديهية الرد بالبرهان بالتراجع وخلصنا إلى ما خالصنا إليه، نحاول أن نتعرف على أهم النتائج لتلك المقارنة وهو ما سنتابعه في البند القادم.

نتيجة المقارنة.

يمكن اعتبار البرهان بالتراجع برهاناً، وبديهية الرد قاعدة البرهان، ومن هنا كلاهما برهاناً. كلاهما عاماً (أي أن بديهية الرد تحقق العمومية كما يحققها البرهان بالتراجع). كلاهما يحقق الخصوصية؛ فخصوصية بديهية الرد ناتجة عن استعمالها للدوال المنطقية، أما خصوصية البرهان بالتراجع فناتجة عن استعماله لمبدأ الاستقراء الرياضي. إن البديهية أي بديهية الرد أوسع من البرهان بالتراجع وبالتالي تشمله (فهي التي تنهي مشكلة الحلقة المفرغة في البرهان بالتراجع).

يمكن اعتبار البرهان بالتراجع ناجحاً في مجال الرياضيات التطبيقية لكن هذا النجاح لن يكون له إلا عندما يستعين بالرياضيات الخالصة (المنطق). من تطبيقات بديهية الرد استفاد البرهان بالتراجع، وبالتالي استفادت الرياضيات: إذاً إن أساس الرياضيات الرياضيات الخالصة (المنطق).

نظرية الأنماط المنطقية كانت من مهامها تصنيف الدوال إلى دوال ماصدية، ودوال مفهومية فالأولى مجالها الرياضيات الخالصة، وأما الثانية فمجالها الرياضيات التطبيقية، وأن استعمال هذه الأخيرة لبديهية الرد، جعل منها أن تكون أوسع وأشمل من البرهان بالتراجع. هذه هي في نظرنا أهم النتائج التي خالصنا إليها من مقارنة بديهية الرد بالبرهان بالتراجع.

ثبت بالمراجع والمصادر.

1. Poincaré (Henri), - Sur la nature du raisonnement mathématique - R.M.M., T II 1894, édition, Colin.
2. Poincaré (Henri), - Discussions, réponse à quelques critiques - , R.M.M, T V, 1897, édition Colin, Paris.

3. Poincaré (Henri), – Les mathématique et la logistique – , R.M.M, 13ème année, T XII 1905 , édition, Colin, Paris.
4. Poincaré (Henri),– Discussion à propos de la logistique – , R.M.M, T XIV 1906 , édition, Colin, Paris.
5. Poincaré (Henri), – L'axiome de réductibilité – , R.M.M, 19ème 1909, édition, Colin, Paris, pp. 469–489.
6. Poincaré (Henri), – A propos de la logistique – , R.M.M 19ème 1909, édition, Colin, Paris, PP. 866 – 869
7. Russell (Bertrand), Introduction à la philosophie mathématique ,trad. M. Moreau, Payot, Paris 1961.
8. Russell (Bertand) , Les paradoxes de la logique – in, R.M.M, XIV librairie Armand Colin, Paris 1906.
9. Russell (Bertrand), Russell (Bertrand), Définition et systématique ambiguë – in, R.M.M, T XVIII, (n°3 1910), librairie Armand Colin, 1910.
10. Russell (Bertrand), Pourquoi une fonction requiert des arguments d'un certain types – in, R.M.M, T XVIII, (N°3 1910), librairie Armand Colin, Paris.
11. Russell (Bertrand), La hiérarchie des fonctions propositionnelles, in, R.M.M, T XVIII, (n°3 1910), librairie Colin, Paris.
12. Russell (Bertrand), L'axiome de réductibilité, in, R.M.M, T 18 (n°18ème année 1910), édition, Colin Paris.
13. Russell (Bertrand), La théorie des types logiques, in, R.M.M, (n°18ème année 1910), édition Colin, Paris.
14. Russell (Bertrand), Raisons pour accepter l'axiome de réductibilité, T XVIII, (n°3 1910), librairie Armand Colin, Paris.
15. Russell (Bertrand), Sur la relation des mathématiques à la logistique, R.M.M 19ème année, T XIX, n°3 1905, édition Colin, Paris.
16. Russell (Bertrand), L'importance philosophique de la logistique, R.M.M., 19 ème année, T XIX, n°3 1905, éd Colin, Paris.
17. Bourbaki (Nicolas), Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris 1969
18. Roshdi (Rashed), – L'algèbre – Histoire des sciences arabe, mathématique et physique. T 2, Edition du Seuil, Paris, 1947.