

Students' difficulties in transitioning to an advanced mathematical thinking at university: The limit concept as a case study

صعوبات الطلبة في الانتقال إلى تفكير رياضي متقدم في الجامعة: مفهوم النهاية كحالة دراسة
sa'oubaat attalba fee alaantqaal 'ilaa tafkeer rayaadyaatee matqddam fee
aljaam'a: mathoum annahaaya kahaala daraasa

عبد الهادي واقيد¹، أ. ناجي تمار²، أ. أحمد آيت مختار³

OUAKID Abdelhadi – TAMMAR Nadji – AITMOKHTAR Ahmed

¹ جامعة سعد دحلب-البليدة 1 (الجزائر)، hadiouakid@univ-blida.dz

طالب دكتوراه، مخبر الاستيمولوجيا وتاريخ الرياضيات (LEHM)، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)

² المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)، nadji.temar@g.ens-kouba.dz

³ المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)، ahmed.aitmokhtar@g.ens-kouba.dz

تاريخ النشر: 2025/6/11

تاريخ القبول: 2025/1/25

تاريخ الاستلام: 2024/9/15

Abstract : This paper aims to determine students' difficulties to reach an advanced mathematical thinking after moving to university. The limit is an important, but difficult, concept in mathematics, and studied at secondary and university with two different approaches; it is typical in this case. This research includes a theoretical study on the way of teaching the concept in the two phases, and a field study through analysing two questionnaires for 1st year university students and professors. The result is that intuitive thinking, and relying on procedures application, in the secondary is a cause to constitute misconceptions that become obstacles towards a complete understanding in studying the same concept at university with a more rigorous way.

Keywords : The limit concept; advanced mathematical thinking; students' conceptions; transition secondary school-university.

ملخص: يهدف المقال إلى تحديد الصعوبات التي تواجه الطلبة في الوصول إلى تفكير رياضي متقدم بعد الانتقال إلى المرحلة الجامعية. النهاية مفهوم مهم في الرياضيات لكنه صعب، ويُدرس في المرحلتين الثانوية والجامعية بطريقتين مختلفتين؛ فهو نموذجي في هذه الحالة. يشمل هذا البحث دراسة نظرية عن طريقة تدريس مفهوم النهاية في المرحلتين، وأخرى ميدانية من خلال تحليل استبيانين لطلبة وأساتذة السنة الأولى جامعي. خلاصة البحث هي أن التفكير الحدسي مع التركيز على الحساب والتطبيق في الثانوية يتسبب في تشكيل تصورات غير مكتملة عن المفهوم. تصبح هذه التصورات عوائق نحو فهم كامل بعد الانتقال إلى دراسة نفس المفهوم في المرحلة الجامعية بطريقة أكثر صرامة. **الكلمات المفتاحية:** مفهوم النهاية؛ تفكير رياضي متقدم؛ تصورات الطلبة؛ الانتقال من الثانوية إلى الجامعة.

المؤلف المرسل: عبد الهادي واقيد،

1. مقدمة:

"تعليم وتعلّم الرياضيات في المرحلة الجامعية TALUM: Teaching And Learning of Undergraduate Mathematics" هو ميدان يحظى باهتمام بالغ من طرف الباحثين في تعليمية الرياضيات (Nardi, 2007, p. 3). هذه الدراسة تدخل ضمن هذا المجال، وبالأخص تبحث في الصعوبات التي تواجه الطلبة الجامعيين للانتقال من تصورات غير مكتملة، حول مفاهيم تتطلب تفكيراً حديسياً في الثانوية، إلى تصورات صحيحة عن نفس المفاهيم لكنها تتطلب تفكيراً رياضياتياً متقدماً في الجامعة.

لا شك أن تلميذ الثانوية الذي صار طالباً جامعياً في إحدى التخصصات التقنية والعلمية سيلمس الاختلاف بين مستوى الرياضيات في المرحلتين. توجد عدة مفاهيم رياضياتية يدرسها المتعلّم في المرحلتين الثانوية والجامعية. النهاية هو أحد هذه المفاهيم، إذ يحتل مكانة محورية في ميدان التحليل الحقيقي في المرحلة الجامعية خاصة في السنة الأولى؛ لأنه قاعدة ترتكز عليها مفاهيم كبرى أخرى مثل الاستمرار والاشتقاق والتكامل. بل إنّ مفهوم النهاية هو ما يميّز التحليل عن باقي الميادين مثل الجبر والهندسة. إنّ هذا الأمر يؤكد أنّ الطالب الذي لا يستوعب مفهوم النهاية قد فاتته جزء كبير من فهم التحليل. بعد الانتقال إلى الجامعة، يتوجب على الطالب كذلك الانتقال من مستوى رياضياتي حديسي وتجريبي يعتمد على الحساب إلى مستوى أعلى من التفكير والبرهان، ويتميز بالتجريد والدقة وضبط المفاهيم.

المرحلة الانتقالية بين رياضيات الثانوية ورياضيات الجامعة ليست سهلة البتّة، إذ يواجه الطلبة خلالها عدة صعوبات. قد ترجع أسبابها إلى صعوبة المرور من الوصف إلى التعريف الدقيق للمفاهيم ومن الحساب إلى البرهان، لذا فإنّ ثمة معظم الطلبة لتطبيق خوارزميات وإجراءات الحساب قد يصبح عائقاً نحو الفهم الكامل (Chagwiza, Maharaj, & Brijlall, 2020, pp. 333-334). مفهوم النهاية في المستوى الجامعي هو مثال نموذجي عن نوعية التفكير المطلوبة في الرياضيات المتقدمة (Denbel, 2014, p. 24)، لأن طريقة تدريسه والتصور الصحيح عنه مختلفان عما هو متبع في الثانوية. حسب (Duru, 2011, p. 1711) فإن طلبة السنة أولى جامعي يستطيعون تطبيق إجراءات

الحساب لكن معظمهم يعجز عن حلّ المشاكل التي تتطلّب استعمال تعريف مفهوم النهاية نفسه.

نعتقد أن صعوبات الانتقال إلى تفكير رياضي متقدّم سيُها تصورات راسخة تكوّنت في المرحلة الثانوية وكانت صالحة في حل التمارين، لكنها تصبح غير كافية في مستوى أعلى. قد تكمن بعض الأسباب في صعوبة المفهوم نفسه. لذا كان هدف هذه المقالة هو اكتشاف تصورات الطلبة عن مفهوم النهاية بعد إكمالهم لدراسته في السنة الأولى جامعي ومدى قدراتهم في تصحيح تصوراتهم الخاطئة الموروثة من الثانوية. إضافة إلى ذلك، نوّد معرفة صعوبات تعلّم وتعليم مفهوم النهاية في المرحلة الجامعية من وجهة نظر الأساتذة.

يشمل هذا البحث في شقّه النظري شرحا موجزا للمفهوم ووصفا للاختلاف بين تعاريفه في المرحلتين الثانوية والجامعية حسب المناهج والكتب المدرسية ونتائج دراسات سابقة. أما العمل الميداني فيتضمن تحليل استبيان لعينة من طلبة السنة أولى تخصص تكنولوجيا مسار مهندس في جامعة البلدية 1 بالجزائر. معظم الدراسات السابقة ركّزت على الطلبة، لذا حاولنا إضافة استبيان لعينة أخرى وهي الأساتذة الجامعيين (من جامعات ومدارس عليا مختلفة) لمعرفة نتائج تجاربهم مع تدريس مفهوم النهاية في الجامعة.

2. إطار نظري

1.2 تجارب المتعلمين مع "النهاية" قبل دراستها كمفهوم رياضي

إن تدريس معظم المفاهيم الرياضية لا يكون مع متعلمين (طلبة أو تلاميذ) بدون تجارب سابقة مع هذه المفاهيم في الحياة اليومية. في حالة مفهوم النهاية، فإن المتعلمين يملكون أفكارا عن المصطلح ومعناه قبل بداية تعلّمه (Denbel, 2014, p. 28). هذه الأفكار مصدرها الحياة واللغة اليومية، وبالتالي فإن الطالب الذي سنعلّمه مفهوم النهاية يملك في ذهنه ما يُسمى "نماذج عفوية" (Cornu, "modèles spontanés", 1981, p. 333). كلمة "نهاية" لها عدة معانٍ في اللغة تختلف غالبا عن المعنى الرياضي، قد تعني "حدّا لا يمكن تجاوزه" وأحيانا "حدّا يمكن الوصول إليه" أو "نقطة يتم الاقتراب منها". مصطلحات أخرى مثل "يؤول إلى" و"يقترّب من" يتم استعمالها

بمعان مختلفة في السياقين اليومي والرياضياتي. حسب (Davis & Vinner, 1986) فإن اللغة اليومية هي مصدر لتصورات ساذجة لا يمكن تجنبها.

حتى بعد تلقّي المعنى الرياضي لمفهوم النهاية تبقى هذه التصورات في ذهن الطالب ويستمر في استخدامها. لكن ستحدث عمليات من التكيف مع المعنى الرياضي وتُشكّل "نماذج ذاتية modèles propres" لدى الطالب (Cornu, 1981, p. 333). معظم الأخطاء التي يرتكبها الطلبة ليست نتيجة الصدفة أو عدم الانتباه فقط بل نتيجة استخدام النماذج الذاتية.

2.2 مفهوم النهاية في رياضيات المرحلة الثانوية

طريقة تعليم وتعلّم مفهوم النهاية حسب المناهج الخاصة بالرياضيات في المرحلة الثانوية هي التركيز على الفهم الحدسي وحساب النهايات. المقاربة المتبعة في هذه المرحلة هي تدريسه بطريقة غير رسمية، أي عدم إعطاء التعريف الرياضي الرسمي "formal definition" (أو التعريف الدقيق "rigorous definition") للتلاميذ. يستعمل الأساتذة التعريف غير الرسمي "informal definition".

مفهوم النهاية مرتبط بثلاثة مفاهيم أساسية في الرياضيات: الدالة واللانهاية والعدد. هذه المفاهيم تكون بداية دراستها في رياضيات المرحلة الثانوية التي تشمل بعض مفاهيم التحليل. يتم تسمية هذه المرحلة أحيانا "بدايات التحليل introductory calculus". في السنة الثانية ثانوي، يلتقي التلاميذ لأول مرة مع مفهوم النهاية (محور النهايات: نهاية دالة مع التطرق لمعنى اللانهاية). من الكفاءات المستهدفة في السنة الثانية ثانوي حسب (اللجنة الوطنية للمناهج، 2005، صفحة 7) هي "حساب نهايات دالة ودراسة سلوكها التقاربي باستعمال هذه النهايات". نجد كذلك أن (اللجنة الوطنية للمناهج، 2005، صفحة 11) توصي بما يلي:

"نظرا لصعوبة تقديم مفهوم النهاية، في هذا المستوى، انطلاقا من التعريف الرياضي المعتاد، نكتفي بمقاربة تجريبية وحدسية له من خلال وضعيات ذات دلالة (...)"

يتم التعمق أكثر في السنة الثالثة ثانوي في حساب النهايات كجزء أساسي في دراسة الدوال. حسب برنامج هذه السنة: "يُراعى الارتباط الوثيق مع برنامج السنة الثانية

ثانوي مع التعمّق في المفاهيم التي دُرست سابقاً" (اللجنة الوطنية للمناهج، 2006، صفحة 13). لكن يتم الإبقاء على نفس الكفاءات المستهدفة وهي حساب النهايات مع توجيهات بتدعيم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النهاية في وضعيات بسيطة وتوظيف أمثلة بسيطة (اللجنة الوطنية للمناهج، 2006، صفحة 14).

رغم أن الكتابين المدرسيين للسنتين الثانية والثالثة ثانوي يتضمّنان تعريفا رياضياتيا عن مفهوم النهاية بصيغة لغوية، دون استعمال رموز المنطق، إلا أنّه لا يتم شرح التعريف أو استعماله في البراهين؛ ذلك راجع لعدة أسباب منها: (1) صعوبة التعريف بالنسبة للتلاميذ، (2) التزام الأساتذة بتوجيهات المنهاج المقترح من الوزارة، (3) الامتحانات الفصلية وامتحانات البكالوريا لا تشمل أسئلة خاصة بتعريف النهاية. اتّباعا لتوصيات المنهاج، يمضي الأساتذة الجزء الأكبر من الوقت في التطرق لكيفية حساب النهايات وتعلم خوارزميات إيجاد النهاية، وهو ما يُختبر فيه التلميذ في امتحان البكالوريا.

يقدّم التعريف "الحدسي intuitive" أو "غير الرسمي informal" لمفهوم نهاية دالة في المرحلة الثانوية (اللجنة الوطنية للمناهج، 2005، صفحة 11) كما يلي:

نقول عن عدد حقيقي l إنه نهاية دالة حقيقية f ذات متغير حقيقي

لما يؤول x إلى عدد a إذا وفقط إذا $(\Leftrightarrow)$ تحقق ما يلي:

كلما اقترب المتغير x من العدد a فإن الدالة تقترب من القيمة l .

مثال 1:

لتكن $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ دالة حقيقية ذات متغير حقيقي.

يمكن أن نعوّض في مكان x بأي عدد حقيقي لا يساوي 1 والناتج سيكون عددا حقيقيا

$$(\text{مثلا: } f(2) = \frac{2^2-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3).$$

نريد حساب نهاية الدالة لما يؤول المتغير x إلى العدد 1 (أي أن المتغير يقترب من

1 بشكل عشوائي ولا نهائي ونرمز لذلك بـ $x \rightarrow 1$).

أولا: يقوم التلميذ بتعويض المتغير x ببعض القيم القريبة من 1 تدريجيا وحساب صورها،

لكنه لا يستطيع أن يعوض بالعدد 1 لأنه سيجد حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

الجدول 1: أمثلة عن تعويض بعض القيم القريبة من 1 لتخمين قيمة النهاية

1.1	1.01	...	1	...	0.99	0.9	المتغير x
2.1	2.01	...	؟	...	1.99	1.9	الصورة $f(x)$

ثانيا: يجد أنه كلما اقترب المتغير من 1 فإن صورته بالدالة تقترب من العدد 2.

ثالثا: الخلاصة أن النهاية تساوي 2، عندئذ يكتب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

عموما، تكون طريقة الحساب في البداية كما في المثال أعلاه. يتم بعدها تقديم بعض الطرائق والخوارزميات التي يألفها التلميذ وتمكّنه من استنتاج قيمة النهاية أحيانا دون تعويض. يتم التدرّج من نهايات دوال بسيطة ثم دوال مركبة إلى غاية الوصول إلى الدوال الأسية واللوغاريتمية. إن هذه الطريقة تعتمد على تقادي التعقيدات لجعل التلاميذ يتصورون المفهوم، لكن هذا التبسيط ليس متناسبا دوما مع التعريف الرياضي.

1.2.2 تصورات خاطئة حول مفهوم النهاية من المرحلة الثانوية

يمكن أن نُلخص طريقة تعليم وتعلّم مفهوم النهاية في المرحلة الثانوية بأنها تركز على إجراءات الحساب والتصور الحدسي الديناميكي للنهاية بدل التركيز على التعريف الدقيق نفسه. حسب (Nagle, 2013, p. 2) فإن مصطلح "ديناميكي dynamic" يُستعمل لوصف أي تفسير للنهاية باستعمال الحركة مثل "يقترّب من"، "يؤول إلى"، "... (كما في المثال 1 السابق). النتيجة هنا هي تكوين تصورات عن المفهوم تكون معظمها خاطئة أو غير مكتملة، من بينها:

- (1) فهم النهاية بتعريف حدسي غير رسمي يتضمن حركة اقتراب.
- (2) تصور ديناميكي لقيم الدالة تقترب من قيمة معينة.
- (3) تصوّر إجرائي "procedural" بكون النهاية تشمل فقط كيفية الحساب من خلال حفظ وتعلّم خوارزميات وإجراءات الحساب.

حسب (Cornu, 1981, p. 333) فإن هذه التصورات تجعل التلاميذ يشكلون فهما

ناقصا عن النهاية، فإذا سألناهم عن معنى النهاية يربطونها مباشرة بهذه التصورات.

3.2 صعوبات الطلبة مع مفهوم النهاية بعد الانتقال إلى رياضيات المرحلة الجامعية

بعد انتقال الطالب إلى المرحلة الجامعية واختياره تخصصا علميا أو تقنيا يتضمن

دراسة التحليل كميدان مستقل، سيكون الطالب مُطالباً أيضا بالانتقال إلى "تفكير

رياضياتي متقدم advanced mathematical thinking". مادة التحليل غنية بالتجريد وتتطلب مستوى عال من التفكير لتصوّر المفاهيم، وهذا ما يجده الطلبة صعبا (Parameswaran, 2007, p. 91). حسب (Tall, 1992, p. 495) فإن التفكير الرياضي المتقدم يتميز بعنصرين مهمين: التعاريف الرياضية الدقيقة والاستدلالات المنطقية، إذ يكون الهدف الرئيسي في هذا المستوى هو جعل الطالب ينضم إلى عالم كامل من الرياضيات الاحترافية. هذا الانتقال سيكون صعبا لأن المفاهيم المدروسة سابقا كانت ذات أسس حدسية، بينما يُعد إدراك ضرورة الإثبات وتطبيق تقنيات البرهان حجر الزاوية في الرياضيات الجامعية (Nardi, 2007, p. 41).

يُعتبر فهم فكرة النهاية في المرحلة الجامعية دليلا على الانتقال إلى مستوى عال من التفكير الرياضي (Denbel, 2014, p. 28). سידرس الطالب في هذه المرحلة مفهوم النهاية بطريقة رسمية أكثر دقة. يتوجب على الطالب معرفة المعاني الرياضية للمكتسبات القبلية مثل الدالة والرموز المنطقية ومعرفة كيفية استعمال النهاية في باقي تعاريف مفاهيم التحليل البعدية. يتم تقديم التعريف الرياضي مع تعمق أكبر في الحساب ويُطلب أحيانا البرهان على صحة قيمة النهاية، هذا يتطلب تفكيراً رياضياً متقدماً بالاعتماد على البرهان وليس الحدس والتجريب. لكن الطلبة المنتقلين إلى الجامعة يجدون صعوبة في ربط علاقة بين ما درسوه في الثانوية وما يدرسونه في الجامعة. تبقى لديهم تصورات ناقصة عن المفهوم الرياضي للنهاية. حسب (Juter, 2005, p. 95) فإن هذه التصورات يصعب تغييرها لأنها كانت صالحة في سياق سابق، نتيجة لذلك، لا يفهم الطلبة ماهي الحاجة أو الغاية من تعلّم التعريف الرياضي الرسمي. من جهة أخرى، تلقين التلاميذ تقنيات حساب النهايات، رغم أنه مُبرّر، يكون باستعمال أوصاف حدسية غير رسمية وبرهان هذه التقنيات يكون فقط في المرحلة الجامعية (Fernández-Plaza & Simpson, 2016, p. 316).

لكي يصل الفهم إلى أكبر عدد من الطلبة، قد يكون من العملي، في بداية الدروس، استدعاء الأفكار السابقة التي لديهم حول المفهوم والبناء عليها دون تعمق كبير في التجريد والأفكار الرسمية (Parameswaran, 2007, p. 194). لكن فيما

بعد، من المهم تصحيح الأفكار الخاطئة السابقة. التصور الحدسي والديناميكي للنهاية يصبح خاطئاً في كثير من الحالات كما في المثال التالي:

مثال 2:

لنأخذ مثلاً الدالة الثابتة $f(x) = 5$. نهاية هذه الدالة عند أي قيمة ستكون 5، فهي لا تتضمن عملية الاقتراب؛ أي لا تقترب من أي قيمة عند تعويض المتغير بأي عدد. في الرياضيات الجامعية تُعطى المفاهيم مع تُوخّي الدقة الرياضياتية والمنطقية. على عكس ما سبق، فإن التصوّر الرسمي لمفهوم النهاية يتم بتقديم التعريف الرياضي "الدقيق rigorous" أو "الرسمي formal" لنهاية دالة في الجامعة كما يلي (Nagle, 2013, p. 5) (Przenioslo, 2004, p. 107) (Hazi, 2018, p. 22):

نقول عن عدد حقيقي ℓ إنه نهاية دالة حقيقية f ذات متغير حقيقي

لما يؤول x إلى عدد a إذا وفقط إذا $(\Leftrightarrow)$ تحقق ما يلي:

من أجل كل مجال مفتوح I مركزه ℓ ، يوجد مجال مفتوح J مركزه a ،

بحيث تكون صورة المجال J محتواة في المجال I .

في هذه الدراسة سنقتصر على هذه الصيغة اللغوية بغرض التبسيط. لكن بالنسبة لطلبة الجامعة، بعد دراسة مبادئ المنطق الرياضي ورموزه، يتم استبدال العبارة الثانية من التعريف بالعبارة التالية (Hazi, 2018, p. 22) (Przenioslo, 2004, p. 107):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

يُطلب غالباً استعمال التعريف للبرهان على أن النهاية صحيحة حتى عندما

نعرف قيمتها. هذا يتطلب أولاً فهم التعريف نفسه. يمكن توضيح التعريف بالمثال التالي:

مثال 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

وجدنا أن نهايتها هي 2 لما يؤول المتغير x إلى العدد 1. لنبرهن باستعمال التعريف الرياضي أن هذه النهاية صحيحة.

أولاً: سنختار مجالا مفتوحاً كيفياً I مركزه النهاية 2 وليكن مثلاً $I =]1.5, 2.5[$.

ثانياً: بعد البحث، سنجد مجالا مفتوحا آخر J مركزه 1 وليكن مثلاً $J =]0.8, 1.2[$ في الواقع يوجد عدد لانهائي من المجالات المناسبة.

ثالثاً: صورة هذا المجال J هي $f(]0.8, 1.2[) =]1.8, 2.2[$

رابعاً: نلاحظ أن الصورة $]1.8, 2.2[$ محتواة في المجال المختار $]1.5, 2.5[$.
خامساً: بالتعميم، إذا اخترنا أي مجال آخر I مهما كان، فسنجد دوماً مجالا J يحقق الشرط المطلوب، وهكذا استعملنا التعريف الرياضي للبرهان بأن النهاية صحيحة.

نلاحظ أن هناك فرقاً كبيراً بين "التعريف الحدسي وغير الرسمي" المستعمل في رياضيات المرحلة الثانوية و"التعريف الدقيق الرسمي" المستعمل في رياضيات المرحلة الجامعية. فالأول يتضمن عملية ديناميكية "dynamic process" أمّا الثاني فهو "ثابت static" لا يتضمن أي حركة للاقترب ويلغي الحدس، إنه يجعل الطالب يتصور النهاية ككائن رياضي "object".

عندما يدرس الطالب مفهوماً جديداً أو يتعمق في مفهوم يعرفه من قبل فإنه يعتمد على الأفكار السابقة التي لديه (Juter, 2005, p. 91)، وبالتالي فإن الطالب الذي درس مفهوم النهاية في الثانوية بطريقة حدسية سيكون لديه عدة تساؤلات حول التعريف الرياضي من الشكل: "ماهي الحاجة إلى استعمال هذا التعريف بدل التعريف المدروس سابقاً؟" أو "أين معنى اقتراب الدالة من قيمة النهاية في هذا التعريف؟". معظم الكتب الجامعية والأساتذة يقدمون التعريف، لكن دون تبرير الحاجة إلى استخدامه بدل التعريف غير الرسمي. حسب (Ervynck, 1981, p. 87) فإن الطلبة رغم دراسة التعريف يحتفظون غالباً بتصوراتهم السابقة حول كون النهاية تتضمن إجراءات الحساب فقط.

التصور الصحيح المطلوب تشكيله من طرف الطالب في المرحلة الجامعية حول مفهوم النهاية يتضمن المهارات الحسابية لكنها مُعززة بالبرهان. يُضاف له فهم النهاية ككائن رياضي ثابت، قد يشمل أحياناً عمليات ديناميكية لكن مع استعمال التعريف الرسمي كقاعدة أساسية وليس باستعمال التعريف الحدسي (Nagle, 2013, p. 4). إن حساب النهايات أمر مثير للاهتمام ويطرح تحدياته لكن بالنسبة لميدان التحليل الحقيقي يجب إتقان التعريف نفسه واستخلاص نتائجه (Thomson, Bruckner, & Bruckner,

(193-195, pp. 2008. يُضاف إلى ذلك، القدرة على ربط العلاقة بين مختلف تمثيلات المفهوم (Güçler, 2014, p. 253).

الجدول التالي يوضح الاختلاف بين طريقة تدريس مفهوم النهاية والتصورات المطلوب تشكيلها في كل من الثانوية والجامعة.

جدول 2: تدريس مفهوم النهاية والتصورات المطلوب تشكيلها في الثانوية وفي الجامعة

في المرحلة الجامعية	في المرحلة الثانوية
الانطلاق من تصورات غير مكتملة ناتجة من المرحلة الثانوية	الانطلاق من نماذج عفوية ناتجة من الحياة واللغة اليومية
التركيز على التعريف الرسمي	التركيز على تعريف حدسي بدل التعريف الرسمي
تصور النهاية ككيان object	تصور النهاية كعملية process
تصور تعريف ثابت static	تصور تعريف ديناميكي dynamic
البرهان على صحة النهاية حتى بعد معرفتها باستعمال التعريف انطلاقا من مجال مفتوح يضم قيم الدالة $f(x)$	تصور إجرائي خوارزمي procedural algorithmic مع حساب النهاية انطلاقا من المتغير x

4.2 دراسات سابقة

حظي مفهوم النهاية عموما باهتمام كبير من طرف الباحثين في تعليمية الرياضيات نظرا لأهميته كمفهوم محوري في ميدان التحليل وصعوبة تعليمه وتعلّمه على حد سواء في المرحلة الجامعية. من بين أهم المحاور التي ركزت عليها الدراسات السابقة بالخصوص هي اكتشاف تصورات الطلبة الخاطئة ومصادرها. من بين المصادر هي المكتسبات والأفكار الناتجة من الثانوية وتأثيرها بعد الانتقال إلى دراسة الرياضيات في المرحلة الجامعية وصعوبة تقبل التعريف الرياضي لمفهوم النهاية. كشفت عدة دراسات سابقة، مثل (Nagle, 2013)، عن تصورات خاطئة حول مفهوم النهاية تشكّلت في الدروس الأولى. بعضها ديناميكي فقط وبعيد عن التعريف الرياضي الدقيق (عملية ديناميكية تتمثل في اقتراب دالة من قيمة). هذا التصور الديناميكي كان ميدان بحث في دراسات كل من (Williams S. R., 2001)، (Denbel, 2014)، (Cottrill, et al., 1996). هذه التصورات سمّاها (Cornu, 1981) "نماذج عفوية" محاولا إيجاد العلاقة بينها وبين التعريف الرسمي.

بعض الدراسات حاولت تقديم بعض المقاربات لتسهيل انتقال الطلبة نحو تبني تفكير رياضي متقدم عن النهاية مثل اقتراح (Nagle, 2013) بضرورة إحداث تعديل على طريقة التدريس التقليدية وجعل التلاميذ يفهمون أن النهاية ليست "عملية" تشمل الحساب فقط بل هي مفهوم له خواص وباعتباره "كائنًا رياضيًا"؛ ذلك عن طريق جعل الطلبة يركزون على كون النهاية هي قيمة مُخْمَنة. في نفس السياق، اقترحت دراسة (Denbel, 2014) مقارنة تعتمد على مسائل تُركّز على استعمال التعريف في البرهان، إذ تكون الأفكار الحدسية غير مناسبة للحل، مع تقديم بعض الإرشادات للطلبة.

دراسة (Davis & Vinner, 1986) وجدت أن هذه التصورات لا يمكن تجنبها بسبب اللغة اليومية والمصطلحات التي يستعملها الأساتذة أثناء الشرح مثل "يؤول إلى" و"يقترّب من" التي تحمل تصورات ضمنية عن عملية اقتراب متغير أو دالة من قيمة. من المثير للاهتمام أن التصورات الخاطئة التي تكونت في المرحلة الثانوية تبقى في أذهان الطلبة في المرحلة الجامعية حتى بعد دراسة التعريف الرسمي للنهاية. هذا ما أكدته نتائج عدة دراسات مثل (Williams S. R., 1991) (Nagle, 2013).

من بين أهم نتائج الدراسات السابقة هي أن الطلبة يطورون تقنيات عامة ومهارات حسابية حول النهايات بدلا من التركيز على استيعاب المفهوم نفسه واستعمال التعريف في البرهان على وجود نهاية من عدمه (Parameswaran, 2007) (Ervynck, 1981). أكدت دراسة (Chagwiza, Maharaj, & Brijlall, 2020) أن تصور النهاية عن طريق خوارزميات وإجراءات الحساب قد يُشكّل حاجزا نحو فهم صحيح.

فهم نوعية وماهية العوائق التي يواجهها الطلبة نحو فهم رسمي ودقيق عن مفهوم النهاية في رياضيات الجامعة كان محل بحث بعض الدراسات مثل (Sierpinska, 1985) (Chagwiza, Maharaj, & Brijlall, 2020).

لقد أجمعت الدراسات السابقة على صعوبة مهمة جعل الطلبة يشكّلون تصورات رسمية وصحيحة عن النهاية (عن طريق تعريف رياضي رسمي). مُنطلق هذه الدراسات كان المقارنة بين ما يتصوره المتعلم مع التعريف الرياضي المقبول. بعض أسباب صعوبات الانتقال نحو تفكير رياضي متقدم وتصور صحيح عن النهاية قد

تكون خارجية مثل اللغة المستخدمة من طرف الأساتذة والطريقة المتبعة حسب توصيات المناهج الدراسية. لكن بعض الأسباب قد تكون داخلية تكمن في طبيعة المفهوم نفسه.

3. العمل الميداني

1.3 المنهجية:

هذه الدراسة الميدانية هي جزء من دراسة أوسع حول مفهوم النهاية في المرحلة الجامعية، تبحث في مصادر الصعوبات التي يواجهها الطلبة وطرائق تذليلها. اعتمدنا على استبيانين (مذكورين في فقرة الملاحق): الأول لـ 36 طالبا من السنة الأولى جامعي تخصص جذع مشترك علوم وتكنولوجيا مسار مهندس بجامعة البليدة 1 بالجزائر (يدرسون مقياس التحليل الرياضي حيث له أكبر مُعامل مقارنة مع باقي المقاييس). الهدف ليس حساب النهايات بل معرفة مدى فهم الطلبة لمفهوم النهاية بعد أن أكملوا دراسته، وفحص تصوراتهم حوله وصعوباتهم معه. الثاني لـ 12 أستاذا من جامعات ومدارس عليا مختلفة (الجدول 3 أدناه) لاستخلاص نتائج تجاربهم في تدريس المفهوم.

جدول 3: توزيع الأساتذة الجامعيين المشاركين في الاستبيان على مؤسسات العمل

العدد	مؤسسة العمل
1	جامعة تبسة
1	جامعة البليدة 1
1	المدرسة العليا للأساتذة بسطيف
1	المركز الجامعي تيبازة
1	المدرسة الوطنية العليا للري بالبليدة
3	المدرسة الوطنية العليا للتكنولوجيات المتقدمة
4	المدرسة العليا للأساتذة بالقبة

تم تحليل إجابات المشاركين من أجل: (1) تحديد التصورات الشائعة لدى الطلبة ومقارنتها مع التصورات الصحيحة عن مفهوم النهاية، (2) معرفة مصادر صعوبات الطلبة للانتقال نحو تفكير رياضي متقدم بالخصوص حول تعريف النهاية من وجهة نظرهم ومن وجهة نظر الأساتذة. تم ذلك عن طريق أدوات إحصائية تتمثل في جداول النسب المئوية لتحديد الظواهر الشائعة والوصول إلى التعميم.

2.3 النتائج والمناقشة:

1.2.3 نتائج الاستبيان الأول المُقدّم للطلبة

الجانب الأول من استبيان الطلبة كان حول تصوراتهم عن معنى مفهوم نهاية دالة. المطلوب منهم كان اختيار الوصف المناسب حسب تصوّرهم من بين 6 جُمْل مقترحة وتحديد الجُمْل التي يجدونها صعبة الفهم. بعض الجُمْل هي صيغ للتعريف الدقيق للنهاية (الجملتين 2 و6) وبعضها تصورات حدسية (الجُمْل: 1، 3، 4، 5). الجدول 4 يوضّح النسب المئوية لكل اختيار. بما أن الطالب يمكنه أن يختار عدّة جُمْل وليس مجبراً على اختيار جُمْل واحدة فقط، فإن كل نسبة مئوية تمثل نسبة عدد الاختيارات على عدد الطلبة، مثلاً الجملة 1 اختارها 34 طالباً من بين 36، أما الجملة 2 فاخترها 18 طالباً من بين 36.

جدول 4: الجمل التي تصف تصورات الطلبة عن النهاية ومدى صعوبة كل جملة

الجملة 1	الجملة 2	الجملة 3	الجملة 4	الجملة 5	الجملة 6
نسبة مئوية لكل جملة/تصوّر للنهاية	94.44	50	30.55	66.66	47.22
نسبة مئوية عن صعوبة كل جملة	2.77	75	13.88	8.33	16.66
					75

الجانب الثاني لاستبيان الطلبة كان حول التعريف الدقيق للنهاية المدروس في مقياس التحليل في السنة الأولى جامعي. المطلوب منهم كان وصف درجة صعوبة التعريف ومدى فهمهم له وإن كان يتوافق مع تصوّر النهاية كعملية ديناميكية. إجاباتهم ظاهرة في الجدول 5.

جدول 5: مدى فهم الطلبة للتعريف الدقيق لنهاية وصعوبتهم معه

توافق التعريف مع التصوّر الديناميكي حسب الطلبة		نعم		لا	
		83.33%		16.67%	
فهم الطلبة للتعريف		أفهمه جيّداً		أفهمه قليلاً	
		16.67%		72.22%	
		11.11		لا أفهمه	
صعوبة أو سهولة التعريف بالنسبة للطلبة		سهل جداً		صعب جداً	
		0%		47.22%	
		47.22%		2.77%	

نستنتج من إجابات الطلبة أن لهم عدة تصورات خاطئة عن مفهوم النهاية. غالب تفكير الطلبة ينصبّ على الجانب الحدسي والجمل التي تساعد في حساب النهايات

بدل الجُمل التي تصف التعريف. نعتقد أن هذه التصورات تشكّلت في الثانوية عند تلقي المفهوم لأول مرة بطريقة حدسية. التصرّ الأكثر انتشارا هو فهم النهاية كعملية ديناميكية (الجملة 1: كلما اقترب المتغيّر x من a فإن $f(x)$ تقترب من نهاية l).

الخلاصة الأكثر إثارة للاهتمام في هذه النتائج هي أن الطلبة، رغم إكمالهم لدراسة مفهوم النهاية باستعمال التعريف الدقيق في الجامعة، يحافظون على تصوراتهم الراسخة من الثانوية. يبدو أن قناعتهم لم يتم تصحيحها بشكل كامل حتى في المرحلة الجامعية. قد يحفظ الطلبة التعريف عن ظهر قلب لكنهم يشكّلون تصوّرا آخر هو صعوبة التعريف نفسه ومعظمهم يعترفون بأنهم لا يفهمونه إلا قليلا.

نتيجة مهمة أخرى هي أن التعريف لم يكن التصور السائد عن النهاية لدى غالبية الطلبة، قد يعود السبب في ذلك هو عدم تقبله كوصف يتناسب مع تصورهم الديناميكي الحدسي أو عدم فهم الحاجة لاستخدام التعريف.

1.2.3 نتائج الاستبيان الثاني المُقدّم للأساتذة

تم تقديم اقتراحات للأساتذة في الاستبيان الثاني (انظر الملاحق) لاستخلاص مدى موافقتهم عن كل فكرة تخص تصورات وصعوبات الطلبة في فهم النهاية.

جدول 6: وجهة نظر الأساتذة الجامعيين حول صعوبات الطلبة مع مفهوم النهاية

موافق تماما	موافق بدرجة كبيرة	موافق بدرجة متوسطة	موافق بدرجة بسيطة	غير موافق تماما	
7	4	0	0	1	(1
1	2	4	3	2	(2
7	4	1	0	0	(3 أ
1	2	3	2	4	(3 ب
3	6	1	1	1	(3 ج
5	5	0	0	2	(3 د
7	2	2	1	0	(4
7	4	1	0	0	(5
3	3	3	1	2	(6
2	5	0	3	2	(7

التصور الصحيح الذي يملكه الأستاذ عن النهاية والتصور الديناميكي الذي لدى الطلبة مختلفان. حسب إجابات الأساتذة عن السؤالين 1 و 4 فإنه توجد صعوبة لدى الطلبة في تبني تفكير رياضي متقدم عموماً وفي فهم التعريف الرياضي للنهاية خصوصاً. تتباين آراء الأساتذة حول فكرة الاستعانة بالمعارف السابقة (السؤال 2) ويوافقون على استخدامها بدرجة متوسطة، نظن أن ذلك يعود لرغبتهم في جعل الطالب ينتقل إلى مستوى عال من الدقة بعيداً عن الحدس. لكن بالنسبة لمفهوم النهاية فيمكن أن يُربط بالتصور الحدسي السابق حسب إجابات معظم الأساتذة عن السؤال (3 أ). هذا تُعزّزه إجاباتهم عن الأسئلة الفرعية الموائية من السؤال 3، حيث يرى أغلبهم أن هذا التصور الحدسي لا يزول بعد تقديم التعريف الرسمي للنهاية وأن فهمها صحيحاً لا يتطلب إزالته بل تصحيحه باستعمال أمثلة مُضادة مناسبة. في المقابل فإنهم يرون أنّ الأمثلة النمطية واللغة المستخدمة قد تُعزّز من التصورات الخاطئة (حسب إجابات السؤالين 5 و 6). يعترف الأساتذة كذلك بأن تعريف النهاية في المرحلة الجامعية هو أصعب جانب بالنسبة للطلبة حول المفهوم. يرجع ذلك إلى صعوبة المفهوم نفسه لأنه يتطلب تفكير رياضياتياً متقدماً يشمل قدرة على التجريد وفهماً لرموز المنطق وعدة مكتسبات قبلية.

الجدول اسفله يخص طريقة تدريس المفهوم حسب الأساتذة.

جدول 7: إمكانية وجود طرق بيداغوجية معينة خاصة بالأساتذة لشرح تعريف النهاية

هل هناك طريقة بيداغوجية خاصة بك لشرح تعريف النهاية؟	لا، أستعمل طريقة عادية	نعم
	9	3

معظم الأساتذة يستعملون الطريقة التقليدية في شرح مفهوم النهاية. قد يعود ذلك لكمية التجريد الموجودة المتضمنة إذ يصعب إيجاد مثال واقعي حدسي يتناسب مع فكرة التعريف الدقيق، أو خشيتهم من التسبب في تكوين تصوّرات أخرى غير التي يشملها. أفصح باقي الأساتذة عن طرائق خاصة بهم تركز على أمثلة رياضية غير نمطية.

4. خاتمة:

تتفق نتائج هذه الدراسة مع مخرجات دراسات سابقة في كون أن التلاميذ يكوّنون تصورات حدسية خاطئة في المرحلة الثانوية أثناء دراسة مفهوم النهاية، ويستمرّون في استخدامها في المرحلة الجامعية. توصيات المنهاج والطريقة المتّبعة في التدريس في المرحلة الثانوية مُبرّرة، لنقادي تعقيدات وصعوبات تعريف النهاية، لكنها تؤدي إلى تشكيل تصورات غير مكتملة لا يمكن تجنبها وتبقى صالحة في مرحلة ما قبل تقديم التعريف الرسمي في الجامعة. هذه التصورات الحدسية مهمة في التحليل، لكنها ليست صحيحة في بعض الحالات التي تتطلب دقة رياضية ويجب ضبطها بالبرهان المنطقي. من جهة، فقد يتصور الطلبة أن مفهوم النهاية ليس كائنًا رياضيًا بل هو عملية ديناميكية، وبالتالي تكون جل تصوراتهم حول المفهوم إجرائية، أي عبارة عن خوارزميات وطرائق في الحساب يتم تطبيقها لإيجاد قيمة النهاية في أمثلة متداولة، بدل استيعاب المفهوم نفسه. من جهة أخرى، فإن مواجهة الطلبة في المرحلة الجامعية بالتعريف الدقيق للنهاية يحدث صراعا معرفيا لديهم بحيث يتساءلون عن علاقة تعريف النهاية الحدسي المتمثل في اقتراب دالة من قيمة معينة مع التعريف الدقيق الذي لا يتضمن أي شيء عن حركة الاقتراب.

بما أن التصورات الديناميكية مهمة في تشكيل صورة ذهنية صحيحة عن النهاية، فإننا لا نقترح حذفًا كليًا للتصورات التي تشكلت في رياضيات الثانوية، بل دمجها مع التعريف الدقيق من خلال توضيح العلاقة بين هذه التصور الديناميكي والتعريف الدقيق باستعمال أمثلة غير نمطية حيث يتم استخدام التعريف فقط وبجعل الطالب يرى أن العلاقة بين تصوراتها والتعريف ذات معنى.

التصورات الحدسية حول مفهوم النهاية موجودة بالفعل لدى الطلبة الجامعيين الذين يدرسون مقياس التحليل الرياضي. بالتالي، فإن أحد المعلومات التي تساعد الطالب على الفهم هو توضيح لماذا يجب تقديم تعريف النهاية الدقيق بهذا الشكل وليس الاكتفاء بالشكل الحدسي. هذا البحث والنتائج المترتبة عنه قد تثير الأساتذة في تحسين تعليم مفهوم النهاية بتصحيح التصورات الخاطئة أو تعزيز التصورات الصحيحة. أحد الأمور المهمة الذي يجب أن ينتبه له الأستاذ هو أن الطالب يملك تصورات قبلية نابعة

من تجاربه السابقة عند تلقيه مفهوما مألوفاً في سياق جديد. قد يكون استعمال بعض المعلومات التاريخية حول الأسباب التي فرضت على الرياضياتيين ابتكار هذا التعريف مُساعداً في هذه الحالة. يمكن لدراسات لاحقة أن تبحث في نجاعة هذه الطريقة أو تجرّب طرائق أخرى لتسهيل انتقال الطلبة إلى تفكير رياضي متقدم في الجامعة.

5. قائمة المراجع:

- Chagwiza, C. J., Maharaj, A., & Brijlall, D. (2020). Formulating a Modified Genetic Decomposition for the Concept of 'Limit of a Sequence'. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 24(3), 333-347.
- Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME*. (pp. 322-326). Grenoble: France.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of mathematical behavior*, 15(2), 167-192.
- Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The journal of mathematical behavior*, 5(3), 281-303.
- Denbel, D. G. (2014). Students' Misconceptions of the Limit Concept in a First Calculus Course. *Journal of Education and Practice*, 5(34), 24-40.
- Duru, A. (2011). Pre-Service Teachers' Perception about the Concept of Limit. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 11(3), 1710-1715.
- Ervynck, G. (1981). Difficultés conceptuelles des étudiants de première année d'université lors de l'acquisition de la notion de limite d'une fonction. *Proceedings PME (Psychology of Mathematics Education)* (pp. 330-333). Grenoble: France.
- Fernández-Plaza, J. A., & Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 315-332.
- Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 251-268.
- Hazi, M. (2018). *Fonctions réelles d'une variable réelle: Limites, continuité et ... Cours détaillé et exercices résolus*. Alger: Office des Publications Universitaires.
- Juter, K. (2005). Students' attitudes to mathematics and performance in limits of functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), 91-110.
- Nagle, C. (2013, July). TRANSITIONING FROM INTRODUCTORY CALCULUS TO FORMAL LIMIT CONCEPTIONS. *For the Learning of Mathematics*, 33(2), 2-10.
- Nardi, E. (2007). *Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level*. (Vol. 3). New York: Springer Science & Business Media.

- Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(2), 193-216.
- Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 103-132.
- Sierpiska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 6(1), 5-67.
- Sierpiska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking; functions, limits, infinity, and proof. In D. Tall, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Grouws.
- Thomson, B. S., Bruckner, J., & Bruckner, A. (2008). *Elementary real analysis* (Vol. 1). United States of America: Prentice Hall (Pearson).
- Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.
- Williams, S. R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), 341-367.

اللجنة الوطنية للمناهج. (2005). برنامج الرياضيات للسنة الثانية من التعليم الثانوي للشعب: علوم تجريبية - رياضيات تقنية - رياضيات. الجزائر: وزارة التربية الوطنية.

اللجنة الوطنية للمناهج. (2006). برنامج الرياضيات للشعب رياضيات - تقني رياضي - علوم تجريبية، السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي. الجزائر: وزارة التربية الوطنية.

6. ملاحق:

1.6 أسئلة الاستبيان الموجه للطلبة

- (1 أ) من بين الجمل التالية، ضع دائرة على الجمل المناسبة "حسب فهمك".
 "نقول عن عدد ℓ إنه نهاية لدالة f لما يؤول x إلى عدد a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$) إذا تحقق:
- الجملة 1: كلما اقترب x من a فإن $f(x)$ تقترب من نهاية ℓ .
- الجملة 2: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- الجملة 3: النهاية ℓ هي آخر قيمة للدالة f لما يؤول x إلى عدد a .
- الجملة 4: النهاية ℓ هي قيمة تقترب منها الدالة لما يؤول x إلى عدد a لكن لا تصل إليها.
- الجملة 5: النهاية ℓ هي قيمة نحسبها فقط عند حدود مجموعة التعريف.
- الجملة 6: النهاية ℓ هي قيمة بحيث من أجل كل مجال مفتوح I مركزه ℓ فإنه يوجد مجال مفتوح J مركزه a بحيث تكون صورته محتواة في المجال I .
- (ب) الجمل التي تجد فهمها صعبا هي: 1 2 3 4 5 6
- (2) إليك تعريف نهاية دالة الذي أعطي في مادة التحليل:

"العدد ℓ هو نهاية الدالة f لما يؤول x إلى عدد a (أي $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$) " إذا تحقق الشرط التالي: (*) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$...

- (أ) هل تجد أن هذا التعريف يصف اقتراب $f(x)$ من ℓ عندما يؤول x إلى عدد a ؟ نعم لا
(ب) صف درجة فهمك لهذا التعريف: أفهمه جيدا أفهمه قليلا لا أفهمه
(ج) صف درجة سهولة أو صعوبة هذا التعريف: سهل جدا سهل صعب صعب جدا

2.6 أسئلة الاستبيان الموجه للأساتذة

1. طلبة الجامعة (خاصة السنة الأولى) لهم صعوبة في الانتقال من رياضيات المستوى الثانوي (تتميز بالحدس وحفظ وتطبيق خوارزميات الحساب) إلى رياضيات المستوى الجامعي (مستوى رياضياتي متقدم يتميز بالتفكير والبرهان):
موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما
2. المعارف التي لدى الطلبة من الثانوية يمكن البناء عليها لتعليم النهاية في السنة الأولى جامعي:
موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما
3. إليك تعريفا حدسيا غير رسمي لنهاية دالة حقيقية ذات متغير حقيقي حسب تلاميذ الثانوية:
"نهاية دالة f لما يؤول x إلى قيمة a هي قيمة ℓ تقترب منها الدالة عندما يقترب x من a "
أ. رغم أن هذا التعريف غير دقيق رياضياتيا لكن وجوده مهم لدى الطالب لفهم صحيح للنهاية:
موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما
ب. يزول هذا التصور الحدسي بعد تقديم التعريف الرسمي لنهاية دالة لطلبة الجامعة:
موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما
ج. تقديم أمثلة مضادة كافٍ لتوضيح ضرورة استعمال التعريف الإيسلوني بدل التعريف الحدسي:
موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما
د. فهم صحيح للنهاية لا يتطلب إزالة هذا التعريف الحدسي بل دمج مع التعريف الرسمي:
موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما

4. يجد الطلبة صعوبة في الانتقال من فهم غير رسمي للنهاية حسب المرحلة الثانوية "متمثل في كونها قيمة تقترب منها الدالة ويتضمن إجراءات الحساب فقط" إلى فهم رسمي "متمثل في كونها كيان رياضياتي له تعريف دقيق"؟

موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما

5. أكبر صعوبة تواجه الطلبة في درس النهاية هي صعوبة فهم واستعمال التعريف الرسمي:

موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما

6. استعمال أمثلة نمطية ونقليدية في حساب النهايات يعزز من التصورات الخاطئة:

موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما

7. اللغة التي يستعملها الأستاذ لها دور مهم في تكوين تصورات خاطئة لدى الطالب عن مفهوم النهاية (مثل تصور أن الدالة لا تبلغ نهايتها، أو النهاية موجودة فقط لما تكون الدالة مستمرة، ...)

موافق تماما موافق بدرجة كبيرة موافق بدرجة متوسطة موافق بدرجة بسيطة غير موافق تماما

8. هل هناك طريقة بيداغوجية أو فكرة معينة خاصة بك في شرح التعريف الرسمي للنهاية؟

لا، أستعمل طريقة عادية نعم، ...