Revue d'Economie et de Statistique Appliquée
Volume 23, number 01, June 2026
ISSN : 1112-234X EISSN : 2600-6642
Pages :197-213

MODÉLISATION DES QUEUES DE DISTRIBUTION PAR LA MÉTHODE DES EXCÈS AU-DELA D'UN SEUIL (PEAK OVER THRESHOLD): APPLICATION AUX INDICES BOURSIERS

[*] **Bekhta HAMADOUCHE:**
Maitre de conference b, Université djilali Bounama Khemis Miliana(Algerie)
Email : b.hamadouche@univ-dbkm.dz

Reçu le: 22/04/2026 **Accepté le :** 03/06/2026 **Publication en ligne le**: 28/06/2026

ABSTRACT:
In this paper, we will try, using the peak over threshold method, to model a dependency structure between several series of financial indices that come from different markets.To perform such a study, we model the tail of each series separately using the extreme value theory where we will introduce a graphic estimator "Hill estimator." Then the use of Kendall's tau will allow us to model the series and we will end up calculating the Value at Risk.

Keywords: Hill estimator, Peaks Over Threshold, extreme value theory, Generalized Pareto distribution (GPD).

RÉSUMÉ :
Dans cet article on va essayer, par la méthode des excès (peak over threshold) de modéliser une structure de dépendance entre plusieurs séries d'indices financiers qui viennent de différents marchés. Pour effectuer une telle étude, on modélise la queue de distribution de chaque série séparément en utilisant la théorie des valeurs extrêmes où on va introduire un estimateur graphique « estimateur de Hill ». Puis l'utilisation du tau de Kendall va nous permettre la modélisation bivariée des séries et on finira par le calcul de la Value at Risk.

Mots Clés: estimateur de Hill, Peaks Over Threshold, théorie des valeurs extrême, distribution de Pareto généralisée.

I. INTRODUCTION

La valeur à risque (Var) est largement considérée comme un indicateur classique du risque de marché, elle a était créée au début des années 1990. Elle est conceptualisée comme la perte maximale qu'un portefeuille peut subir sur une période donnée avec un niveau de

[*] Auteur correspondant

probabilité prédéterminé. La value at risk est une mesure quantitative destinée à résumer l'étendue du risque encouru (Jorion, 2007).

Mais la VaR doit être complétée par l'utilisation d'un programme qui prend en compte les propriétés des queues de distributions et les dépendances qui existent entre les différents produits financiers et permet une description objective de cette dépendance.

Dans ce travail, on propose la théorie des valeurs extrême et les mesures de dépendance non linéaire telles que le tau de Kendall comme un outil pour la construction d'un tel programme.

la théorie des valeurs extreme et les mesures de dépendance non linéaire présentent dans leurs ensemble de nombreux avantages : la relation entre les séries ne nécessite pas intrinsèquement de linéarité, encore moins de monotonie. Généralement, les séries financières présentent une interdépendance accrue en période de difficultés financière (d'origine politique ou géopolitique ou encore économique) par rapport aux conditions stables du marché (pas de nouvelle information). Ce qui engendre une dépendance de queues. Ce qui autorise l'étude d'une partie de chaque série et non pas la série entièrement. Et par conséquence la prise en compte des faits stylisés des séries financière (leptokurticité, asymétrie, dépendance des queues)…etc.

Pour cela, l'objet de notre travail est de modéliser les queues de distribution de plusieurs indices boursiers à travers la théorie des valeurs extrême et la théorie des copules pour aider à la mesure de la VaR.

La section II est consacrée à la présentation de quelques éléments théoriques sur les mesures de dépendance , puis on présentera dans la section III la méthode des excès qui va permettre la modélisation des queues de distribution,

La section IV va être réservée pour les résultats de l'application de la théorie des copules et la théorie des valeurs extrêmes sur les queues de distribution de nos trois séries journalières d'indice boursier (CAC 40, S&P500 et NEKEI 225).

II. MESURE DE DEPENDANCE ET DE CONCORDANCE

Les copules décrivent la structure de dépendance d'un vecteur aléatoire.

Bien que le coefficient de corrélation linéaire de Bravais- pearson constitue une mesure de dépendance conventionnelle, son efficacité demeure tributaire de l'hypothèse de linéarité et de la gaussianité des distributions. Ces conditions sont rarement vérifiées dans le cadre empirique de la finance. Afin de pallier ces limites , il s'avère nécessaire de mobiliser

des indicateurs fondés sur les concordances et discordances au sein des échantillons. A cet égard, le recours à des coefficients de corrélation non linéaires et non paramétriques, tel que le tau de Kendall (Kendall, 1984) ou le Rho de Spearman, permet une appréciation plus robuste et flexible des relations de dépendance complexe:

De manière générale, deux variables aléatoires X et Y sont dites concordantes lorsque les variables aléatoire X et Y prennent de fortes valeurs (respectivement, faibles valeurs) simultanément.

Selon Nelson (NELSON.R, 2007) Le tau de Kendall entre deux variables aléatoires X et Y est défini par

$$\tau(X,Y) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \succ 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \prec 0]$$

avec $(X_1, Y_1)\ et\ (X_2, Y_2)$ deux couples indépendans de (X, Y). (NELSON.R, 2007)

et il définit (NELSON.R, 2007) le rho de Spearman entre deux variables aléatoires X et Y par

$$\rho(X,Y) = corr\ \left(F_X(X), F_Y(Y)\right)$$

Tandis que l'évaluation de la dépendance s'appuie traditionnellement sur des indicateurs statistiques , sa modélisation structurelle requiert l'implémentation de fonctions de dépendance spécifiques, au premier rang desquelles figurent les copules. Ce cadre théorique offre l'avantage d'intégrer les mesures de dépendance conventionnelles (telles que la correlation linéaire , le tau de Kendall et leRho de Spearman)en les définissant directement à partir des paramètres intrinsèques de la copules, notamment dans le cadre de modèles paramétriques.

III. METHODE DES PEAKS OVER THRESHOLD ET LOI DE PARETO GENERALISEE

Au cours des dernières années, la théorie des valeurs extrêmes (TVE) a connu un essor considérable, aussi bien sur le plan théorique que dans ses applications, qui se sont étendues à plusieurs domaines, notamment la météorologie, la finance, l'assurance.

La théorie des valeurs extrêmes a été élaborée, dans le but d'estimer et d'évaluer la probabilité de survenue d'évènements rares et permet aussi de fournir des estimateurs robustes avec même un nombre de données limité.

Son cadre théorique s'appuie à la fois sur l'étude de la convergence en loi des maxima ou des minima des variables aléatoires indépendantes après une normalisation, et sur des procédés d'extrapolation.

Les distributions obtenues dans ce cadre sont bien identifiées sous le nom de lois des valeurs extrêmes (COLES, 2001).

Inscrite dans le cadre de la théorie des valeurs extrême, la méthode des excès ou la méthode de Peaks Over Threshold (POT), se concentre sur la modélisation des queues de distribution cette technique permet d'extrapoler le comportement des données afin d'évaluer la fréquence des évènements rares dépassant les maxima enregistrés.

La fonction de répartition des excès au-delà d'un seuil élevé u est donnée par (BALKEMA A., DE HAAN L) :

$$F_u(y) = Pr\{X - u \leq y / X \succ u\}$$

Pour $0 \leq y \leq x_0 - u$, on a généralement $x_0 = +\infty$

La fonction de distribution des excès représente la probabilité qu'une certaine perte dépasse le seuil u d'au plus une quantité y, sachant qu'elle dépasse u. cette fonction s'écrit sous la forme :

$$Fu(y) = \frac{Pr\{X-u\leq y, X>u\}}{Pr(X>u)} = \frac{F(y+u)-F(u)}{1-F(u)}.$$

Le théorème de Pickands-Balkema- de Haan constitue l'un des résultats théorique fondamentaux de la théorie des valeurs extrêmes (Balkema, A. A., & de Haan, L, 1974).

Selon ce théorème, si la fonction de distribution F appartient à l'un des trois lois limite des TVE (Fréchet, Gumbel ou Weibull), la fonction de distribution F_u des excès au-delà d'un seuil u converge vers une loi de pareto généralisée (GPD) (EMBRECHTS, KLUPPERLBERG AND MIKOSH, 1997) :

$$\lim_{u \to x0} sup\left|F_u(y) - G_{\xi,\beta(u)}(y)\right| = 0$$

Dans le cas pratique, la distribution inconnue des données, excédant un seuil suffisamment élevé converge vers une distribution de Pareto généralisée

$G_{\xi,\beta}$: la fonction répartition de Pareto généralisée (GPD) de paramètres ξ et β définie par :

$$G_{\xi,\beta} = 1 - \left(1 + \frac{\xi\, x}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\xi}} \; si\; \xi \neq 0$$

Le paramètre ξ est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution et β est un paramètre d'échelle.

La valeur attribuée au paramètre ξ renseigne sur le poids des queues des distributions c'est à dire :

- plus l'indice ξ a une valeur élevée plus les queues sont épaisses

- l'indice de queue ξ est positif indique une probabilité plus forte de survenance de pertes extrêmes dans la queue gauche, par rapport à celle estimée par la loi normale[(Longin, 1996).

- le cas de $\xi > 0$ présente un intérêt particulier en gestion de risque, puisque la loi de pareto généralisée y est caractérisée par une queue épaisse(McNeil, 1997) .

le risque lié à un investissement est d'autant plus élevé que l'indice de queue gauche(associé aux rendements les plus faibles) est important.(McNeil, 1999).

IV. APPLICATION

A. Généralités Et Description Des Données

1 Présentation Des Séries

Les données utilisées dans cette partie correspondent à des historiques journaliers de trois indices qui viennent de trois bourses différentes et qui s'étalent sur la période allant de 03/01/2022 au 31/12/2025 soient 1022 observations pour chaque series (Investing.com, 2026):

- CAC 40 : est le principal indice boursier de la place de Paris. Il prend son nom de l'ancienne « Compagnie des Agents de Change »

- S&P 500 : il est possédé et géré par Standard & Poor's, c'est l'indice le plus représentatif du marché boursier américain.

- Le Nikkei 225 : est le principal indice boursier de la bourse de Tokyo..

2 La stationnarité :

L'étude de stationnarité de chaque série en niveau montre que l'hypothèse de la présence d'une racine unitaire est acceptée, c'est-à-dire que les trois séries sont non stationnaires, par ailleurs ces séries vont être remplacés par leurs séries de rendements logarithmiques et on note :

- DCAC40 est la série des rendements logarithmiques pour l'indice CAC 40
- DSP500 est la série des rendements logarithmiques pour l'indice S&P 500,
- DNIKKEI est la série des rendements logarithmiques pour l'indice NIKKEI 225.

Chacune des trois séries comporte 1022 observations, les statistiques descriptives qui correspondent chaque série sont résumées dans le tableau suivant :

Tableau 01 : Statistiques descriptives des series (rendement) réalisée par l'auteurs à partir des résultats obtenus sous Eviews

Statistiques	DCAC40	DSP500	DNIKKEI
Moyenne	0.000119	0.000564	0.000374
Médiane	0.000458	0.001007	0.000640
Maximum	0.068828	0.097366	0.090895
Minimum	-0.050929	-0.132341	-0.061609
Ecart type	0.010444	0.013853	0.011199
Skewness	-0.183796	-0.637435	0.051554
Kurtosis	7.047638	16.83243	9.474225
J.B	703.4128	7847.100	1748.673

On remarque que les trois séries (Table N°1) présentent un excès de Kurtosis ce qui montre que les queues de distribution sont plus épaisse que celle d'une loi normale. Elles possèderaient donc beaucoup plus de valeurs extrêmes.

La divergence par rapport au cadre normal est également marquée au niveau du Skewness : l'indice S&P 500 et l'indice CaC40 présentent une asymétrie à gauche, ce qui montre que ces indices auraient enregistré plus de rentabilités inférieures à leur moyenne au cours de la période que ce que prévoit le cadre gaussien.

A l'inverse, la distribution de l'indice nikkei 225 révèle une asymétrie significative à droite : il y aurait donc plus de rentabilités supérieures à la moyenne.

Le rejet de l'hypothèse de normalité des distributions de rentabilités quotidiennes des trois séries est confirmé par le test de Jarque-Berra[1]. En effet, aucune des distributions de rentabilités ne peut être assimilée à une loi normale au seuil de 5% .

B. modélisation des queues de distribution

Comme nous avons énoncé précédemment et à partir de l'excès de Kurtosis enregistré ; les queues de distribution sont plus épaisses que celles de la loi normal : c'est-à-dire qu'elles possèderaient beaucoup plus de valeurs extrêmes.

Cette observation nous a conduits à penser à une modélisation des queues gauches de distributions.

On va essayer dans un premier pas d'estimer la queue de distribution de chaque série à part en utilisant la méthode des excès (peak over threshold), puis on calcule le taux de Kendall pour chaque paire de séries.

Utilisant ces valeurs, on déduit le paramètre de dépendance empirique α pour chaque copule archimédienne utilisée dans cette étude.

C. Modélisation univariée des queues : méthode des excès et distribution de Pareto généralisée

En s'appuyant sur le théorème de Pickands- Balkema-de Haan (Balkema, A. A., & de Haan, L, 1974), il s'agit d'estimer la loi limite des queues de distribution des trois indices boursiers afin d'analyser le comportement des excès situés au-delà d'un seuil et d'apprécier le risque extrême de ces variables.

1- Détermination des seuils et l'estimateur de Hill :

Dans une première étape, il convient de choisir le seuil au-delà duquel sera construite la série d'excès sur laquelle portera l'estimation des paramètres de la loi GPD :

$$G_{\xi,\beta} = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\xi}} \; si \; \xi \neq 0$$

Dans cette partie nous déterminons le seuil de chacune des queues à partir du graphique de Hill (HILL, 1975) lequel se définit par :

[1]D'après la statistique de la loi de χ^2 , la valeur critique au seuil de 5% est égale à 5,9915. Dans notre cas, la statistique Jarque-Bera (JB)[1] pour chaque série dépasse largement cette valeur critique.

$$\left\{\left(N_u, H^{-1}_{N_{U,n}}\right), 1 \le Nu \le n-1\right\}$$

avec Nu, le nombre d'observations dépassant le seuil u et HNu,n l'estimateur du paramètre ξ de Hill de la loi GPD.

$$H_{N_{U},n} = \frac{1}{Nu}\sum_{i=1}^{Nu}\log\frac{X_{n-i+1,n}}{X_{n-i}}$$

Cette méthode consiste à identifier graphiquement le nombre d'excès à partir duquel l'indice de queue ξ atteint un certain degré de stabilité.

Comme le propose Dress, de Haan et Resnick (DRESS, H. L DE HAAN, AND S RESNICK, 1998), cette méthodologie est appropriée pour les distributions des valeurs extremes qui convergent vers une GPD.

Dans notre étude on s'intéresse particulièrement aux queues gauches des distributions qui représentent les pertes.

Figure 01 : estimation de ξ paramètre de la GPD utilisant la méthode de Hill pour la queue gauche de l'indice Cac 40 (réalisée par l' auteur sous Excel)

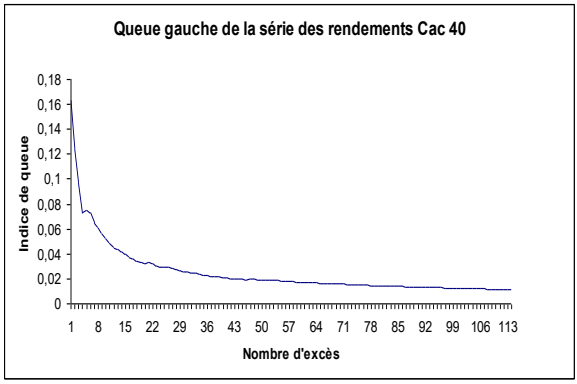


Figure 02 : estimation du paramètre ξde la loi GPD pour l'indice S&P 500

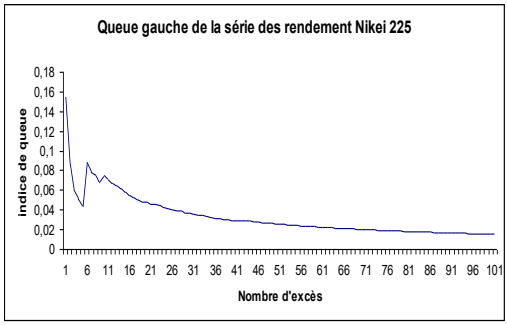
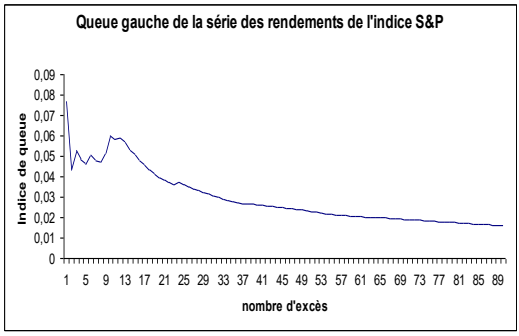


Figure 03 : estimation du ξde la loi GPD pour l'indice NIKEI 225.



D'après les graphes précédents, le choix de 40 excès pour les trois séries correspondantes à un seuil de 0,02 semble pertinent dans la mesure où les trois indices de queue deviennent relativement stables au-delà de ce seuil.

Après avoir identifié un seuil pour chacune des queues (queues gauches) et former la série des excès correspondants, les estimateurs de Hill (ξ, β) de la loi GPD sont déterminés :

Tableau 02 : estimateurs de Hill des paramètres de la loi GPD

	La série DCAC40	La série DS&P500	La série NIKEI
Nu	40	40	40
Le seuil :u	0,01995	0,01995	0,01995
L'indice de queue ξ	0,0212	0,0261	0,0290
Le paramètre d'échelleβ	0,0143	0,0204	0,0222

L'analyse de ces résultats révèle que pour les trois indices CAC 40, S&P500 et le NIKEI 225, le paramètre $\hat{\xi}$de la distribution GPD estimé est positif. Cette observation confirme les résultats des études sur les données financières : des paramètres $\hat{\xi}$ positifs (Frommant, 2005).

Cette observation indique que les queues sont épaisses, Estimation du tau de Kendall

Le tau de Kendall est un indicateur statistique de concordance largement utilisé. Il mesure le degré d'association entre les rangs d'observations, contrairement au coefficient de corrélation de Bravais Pearson, qui évalue la relation entre les valeurs réelles des observations.

Le tau de Kendall présente l'avantage de s'exprimer en fonction de la copule du couple de variables aléatoire.

$$\tau = \frac{[\text{Nbre de paires concordantes}] - [\text{Nbre de paires discordantes}]}{\text{Nbre total de paires}}$$

D. Tau de Kendall et copules archimédiennes

Une caractéristique importante de la copule archimédienne, qui sera utilisée dans la suite : c'est qu'il existe une formule liant le paramètre de dépendance α du générateur φ_α et le taux de Kendall.

Pour une copule archimédienne Genest et Mackay (Genest, C. and R.J . MacKay, 1986) ont montré que ce taux de Kendall dépend du générateur selon la formule suivante :

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi_\alpha(t)}{\phi'_\alpha(t)}dt \qquad (1)$$

Pour notre étude empirique, la classe des copules archimédiennes est d'un intérêt fondamental. En effet, à partir de données réelles, nous estimons le taux de Kendall qui permet de calculer le paramètre de dépendance pour différents générateurs par la formule (1) et alors la construction de la copule correspondanteC_α.

Les deux copules archimédiennes que nous utilisons dans le présent document sont les suivantes :

- La copule de Gumbel (Gumbel, 1958) :$C_\alpha^G(u,v) = exp\big(-(|log\,u|^\alpha + |log\,v|^\alpha)^{1/\alpha}\big), \alpha \in [1,\infty[$.

- La copule de Cook et Johnson (Cook, R.D .and M.E.Johnson, 1981) :

$$C_\alpha^{CJ}(u,v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha \in]0,+\infty[$$

1- Calcul du tau de Kendall:

Le logiciel Eviews 6 nous a permis le calcul direct des valeurs empiriques $\hat{\tau}$ De tau de Kendall entre les différentes paires de séries : (DCAC40,DS&P500), (DS&P500,DNIKEI225) et entre (DCAC40,DNIKEI225)

Nous reportons les résultats dans le tableau suivant :

Tableau 03 : estimation du tau de Kendall réalisée par l' auteurs à partir des résultats obtenus sous Eviews

Les séries	$\hat{\tau}$
(DCAC40,DS&P500)	$\hat{\tau}1$ =0,33
(DS&P500,DNIKEI225)	$\hat{\tau}2$ =0,2259
(DCAC40,DNIKEI225)	$\hat{\tau}3$ =0,0955

2- Test de significativité du tau de Kendall

Kendall (1948) a montré que pour n > 30, on peut considérer que τ est approximativement distribué normalement avec une moyenne $\mu_\tau = 0$et un écart type $\sigma_\tau = \sqrt{2(2n+5)/\big(9n(n-1)\big)}$.

On peut donc tester l'hypothèse :

H0 :$\tau = 0$ contre H1 : $\tau \neq 0$

en calculant la statistique du test :

$$Z_\tau = (\tau - \mu_\tau)/\sigma_\tau$$

$$Z_\tau = \tau\sqrt{9n(n-1)/\big(2(2n+5)\big)}$$

qui obéit approximativement à une loi normale centrée réduite. Les résultats du test sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 04 : test de significativité du tau de Kendall réalisée par l'auteurs

Statistique calculée	Valeur critique au seuil de 5%	Décision
$z_{\tau 1}$= 22,1453	1,96	Rejet de H0
$z_{\tau 2}$= 15,1595	1,96	Rejet de H0
$z_{\tau 3}$= 6,4083	1,96	Rejet de H0

Conclusions du test :

- pour les trois séries le tau de Kendall est significativement différent de 0,
- donc il existe des dépendances entre les différents marchés.
- La significativité du tau de Kendall implique la significativité des paramètres des copules archimédiennes utilisées.

E. Estimation des paramètres des copules:

On calcule le paramètre α de la copule archimédienne que nous nous situons à la queue de la distribution jointe des paires : (DCAC40,DS&P500), (DS&P500,DNIKEI225) et (DCAC40,DNIKEI225).

Utilisant la formule (1) et les valeurs de $\hat{\tau}$ données dans le tableau précédent, on calcule facilement le paramètre de dépendance $\hat{\alpha}$ des différentes copules archimédiennes comme suit :

a) $\hat{\alpha} = \frac{1}{1-\hat{\tau}}$ pour la copule de Gumbel ;

b) $\hat{\alpha} = \frac{2\hat{\tau}}{1-\hat{\tau}}$ pour la copule de Cook et Johnson

Les valeurs de $\hat{\alpha}$ que nous obtenons pour les différentes paires sont reportées dans le tableau

Tableau 05 : les paramètres de la copule de Gumbel et la copule de Cook and Jhonson(réalisée par les auteurs)

	(DCAC40,DS&P500)	(DS&P500,DNIKEI225)	(DCAC40,DNIKEI225)
Gumbel	1,4925	1,2918	1,1061
Cook et Johnson	0,9850	0,5836	0,21

4.1.1 Calcul de la value at risk du portefeuille étudié via les copules :

Dans cette partie on a utilisé les résultats précédentes de calcule des copules pour tirer la value at risk du portefeuille.

Pour ce faire on calcule la VaR de chaque indice utilisant la simulation historique

L'historique des prix permet de construire la distribution empirique et à partir de laquelle on déduit le quantile (c'est-à-dire la VaR).

Le tableau suivant résume les résultats de calcul de la VaR obtenue par la méthode historique .

Tableau 06: VaR calculée par la méthode historique pour un jour (réalisée par les auteurs

	DCAC40	DSP500	DNIKKEI 225
VaR 1%	0,0495	0,0508	0,0463

Nous choisissons la formule suivante pour le calcule de la VaR de notre portefeuille

$$VaR^{portefeuille} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} VaR_i^2 + 2\sum \alpha_{ij} VaR_i . VaR_j}$$

Où : VaRi est la value-at-risk de l'indice i

α_{ij} : est le paramètre de la copule des deux indices i et j

La VaR du portefeuille sous l'hypothèse de la copule de Gumbel est :

$VaR^{portefeuille} = 0{,}0251$

La VaR du portefeuille sous l'hypothèse de la copule de Cook et Johnson est :

$VaR^{portefeuille} = 0{,}0152$

V. CONCLUSION

La methode de peak over Threshold et le tau de kendall constituent un outil puissant pour la modélisation bivariée des dépendances dans les queues de distribution.

Dans ce travail, nous avons essayé, à l'aide des fonctions de dépendances archimédiennes, de mesurer la dépendance entre plusieurs des séries d'indices financiers qui viennent de différents marchés.

Pour effectuer une telle étude, nous avons modélisé la queue de leur fonction de distribution conjointe. Cette approche nous a permis de comprendre l'interdépendance existante entre les différents couples de marché.

L'étude de relation entre les queues nous informe sur la quantité de dépendance entre des queues de distribution. C'est un outil important pour l'étude de la survenance simultanée de valeurs extrêmes.

Dans notre cas nous avons utilisé trois séries journalières de trois indices différents : CAC 40, S&P 500, Nikkei 225.

Dans un premier pas, on a fait une analyse descriptive des séries : la stationnarité, l'analyse des quatre premiers moments et le test de l'hypothèse de normalité des rendements logarithmiques ; cette dernière a été rejetée puisque nous avons marqué un excès de Kurtosis : c'est-à-dire une queue de distribution épaisse par rapport à celle d'une loi normale.

Cette observation nous a conduits à penser à une modélisation des queues de distribution basée sur la méthode des excès qui est également connue sous le nom de Peaks Over Threshold (POT). A partir de cette modélisation, il devient possible d'estimer la probabilité d'occurrence d'évènements rares au-delà des plus grandes valeurs observées.

Le théorème de Pickands-Balkema- de Haan, qui est le résultat théorique central de la théorie des valeurs extrêmes, nous a permis d'approcher la loi inconnue des queues vers

une distribution de Pareto Généralisée (la loi GPD) qui est définie par trois paramètres $(u,\ \xi,\ \beta)$:

u : le seuil

ξ : c'est l'indice de queue, il est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution, la valeur prise par le paramètreξ informe sur le poids des queues dans la distribution parente.

β :c'est un paramètre d'échelle.

Le seuil et l'indice de queue ont été déterminés à l'aide de l'estimateur de Hill, on a opté pour le choix de 40 excès c'est-à-dire un seuil de 2% pour les trois séries. Puis, on conclut une formule liant le paramètre estimé et la value at risk.

Ensuite, on a passé à une modélisation bivarié et on a commencé par le calcul du tau de Kendall entre les différentes séries.

Nous avons conclu du test de significativité du tau de Kendall que :

- Premièrement : il existe une interdépendance entre les différents marchés, cette dépendance est beaucoup plus importante entre le CaC40 et le S&P500

- Deuxièmement, la significativité du tau de Kendall implique la significativité du paramètre de la copule.

Utilisant les formules théoriques liant le paramètre de la copule et le tau de Kendall, on a calculé le paramètre de la copule de Gumbel et celui de la copule de Cook and Johnson. On a choisi ces deux copule du fais de la simplicité des calcules de leurs paramètres à partir du tau de Kendall. En réalité le chois de la copule dépend de la loi marginale des séries étudiées, et puisque nous avons la théorie des valeurs extrêmes et la loi de Pareto Généralisé comme loi marginale de chaque queue, le choix de la copule de Gumbel semble pertinent (car la copule de Gumbel est la copule des extrêmes).

Après avoir identifié les copules et leurs paramètre, nous avons conclu notre travail par le calcul de la value at risk du portefeuille étudié utilisant une formule liant le paramètre de la copule et les VaR calculés des trois séries. Enfin, L'extension de ce travail sera d'utiliser les techniques d'estimation de la VaR (comme la simulation de Monte Carlo, la simulation historique,…etc) pour l'appliquer directement sur le portefeuille.

VI. REFERENCES

[1] Abdous, B., Genest, C., R´emillard, B.: Dependence properties of meta-elliptical distributions. In: Statistical modeling and analysis for complex data problems, pp. 1–15. Springer (2005)

[2] BALKEMA A., DE HAAN L, « *Limit distribution for order statistics* » SIAM Theory of probability and its applications, vol. 23, n. 2,1978, pp. 341-358

[3] Bernardara, P., Schertzer, D.& Lang, M. (2005). Intercomparison of models and estimation techniques of extreme value in hydrology. Dans Workshop on RiskAnalysis and Extreme Value, Paris

[4] COLES S., An Introduction to Statistical Modelling of Extremes Values, Springer Series in statistics, Springer-Verlag, London, 2001.

[5] COOK, R.D .AND M.E.JOHNSON, 1981, A family of distributions for modelling non elliptically symmetric multivariate data, Journal of the Royal Statistical Society,B,43,210-218.

[6] DE HAAN L., FERREIRA A. (2006) Extreme Value Theory: An Introduction Springer-Verlag

[7] DRESS, H. L DE HAAN, AND S RESNICK.1998 How To Make A Hill Plot.Timbergen institute, Erasmus Universitry, Rotterdam.

[8] EMBRECHTS P., RESNICK S.I., SAMORODNITSKY G. (1999) Extreme value theory as a risk management tool North American Actuarial Journal, vol. 3, n.2, pp.30-41

[9] EMBRECHTS, KLUPPERLBERG AND MIKOSH, 1997. Modelling Extremal Events For Insurance And Finance.Springer

[10] Fréchet M. (1927) Sur la loi de probabilité de l'écart maximum Ann. Soc. Math. Polon., vol. 6, pp. 93-116 Galambos J. (1987) The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics R.E Krieger publishing Company

[11] GUMBEL, E.J., 1958, Distributions à plusieurs variables don't les marges sont données, Comptes Rendus de l'Acadmie des Sciences Paris,246,2717-2719.

[12] HILL B.M. (1975) A simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution Annals of Statistics, 3(5), pp. 1163-1174

[13] Jenkinson, A.F. (1955) The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 81, 158-171

[14] KOTZ S., NADARAJAH S, « *Extreme Value Distributions* » Imperial College Press, London,2000.

[15] LONGIN F, The asymptotic distribution of extreme stock market returns , Journal ofBusiness, volume 69, N°3,1996.

[16] LONGIN, F, « From VaR to stress testing : the extreme value approach », journal of Banking and finance,1999.

[17] MATHLOUTHI IMAN, ZENAIDI AMEL, *« théorie des valeurs extrêmes Vs méthodes classiques de calcul de la VaR »* : Application au Tunindex, Institut des Hautes Etudes Commerciales, Carthage, Tunisie.

[18] MCNEIL AJ, « estimating the tails of loss severity distributions using extreme Value theory », ASTIN Bulletin27 :117-137 ,1997.

[19] MCNEIL AJ, FREY R, « estimation of tail- related risk measures for heteroscedastic financial time series : an extreme value approach », Journal of Empitrical Finance7 :271-300,2000.

[20] NEFTCI SN, « Value at Risk calculations, extreme events, and tail Estimation », The journal of Derivatives Spring ,2000:1-15.

[21] NELSON.R, « *un introduction to copulas »*, Springer , New York,2007.

[22]Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (3r d ed.). McGraw-Hill.