

ESTIMATION BAYÉSIENNE D'UN MODÈLE ARMA AVEC EFFETS GARCH APPLICATION À LA VARIABLE TAUX DE CHANGE RÉEL

*** Abdelaaziz MOHAMMEDI:**

Laboratoire de Modélisation des Phénomènes Stochastiques (LAMOPS)

Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée

Email : mohammedi.abdelaaziz@enssea.edu.dz

Nadia LABOU :

Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée

Email : labou.nadia@enssea.edu.dz

Reçu le : 24/03/2025 **Accepté le :** 19/10/2025 **Publication en ligne le :** 09/12/2025

ABSTRACT:

This paper focuses on modeling the fluctuations of the real exchange rate (DA/USD) over the period from August 19, 2013, to May 30, 2024, using an ARMA model with GARCH effects. The estimation method employed is the Bayesian approach, implemented through Gibbs sampling. The objective is to understand Bayesian estimation methods and their application to dynamic models in econometrics. The results indicate that all parameters of the ARMA (1,1) model are statistically significant at the 5% level. Furthermore, the parameters of the GARCH(1,1) model related to variance satisfy the conditions of positivity and variance stationary.

Keywords: exchange rate, Bayesian estimation, Gibbs sampling, ARMA-GARCH, JAGS.

RESUME:

Cet article se concentre sur la modélisation des fluctuations du taux de change réel (DA/USD) entre le 19 août 2013 et le 30 mai 2024, en utilisant un modèle ARMA avec des effets GARCH. La méthode d'estimation utilisée est la méthode bayésienne avec application de l'échantillonnage de GIBBS. L'objectif est de comprendre les méthodes d'estimation bayésiennes et leur application aux modèles dynamiques en économétrie. Les résultats ont également montré que l'ensemble des paramètres du modèle ARMA(1,1) sont statistiquement significatifs au seuil de 5 %. De plus, les paramètres du modèle GARCH(1,1) relatifs à la variance satisfont les conditions de positivité et de stationnarité de la variance.

Mots clés: taux de change, estimation bayésienne, échantillonnage de GIBBS, ARMA-GARCH, JAGS.

* Abdelaaziz MOHAMMEDI

I. INTRODUCTION

En 1982, dans le cadre d'un projet d'études portant sur des données macroéconomiques, notamment l'inflation au Royaume-Uni (ENGEL, 1982), ENGLE a introduit une classe de modèles. Il a été constaté que les modèles économétriques classiques, tels qu'ARMA, qui supposent une volatilité constante, ne parviennent pas à expliquer certaines données, lesquelles sont souvent regroupées en période de fortes variations. Ces regroupements correspondent à des phases où les fluctuations deviennent plus marquées que celles observées dans l'ensemble de la série, ce qui les rend atypiques pour un modèle standard. Ce phénomène est particulièrement notable dans les séries financières, où les périodes de forte variation sont souvent concentrées (par exemple, lors de périodes d'incertitude économique ou de tensions sur les marchés).

Les modèles proposés par ENGLE sont appelés les modèles ARCH (Autorégressif Conditionnel Hétéroscédastique), leur principal avantage réside de la prise en compte explicite de la variation temporelle de la volatilité (l'hétéroscédasticité) (**Sami & Sabrine, 2021, P.02**). En 1986, Bollerslev a introduit une extension de ces modèles, appelés modèles GARCH (Hétéroscédasticité Conditionnelle Auto-Régressive Généralisée). Ces modèles se sont avérés essentiels pour appréhender les fluctuations des séries temporelles financières, contribuant ainsi à une meilleure compréhension des risques financiers et à la prise de décisions économiques éclairées. Ci-après, un ensemble d'études antérieures ayant appliqué ces modèles, parmi lesquelles on peut citer :

- **Khiari R. et Boudah A. (2020)** : ont mené une étude approfondie sur la volatilité des rendements des actions de la Bourse des Émirats arabes unis. Ils ont utilisé un modèle ARMA(1,1) – GARCH(1,1) pour analyser la période du 15 février 2013 au 15 février 2018. Ce modèle s'est avéré statistiquement significatif au seuil de 5 %, et aucune hétéroscédasticité résiduelle n'a été détectée au retard 1. En outre, il a été constaté que les fluctuations des rendements se caractérisent par une persistance complète.

- Par ailleurs, dans leur article de **(2021), Ben Al-Bar M. et Gharbi H. et Badruni I.** Ont également utilisé le même modèle ARMA(1,1) – GARCH(1,1) — après l'avoir statistiquement préféré parmi plusieurs modèles candidats — pour modéliser la volatilité induite par la pandémie de COVID-19 sur l'indice CAC 40 de la Bourse de Paris. Leur analyse s'est appuyée sur une série temporelle de 1328 observations.

- **BOUMAALI D. et MESBAHI M. (2016)** : Ils ont modélisé le taux de change (dinar algérien/euro) dans une optique de prévision, en combinant un modèle linéaire ARMA et des modèles non linéaires (ARCH/GARCH) permet de prévoir les fluctuations de la variance, sur des données mensuelles couvrant la période de février 2000 à décembre 2011. Le modèle sélectionné est un MA(1) – GARCH(1,1), choisi en raison de ses performances supérieures en matière de prévision.

-CHIKHI M. (2011) : Dans son article, l'auteur présente une modélisation des flux de trésorerie au bureau de poste de la wilaya de Ouargla, en utilisant un modèle ARIMA–GARCH qui combine une composante de marche aléatoire et une variance conditionnelle hétéroscédastique. L'analyse a été appliquée à une série chronologique hebdomadaire couvrant la période allant de 2006 à 2008. Après estimation par la méthode du maximum de vraisemblance, le modèle retenu est un ARIMA (0, 1,1) –GARCH(1,1), en raison de sa capacité à fournir des prévisions à court terme plus pertinentes que celles produites par un modèle de marche aléatoire.

- I M Md Ghani. et H A Rahim. (2019) : Dans leur article, les auteurs ont généré vingt modèles issus de la famille ARMA(R, M) –GARCH (p, q) afin de modéliser la variable S.M.R20, un type de caoutchouc naturel caractérisé par une forte volatilité et des distributions à queues épaisses, ce qui nuit à la précision de l'estimation des paramètres et des prévisions. L'étude porte sur 1953 observations quotidiennes. La sélection du modèle optimal s'est opérée selon plusieurs critères de performance tels que le MSE, le RMSE, et l'AIC. Le modèle ARMA (1, 0) –GARCH (1, 2) a été sélectionné pour sa performance optimale, et il est utilisé pour des prévisions sur vingt jours à venir.

Les études précédentes ont démontré une utilisation méthodique du modèle économétrique objet de notre recherche, en s'appuyant principalement sur des méthodes d'estimation classiques telles que les moindres carrés ordinaires ou la méthode du maximum de vraisemblance. Cependant, quelle que soit le paramètre inconnu à estimer par ces méthodes, le statisticien classique la considère comme une quantité fixe - soit cette valeur appartient à un intervalle de confiance au niveau de risque α , soit elle n'y appartient pas. Autrement dit, toute repose exclusivement sur les données observées. Néanmoins, cette validité statistique ne se vérifie que sous condition d'une taille d'échantillon suffisamment importante, alors que, dans la plupart des cas empiriques, les données disponibles sont limitées (BOREUX, PARENT, & BERNIER, 2010, P. 31).

C'est dans ce contexte qu'a émergé une approche moderne, fondée sur une logique différente de celle du paradigme fréquentiste : elle attribue un caractère aléatoire au paramètre à estimer. Ce dernier suit alors une loi de probabilité antérieure appelée distribution a priori, totalement indépendante de l'échantillon utilisé (Robert, 2013, P.01). L'approche bayésienne a ainsi été mobilisée dans de nombreuses études, parmi lesquelles on peut citer, à titre d'exemple :

-Moussi O (2010) : Elle a modélisé le prix annuel du baril de pétrole sur la période allant de 1861 à 2007, en utilisant un modèle autorégressif avec rupture en moyenne. Ce modèle suppose que le prix du baril de pétrole à l'instant t dépend des prix passés, ainsi que d'un événement aléatoire susceptible de provoquer une variation soudaine des prix, selon trois scénarios possibles : une hausse, une baisse ou une stabilité.

L'objectif de l'étude était de prévoir le prix du baril de pétrole. La méthode bayésienne a été utilisée pour l'estimation. Cette approche intègre les connaissances a priori sur les paramètres à estimer et les combine avec les données disponibles afin de déterminer la densité a posteriori des paramètres, en recourant à l'algorithme de Gibbs et au logiciel WinBUGS. Le modèle a bien reflété la dynamique des prix du pétrole, les valeurs estimées étant largement cohérentes avec les valeurs observées. Il a également démontré sa capacité à représenter les fluctuations du marché.

-Labou N .et Moussi O (2015) : Elles ont estimé un modèle VAR en utilisant des séries temporelles multivariées incluant : le taux de change (DA/USD), (DA/EURO), (EURO/USD), en étudiant également la relation entre ces séries et le prix du pétrole, sur la période allant de janvier 1999 à janvier 2015, soit un total de 193 observations mensuelles. Par la suite, un modèle spécifique à la série DA/USD a été estimé, d'abord en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, puis selon une approche bayésienne, dans le but d'évaluer la proximité des estimateurs obtenus par les deux méthodes.

Après avoir effectué un test de cointégration entre les trois séries de taux de change, il s'est avéré qu'il n'existait pas de relation de cointégration. En conséquence, les chercheuses ont opté pour un modèle VAR d'ordre 2 , ce choix étant justifié par les plus faibles valeurs des critères d'Akaike et de Schwarz. Les résultats ont montré une convergence des coefficients estimés par les deux approches, ce qui renforce la crédibilité du modèle retenu et met en évidence la capacité de l'approche bayésienne à fournir des résultats cohérents avec ceux issus des méthodes classiques.

-UMBA G.B. (2017) : Il a réalisé une étude pour estimer un modèle DSGE en économie ouverte pour la République démocratique du Congo (RDC). Le modèle a été estimé à l'aide de techniques bayésiennes sur des données trimestrielles allant de 2002 à 2016. L'objectif était d'analyser les relations entre les principales variables macroéconomiques de la RDC et de simuler l'impact de certains chocs sur leur évolution. L'estimation a présenté des résultats globalement satisfaisants. Les tests de diagnostic, notamment celui de convergence de Brooks et Gelman (1998), indiquent une convergence robuste des paramètres, tant univariée que multivariée.

-BENAMIROUCHE S. et HAMIMES A. (2023) : Ils ont estimé les fonctions de survie dans une étude clinique comparant deux produits pharmaceutiques, où ils ont comparé entre l'approche fréquentiste et l'approche bayésienne, en se basant sur l'erreur standard. Ils ont constaté que l'approche bayésienne fournissait des résultats plus riches que l'estimateur classique, permettant d'obtenir une distribution conjointe des paramètres du modèle. Cette caractéristique fondamentale offre la possibilité de prendre en compte simultanément l'incertitude globale sur l'ensemble des paramètres inconnus du modèle.

Les travaux antérieurs ont appliqué l'approche bayésienne à divers modèles économétriques, en soulignant sa pertinence dans des contextes complexes et difficiles, tels que les modèles DSGE ou les modèles autorégressifs avec rupture. Ils ont également souligné

l'opportunité d'intégrer des informations a priori afin de réduire l'incertitude entourant l'estimation.

Cette approche – bien que prometteuse – n'a pas été appliquée dans le cadre des modèles ARMA-GARCH, alors même que ces derniers sont confrontés à plusieurs défis, notamment l'incertitude inhérente aux paramètres et l'instabilité de la variance conditionnelle. Dans ce contexte nous posons la question fondamentale suivante : **Comment la méthode d'estimation bayésienne peut-elle être appliquée pour estimer les paramètres d'un modèle ARMA-GARCH ?**

II. METHODES

A. Les modèles ARMA-ARCH :

L'analyse des séries chronologiques, qui consiste à examiner la progression d'un phénomène dans le temps, a abouti à la conception de multiples modèles statistiques. Parmi eux, le modèle ARMA (Modèle autorégressif à moyenne mobile) s'est imposée comme un outil de choix en raison de ses propriétés statistiques favorables. En effet, Les modèles ARMA offrent une solution efficace pour l'estimation des paramètres du modèle et la prévision des valeurs futures de la série chronologique, ce qui en fait un outil précieux pour une large gamme d'applications (**Kuma, 2018, P.09**). Les modèles ARMA décrivent un processus temporel où la valeur actuelle est influencée à la fois par ses propres valeurs passées (partie autorégressive) et par les erreurs résiduelles des prévisions passées (partie moyenne mobile) (**Bourbonnais, 2018, P.277**). Cette relation est formalisée comme suit:

$$Y_t = \lambda + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-i} + e_t \dots \dots \dots [1]$$

Avec e_t est le résidu du modèle.

L'ordre optimal d'un modèle ARMA (p, q) correspond au nombre de coefficients d'autocorrélation simple ou partielle qui sont statistiquement significatifs. Ces coefficients sont représentés par le corrélogramme de la série chronologique. Il est important de noter que:

Pour un modèle AR (Autorégressive): L'ordre correspond au nombre de coefficients d'autocorrélation partielle (PAC) qui sont différents de zéro.

Pour un modèle MA (Moyenne mobile): L'ordre correspond au nombre de coefficients d'autocorrélation simple (AC) qui sont différents de zéro.

Cependant les modèles ARMA (p, q) présentent certains inconvénients .En effet, ils ne prennent pas en compte certaines caractéristiques structurelles propres au phénomène étudié comme la volatilité de certaines variables. Dans ce contexte, Engle (1982) a proposé une solution innovante pour modéliser les séries chronologiques présentant une volatilité non constante: le modèle ARCH (Hétéroscélasticité conditionnelle autorégressive). Ce modèle s'avère être un outil particulièrement adapté aux séries chronologiques qui présentent deux caractéristiques importantes :

- La non-stationnarité de la variance : la variance de la série présente une évolution dans le temps.

- La non-normalité: la distribution des valeurs de la série chronologique est leptokurtique.

Un modèle ARCH(q), ou modèle à hétéroscélasticité autorégressive conditionnelle d'ordre q, permet de capturer la dynamique de la variance des erreurs dans les séries chronologiques. Il repose sur l'hypothèse selon laquelle la variance des erreurs à un instant donné dépend de la variance des erreurs des périodes passées. Formellement, un modèle ARCH(q) peut être exprimé par l'équation suivante (**Kuma, 2018, P.10**):

$$h_t = \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 \dots \dots \dots [2]$$

Avec $(e_t) = 0$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q$ et $\sum_{i=1}^q a_i < 1$ (condition de stationnarité).

En 1986, Bollerslev a proposé une évolution directe du modèle ARCH. Il s'agit du modèle GARCH (hétéroscélasticité conditionnelle autorégressive généralisée). Ces deux modèles partagent les mêmes bases théoriques et les mêmes propriétés fondamentales. Leur distinction majeure réside dans leur configuration : tandis que le modèle ARCH est défini par un seul paramètre (q), le modèle GARCH est caractérisé par deux paramètres (p et q), ce qui offre une plus grande flexibilité dans la modélisation de la volatilité conditionnelle. Il s'exprime comme suit :

$$h_t = \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i} \dots \dots \dots [3]$$

Avec $E(e_t) = 0$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, q$, $b_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1$ (condition de stationnarité).

B. L'approche bayésienne :

Le théorème de Bayes : s'appuie sur la loi de probabilité conditionnelle :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} \dots \dots \dots (2.1)$$

Où :

- **P(A)** représente la probabilité d'observer l'événement A avant d'avoir connaissance du résultat de l'événement B (probabilité a priori de A).
- **P(B/A)** représente la probabilité d'observer l'événement B sachant que l'événement A s'est déjà produit.
- **P(A/B)** représente la probabilité d'observer l'événement A après avoir eu connaissance du résultat de B (probabilité a posteriori de A). En revanche $P(A/B)$ est appelée la probabilité a posteriori de A (**Broemeling, 2019, p. 11**).

Soit y un vecteur ou une matrice de données à modéliser et soit θ un vecteur ou une matrice de paramètres inconnus définissant un modèle explicatif pour y , l'objectif est alors d'inférer les valeurs des paramètres θ à partir des données observées y . L'économétrie bayésienne utilise la règle de Bayes pour réaliser cette inférence. En remplaçant B par y et A par θ dans la formule (2.1), on obtient:

$$P(\theta/y) = \frac{P(y/\theta)P(\theta)}{P(y)} = \frac{P(y/\theta)P(\theta)}{\int P(y/\theta)P(\theta)} \dots \dots \dots (2.2)$$

Cependant, dans le contexte, l'objectif est uniquement d'inférer les valeurs des paramètres inconnus θ du modèle. Où, $P(y)$ est une probabilité marginale indépendante de θ et ne fournit donc pas d'information utile pour cette inférence. Il est donc possible de simplifier l'équation (2.2) en ignorant le terme $P(y)$, ce qui donne :

$$P(\theta/y) \propto P(y/\theta)P(\theta) \dots \dots \dots (2.3)$$

Où :

- $P(\theta/y)$ est appelé densité a posteriori.
- $P(y/\theta)$ est la fonction de vraisemblance.
- $P(\theta)$ est la densité a priori.

En prenant la forme continue de la relation (2.3), on obtient (**Gary , 2003, p. 02**):

$$\pi(\theta/y) \propto f(y/\theta)\pi(\theta) \dots \dots \dots (2.4)$$

L'objectif est donc d'utiliser la densité a priori $\pi(\theta)$ et de la combiner aux informations apportées par les observations $f(y/\theta)$ afin d'obtenir une densité a posteriori $\pi(\theta/y)$.

La théorie bayésienne de la décision repose sur l'idée qu'il faut d'abord définir trois éléments clés pour prendre une décision statistique éclairée :

1. La distribution de probabilité qui décrit le processus générant les données observées notée $f(y/\theta)$.
2. Les croyances initiales sur les paramètres inconnus du modèle, représentées par une distribution de probabilité notée $\pi(\theta)$.
3. Le coût associé à chaque décision possible d , en fonction de la vraie valeur de paramètre θ . Cette notion est formalisée par la fonction de perte, notée $L(\theta, d)$ (P. Robert, 2006, p. 85).

La fonction de perte $L(\theta, d)$: C'est une fonction qui quantifie l'erreur entre le choix de l'action d alors que la vraie valeur du paramètre est θ . Parmi les fonctions de perte les plus fréquemment employées en statistique, on retrouve la perte quadratique :

$$L(\theta, d) = (\theta - d)^2$$

En raison de sa stricte convexité, la fonction de coût quadratique pénalise de manière disproportionnée les grandes erreurs (plus l'erreur est grande, plus l'impact sur la fonction de coût quadratique est important).

Estimateur de Bayes : dans le cadre d'une estimation bayésienne avec une loi a posteriori $\pi(\theta/y)$ et une fonction de perte quadratique (θ, d) , l'estimateur de Bayes optimal est donné par l'espérance de la loi a posteriori.

$$\theta_m = E[\theta/y] = \int \theta \pi(\theta/y) d\theta$$

En effet en a :

$$E[L(\theta, d)] = d^2 + E(\theta^2) - 2dE(\theta) = (d - E(\theta))^2 + var(\theta)$$

Ceci est minimal lorsque : $d = E(\theta)$. (LOTFI, 2007, p. 11).

L'inférence bayésienne requiert le calcul d'estimateurs issus de la distribution a posteriori. Ces estimateurs, comme la moyenne a posteriori, impliquent généralement des opérations d'intégration et d'optimisation complexes. Pour surmonter ces obstacles, des

méthodes numériques, notamment les méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) qui ont été proposées pour la première fois en 1953 par Metropolis et al. , sont couramment employées pour approcher les estimateurs d'intérêt. (**Christian & George , 2011, p. 2**)

La simulation par chaînes de Markov : les méthodes de Monte-Carlo permettent d'estimer numériquement des caractéristiques de distributions de probabilité, notamment les modes (le maximum a posteriori) et les espérances. Ces méthodes reposent sur la génération d'un échantillon aléatoire $(\theta_1, \dots, \theta_n, \dots)$ suivant la distribution $\pi(\theta_n/\theta_{n-1}, y)$. En utilisant cet échantillon, on peut approximer des quantités théoriques telles que l'espérance, qui correspond à la moyenne de la distribution.

Cette technique permet de traiter de nombreux problèmes d'estimation, y compris pour des modèles non linéaires, grâce à des algorithmes comme Metropolis-Hastings et l'échantillonnage de Gibbs. Ce dernier est présenté dans la section suivante (**LOTFI , 2007, p. 13**).

L'échantillonnage de Gibbs : a été introduit pour la première fois par Geman et Geman (1984) (P. Robert, 2006). Il s'agit d'un algorithme itératif qui permet de générer des échantillons à partir d'une distribution de probabilité complexe $\pi(\theta/y)$.

Il fonctionne en mettant à jour séquentiellement chaque composante θ_i d'un vecteur $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$, en conditionnant sur les valeurs actuelles des autres composantes $\pi(\theta_1/\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_d, y)$, $\pi(\theta_2/\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_d, y)$ et ainsi de suite . À chaque itération, la distribution conditionnelle utilise les valeurs générées les plus récentes parmi toutes les autres composantes. Ce processus est répété K fois ($K \rightarrow \infty$) jusqu'à ce que la chaîne de Markov converge vers la distribution cible. L'algorithme est le suivant :

1. Fixer $k=0$.
 2. Générer $\theta_1^{(k+1)}$ à partir de $\pi(\theta_1/\theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}, \dots, \theta_d^{(k)}, y)$.
- Générer $\theta_2^{(k+1)}$ à partir de $\pi(\theta_2/\theta_1^{(k+1)}, \theta_3^{(k)}, \dots, \theta_d^{(k)}, y)$.
-
- Générer $\theta_{d-1}^{(k+1)}$ à partir de $\pi(\theta_{d-1}/\theta_1^{(k+1)}, \theta_2^{(k+1)}, \dots, \theta_d^{(k)}, y)$.

Générer $\theta_d^{(k+1)}$ à partir de $\pi(\theta_d/\theta_1^{(k+1)}, \theta_2^{(k+1)}, \dots, \theta_{d-1}^{(k+1)}, y)$.

3. Si la convergence est obtenue, alors

Retenir $\theta = \theta^{(k+1)}$.

Sinon fixer $k=k+1$, et retourner à 2.

L'efficacité de l'algorithme dépend de la capacité à simuler les distributions conditionnelles : $\pi(\theta_i/\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_d)$.

Les avantages de l'estimation bayésienne :

Avant d'aborder la partie empirique et la présentation des résultats, il est nécessaire de justifier le choix de l'approche bayésienne par rapport à l'approche classique pour plusieurs raisons :

-le développement de logiciels informatiques comme (le langage R, winbugs, stata) a permis de réduire la complexité computationnelle associée à cette approche ;

-l'approche bayésienne permet d'intégrer des connaissances a priori en introduisant des distributions préalables lors de l'estimation, ce qui s'avère particulièrement utile dans le cas d'échantillons de petite taille ;

-elle se distingue par sa flexibilité dans l'application à des modèles non linéaires ou complexes, comme nous l'avons vu dans les études antérieures, notamment à travers la hiérarchie bayésienne. (Roderick, 2022, p. 23) ;

-elle ne nécessite pas l'inversibilité de la matrice $X'X$ qui est utilisée dans le calcul de l'estimateur des moindres carrés ordinaires, représenté par la relation suivante:

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

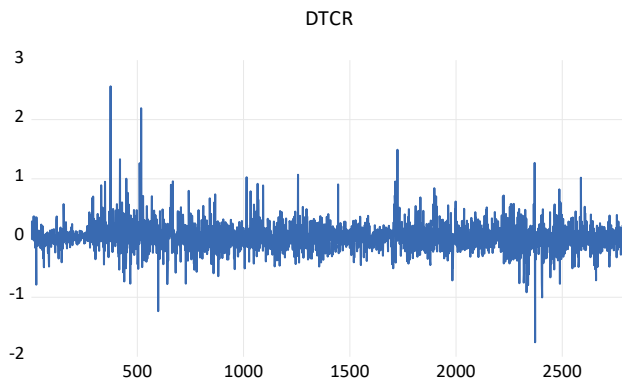
Où : X est la matrice des variables explicatives, X' sa transposée, et Y le vecteur des observations de la variable dépendante. Ce problème est fréquent dans les méthodes traditionnelles, en particulier lorsqu'il existe une multicollinéarité entre les variables explicatives, ou lorsque le nombre de variables explicatives est supérieur au nombre d'observations ;

-elle fournit une distribution a posteriori des paramètres, contrairement aux méthodes traditionnelles qui ne donnent qu'un estimateur ponctuel, ce qui permet de construire des intervalles de crédibilité (Highest Posterior Density).

III. RESULTATS ET DISCUSSION

Pour stationnariser la série brute TCR, on applique une différenciation, ce qui permet d'obtenir la série DTCCR, qui représente la variation journalière du taux de change réel (DA/USD) sur la période allant du 19/08/2013 au 30/05/2024

Figure 01 : Séries chronologiques des variations du taux de change réel



Après avoir analysé le corrélogramme de la série DTCCR, nous avons conclu que le modèle approprié pour l'étude était ARMA(1,1). Cependant et après avoir vérifié la présence d'un effet ARCH et la non-normalité des erreurs nous avons rejeté cette spécification au profit d'un modèle ARMA(1,1)-Garch(1,1). Ce choix repose sur un critère d'information d'Akaike (AIC) plus faible et sur la vérification des conditions du modèle (**voir Annexes 5 et 6**). Le modèle à estimer est le suivant :

$$\begin{cases} DTCCR_t = \lambda + \phi_1 DTCCR_{t-1} + \theta_1 e_{t-1} \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{cases}$$

Où :

- $DTCCR_t$ est la variation journalière de taux de change réel (DA/USD) à l'instant t .
- $DTCCR_{t-1}$ est la variation journalière de taux de change réel (DA/USD) à l'instant $t-1$.
- e_t est le résidu du modèle.
- $h_t = \sigma_t^2$ est la variance conditionnelle des erreurs.

- $\theta = (\lambda, \phi_1, \theta_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ est un vecteur des paramètres du modèle à estimer considérés comme des variables aléatoires.

Le modèle ARMA-GARCH dans le cadre bayésien :

Dans cette section, nous présenterons les éléments essentiels pour estimer un modèle ARMA-GARCH dans un cadre bayésien.

La Vraisemblance :

Pour un ensemble d'observations de la variable dépendante $DTCR=y_t$, nous supposons que les observations sont conditionnellement indépendantes. La fonction de vraisemblance est alors donnée par :

$$\begin{aligned} f(y/\mu, \sigma^2) &= \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{T}{2}} \prod_{t=1}^T \sqrt{\sigma_t^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu_t)^2}{\sigma_t^2} \right\} \end{aligned}$$

Avec : $\mu_t = \lambda + \phi_1 DTCR_{t-1} + \theta_1 e_{t-1}$ prédite par l'ARMA(1,1) et $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ qui n'est pas constant et prédit par GARCH(1,1).

Densités a priori :

Comme les paramètres peuvent prendre des valeurs positives ou négatives nous avons choisi la distribution a priori adaptée $\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2 I_n)$. Ce choix s'explique par la flexibilité de la loi normale à incorporer l'information a priori à travers la moyenne et la variance, ainsi que par sa capacité à simplifier le traitement computationnel. En effet, lorsque la fonction de vraisemblance et la distribution a priori suivent toutes deux une loi normale, la distribution a posteriori résultante suit également une loi normale. Par conséquent, la fonction de distribution a priori pour chaque paramètre est donnée par :

$$\pi(\theta_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})\sigma_{\theta_i}} \exp \left\{ -\frac{(\theta_i - \mu_{\theta_i})^2}{2\sigma_{\theta_i}^2} \right\}$$

Pour le vecteur de paramètres $\theta = (\lambda, \phi_1, \theta_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$ on obtient la densité a priori comme suit :

$$\pi(\theta) = \prod_{i=1}^6 \pi(\theta_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^6 \prod_{i=1}^6 \sigma_{\theta_i}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{(\theta_i - \mu_{\theta_i})^2}{\sigma_{\theta_i}^2} \right\}$$

La hiérarchie bayésienne :

En nous basant sur la fonction de vraisemblance des données et sur la distribution a priori des paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH(1,1), nous présentons la structure hiérarchique bayésienne sous la forme suivante :

La vraisemblance: $y_t \sim N(\mu_t, \sigma^2)$

Lois a priori:

$$ARMA(1,1) \begin{cases} \lambda \sim N(-0.04; 5 * 10^{-6}) \\ \phi_1 \sim N(0.33; 0.02) \\ \theta_1 \sim N(-0.28; 0.022) \end{cases}$$

$$GARCH(1,1) \begin{cases} \alpha_0 \sim N(0.004; 10^{-8}) & I(0,) \\ \alpha_1 \sim N(0.12; 13 * 10^{-6}) & I(0,1) \\ \beta_1 \sim N(0.57; 9 * 10^{-5}) & I(0,1) \end{cases}$$

À partir de la structure hiérarchique, on observe que des distributions a priori normales ont été utilisées sans imposer de biais forts. De plus, les paramètres du modèle GARCH(1,1) suivent une distribution normale, tout en étant contraints dans un intervalle spécifique afin de préserver les conditions de positivité et de stabilité de la variance conditionnelle.

Densité a posteriori :

La densité a posteriori est proportionnelle au produit de la vraisemblance et de la densité a priori :

$$\pi(\theta/y) \propto f(y/\theta)\pi(\theta)$$

Les lois à postériori à déterminer sont les suivantes:

$$f(\lambda/\phi_1, \theta_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, Y), f(\phi_1/\lambda, \theta_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, Y),$$

$$f(\theta_1/\lambda, \phi_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, Y), f(\alpha_0/\lambda, \phi_1, \theta_1, \alpha_1, \beta_1, Y),$$

$$f(\alpha_1/\lambda, \phi_1, \theta_1, \alpha_0, \beta_1, Y), f(\beta_1/\lambda, \phi_1, \theta_1, \alpha_0, \alpha_1, Y)$$

En raison de la complexité du modèle il est généralement impossible de calculer la densité a posteriori de manière exacte. Nous utilisons donc des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC).

Estimation des paramètres avec R :

La méthode utilisée pour estimer les paramètres du modèle ARMA(1,1)-GARCH(1,1) est l'estimation bayésienne à travers le logiciel WinBUGS (**voir Annexe 01**). Les données préparées au préalable sous R (**voir Annexe 02**), ont été intégrées au modèle.

Une chaîne de Markov Monte Carlo de 200000 itérations a été générée, avec 2500 itérations de **burn-in** à l'aide de la commande **raftery.diag** pour assurer la convergence des chaînes et la fiabilité des résultats (**voir Annexe 03 et Annexe 04**). Les valeurs initiales des paramètres ont été obtenues via une estimation MCO à partir de la même base de données (série d'observations du DTCR de 03/01/2000 à 14/07/2010). Les résultats de l'estimation empirique et les intervalles de crédibilité sont présentés ci-dessous:

```
Iterations = 2500:201000
Thinning interval = 10
Number of chains = 1
Sample size per chain = 19851

1. Empirical mean and standard deviation for each variable,
   plus standard error of the mean:
```

	Mean	SD	Naïve SE	Time-series SE
Lambda	0.001541	0.0015440	1.096e-05	1.595e-05
Phi1	0.394553	0.1304878	9.261e-04	3.657e-03
Theta1	-0.357881	0.1297803	9.211e-04	3.636e-03
alpha0	0.004736	0.0001198	8.505e-07	8.505e-07
alpha1	0.137829	0.0032856	2.332e-05	2.384e-05
beta1	0.729477	0.0062258	4.419e-05	4.419e-05

```
> HPDinterval(model.samples)
[[1]]
      lower      upper
Lambda -0.001483539  0.004628306
Phi1    0.131479062  0.645257896
Theta1 -0.615868304 -0.107654035
alpha0   0.004498309  0.004967553
alpha1   0.131152742  0.143989064
beta1    0.717724586  0.742103425
attr(,"Probability")
[1] 0.95
```

Source : Préparé par les auteurs à l'aide du logiciel R.

Les résultats de l'estimation bayésienne du modèle ARMA(1,1)-GARCH(1,1) montrent que :

-les intervalles HPD (highest posterior density) à 95 % indiquent que les vraies valeurs des paramètres se situent dans les intervalles estimés avec une probabilité de 95%.

-les intervalles HPD associés à l'ensemble des paramètres du modèle, à l'exception du paramètre λ , ne contiennent pas la valeur 0, ce qui indique leur signification statistique.

-les coefficients de l'équation de la variance ($\alpha_1 + \beta_1 < 1$) vérifient les contraintes qui garantissant la positivité et la stationnarité de la variance (**Lakhdar, CHENINI, & BENGANA, 2014, p. 13**).

-les tracés des chaînes de Markov présentent des fluctuations aléatoires autour d'une moyenne stable, sans tendance apparente ni fortes variations, ce qui soutient l'hypothèse de la convergence. (**Voir Annexe 03**).

- les fonctions d'autocorrélation des paramètres présentent des valeurs proches de zéro sur l'ensemble des retards. Ce comportement est particulièrement souhaitable, car il indique que les échantillons générés sont pratiquement indépendants les uns des autres, ce qui renforce la précision et la fiabilité des estimateurs (**Voir Annexe 04**).

- les valeurs des paramètres estimés selon l'approche bayésienne tendent à s'approcher de zéro comparativement à celles obtenues par la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS), en raison de l'effet de shrinkage induit par l'intégration du terme prior lors de l'estimation. De plus, l'estimation bayésienne a légèrement surpassé OLS en termes de performance prédictive, avec $MSE_{BA} = 0.0563$ contre $MSE_{MCO} = 0.0576$.

IV. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié des modèles économétriques, en particulier les modèles ARCH et GARCH, afin de mieux comprendre la dynamique des séries temporelles caractérisées par une volatilité variable.

Nous avons présenté une estimation bayésienne qui consiste à intégrer une information a priori (ou Prior) aux données observées (2805 observations de la variation journalière du taux de change réel (DA/USD) sur la période allant du 19/08/2013 au 30/05/2024) afin d'obtenir une distribution a posteriori des paramètres en utilisant l'échantillonnage de Gibbs.

Les résultats de l'estimation bayésienne ont fourni des distributions a posteriori pour les paramètres à estimer, ainsi que des intervalles de crédibilité à 95 %, qui, pour la plupart des paramètres, n'incluaient pas la valeur 0. Cela permet de réduire l'incertitude autour des estimations. De plus, les représentations graphiques stables des chaînes de Markov ont renforcé la robustesse et la stabilité des résultats, malgré la complexité computationnelle engendrée par la réalisation de milliers d'itérations.

En perspectives de recherche, il serait pertinent d'explorer d'autres algorithmes d'échantillonnage, tels que l'algorithme de Metropolis-Hastings, ou d'envisager l'utilisation d'autres distributions a priori comme Gamma, Bêta ou Exponentielle. Une autre piste consisterait à appliquer l'estimation bayésienne à des extensions des modèles GARCH, comme les modèles TGARCH, EGARCH, etc.

V. REFERENCES

- [1] M.BENELBAR & H.GHARBI & A.BEDROUNI, The Possibility of Using Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity in Modeling CAC 40 Returns Under the Corona Pandemic, *Revue internationale de performance économique*, vol.4, no.1, (2021) ,82-100.
- [2] J.Boreux & E.Parent & J. Bernier, *Pratique du calcul bayésien*, springer, Paris, (2010) ,319 pages.
- [3] M.BOUMAALI & M.MESBAHI, MODELISATION DE VOLATILITE DU TAUX DE CHANGE DU DINAR ALGERIEN/EURO, *Revue d'économie et de statistique appliquée*, vol.13, no.1, (2016), 308-320.
- [4] R. Bourbonnais, *Économétrie 10e édition: Cours et exercices corrigés*, dunod , Paris, (2018) ,416 pages.
- [5] L. Broemeling, *Bayesian Analysis of Time Series*, Chapman and Hall/CRC , US ,(2019) ,292 pages.
- [6] M.CHIKHI, Analyse des chocs informationnels et de l'hétéroscédasticité conditionnelle dans les flux de la trésorerie, *Recherchers économiques managerial*, vol.05, no.01, (Juin 2011), 1-16.
- [7] R.Christian & C.George , A Short History of Markov Chain Monte Carlo: Subjective Recollections from Incomplete Data, *Statistical Science*,vol.26,no.01,(2011), 102-115.
- [8]R. ENGEL, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica* , vol.50 ,no.04 ,(1982) , 987-1007.
- [9] K. Gary, *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons Ltd, England, (2003) ,373 pages.
- [10] G.IM Md & R. Hanafi A, Modeling and forecasting of volatility using ARMA-GARCH: case study on Malaysia natural rubber prices. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, vol.548, no.01, (2019), 1-14.
- [11] R.KHIARI & A.BOUDAH, Measuring the effectiveness of investment in Islamic financial innovations, *Revue des études financières et comptables administratives*, vol.07, no.01,(2020),305-323.
- [12] J. Kuma, MODELISATION HETEROSCEDASTIQUE:LES MODELES ARCH-GARCH, *HAL open science*, April, (2018).
- [13] A. Lakhdar & A. CHENINI & I. BENGANA, Peut-on modéliser la volatilité du taux de change de dinar algérien par un processus GARCH, *Revue internationale de performance économique*, vol.02, no.03, (2014), 25-44.
- [14] K. LOTFI, L'ÉCHANTILLONNAGE DE GIBBS POUR L'ESTIMATION BAYÉSIENNE DANS L'ANALYSE DE SURVIE, *UNIVERSITÉ DU QUÉBEC Service des bibliothèques*, MONTRÉAL, (2007) ,97 pages.
- [15] L. Nadia & M. Oumelkheir , MODELISATION DE LA PARITE DOLLAR AMERICAIN /DINAR ALGERIEN: APPROCHE BAYESIENNE ET SERIES TEMPORELLES, *Revue d'économie et de statistique appliquée* ,vol.12,no.02 ,(2015), 486-496.
- [16] M. Oum El Kheir, ANALYSE BAYESIENNE D'UN MODELE POUR LE PRIX DU BARIL DE PETROLE , *Revue d'économie et de statistique appliquée*, vol.07,no.01,(2010), 54-86.
- [17] P. Robert, *Le choix bayésien Principes et pratique*, Springer, paris, (2006), 638 pages.

- [18] C. Robert, Des spécificités de l'approche bayésienne et de ses justifications en statistique inférentielle , HAL open science (2013).
- [12] J. L.Roderick , Bayes étayé par des idées fondées sur le plan, est le meilleur paradigme global pour l'inférence en enquête par échantillonnage, Statistique Canada ,vol.48,no.02, (2022, 279-306.
- [19] B.Saliha & H. Ahmed, UNE ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE L'APPROCHE BAYÉSIENNE ET L'APPROCHE CLASSIQUE DANS LA MODÉLISATION DES DONNÉES DE SURVIE, Revue d'Economie et de Statistique Appliquée ,vol.20,no.01,june,(2023), 211-223.
- [20] M. Sami & A. Sabrine, La modélisation de la dynamique des volatilités et des corrélations entre les prix des matières premières et les rendements boursiers, HAL open science, (2021).
- [21] G. UMBA, Estimation Bayésienne D'un Modèle DSGE Pour une Petite Economie Ouverte: Cas De la RD Congo, Global Journal of HUMAN-SOCIAL SCIENCE: ECONOMICS ,(2017).

VI. ANNEXES

Annexe 01 : Code d'estimation bayésienne dans le langage de programmation winbugs :

```

model {
  for (t in 1:T) {y[t]~dnorm(mu[t],tau[t])
                  e[t]<-y[t]-mu[t]}

#ARMA model
  for (t in 2:T) {mu[t]<-Lambda+Phi1*y[t-1]+Theta1*e[t-1]}

#ARCH model
  for (t in 2:T) {h[t]<-alpha0+alpha1*pow(e[t-1],2)+beta1*h[t-1]
                  tau[t]<-1/h[t]}

#ARMA observations with latent data
  mu[1]<-Lambda+Theta1*e0+Phi1*y0

#GARCH observations with latent data
  h[1]<-alpha0+alpha1*pow(e0,2)+beta1*h0
  tau[1]<-1/h[1]

#priors for latent data
  e0~dnorm(0.006,20)
  y0~dnorm(0.002,20)
  h0~dnorm(0.02,1250) I(0,10)

#priors on ARMA coefficients
  Lambda~dnorm(-0.004,271833)
  Phi1~dnorm(0.33,47)
  Theta1~dnorm(-0.28,46)

#priors for GARCH model
  alpha0~dnorm( 0.004,61035156) I(0,)
  alpha1~dnorm(0.12,78419) I(0,1)
  beta1~dnorm(0.57,11238) I(0,1)
}

```

NB : Dans le langage **WinBUGS**, la distribution normale est spécifiée à l'aide de la moyenne et de la précision, cette dernière étant définie comme l'inverse de la variance.

Annexe 02 : Le Code qui intègre le code d'estimation bayésienne aux données et fournit le résultat en langage R :

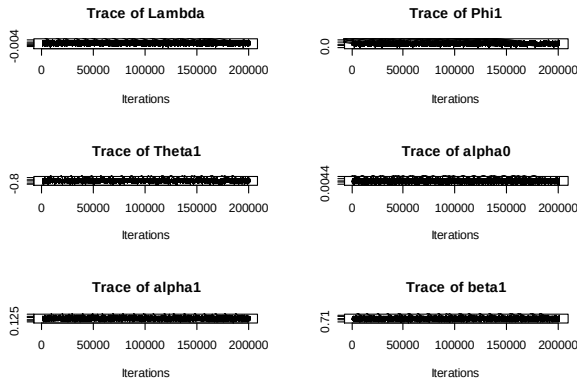
```

1 require(rjags)
2 require(coda)
3 library(readxl)
4 data<-read_excel("tch.xlsx")
5 dtch <- diff(data$dtch)
6 length(dtch)
7 y <- dtch
8 T<- length(y)
9 model.inits <- list( e0=-0.343,y0=-0.342,h0=0.02,Lambda=-0.004
10 , Phi1=0.33 ,Theta1=-0.28 , alpha0 = 0.004,alpha1 = 0.12,beta1 = 0.57)
11 iterations <- 200000
12 burnin <- 2500
13 chains <- 1
14 file="arma_arch.Jag.txt"
15 model.fit <- jags.model(file="arma_arch.Jag.txt",data=list(T=T, y=y ),
16 , inits=model.inits, n.chains = 1)
17 model.samples <- coda.samples(model.fit, c("Lambda","Phi1",
18 "Theta1","alpha0","alpha1","beta1"), n.iter=iterations,thin= 10)
19 summary(window(model.samples, start = burnin))
20 plot(model.samples,trace =TRUE,density=FALSE)

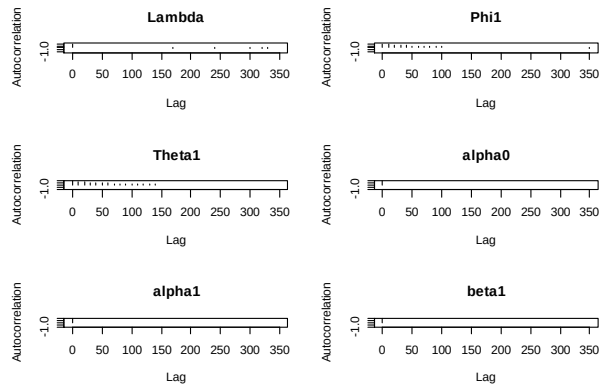
21 raftery.diag(model.samples)
22 HPDinterval(model.samples)
23 autocorr.plot(model.samples)
24 # 1. استخراج القيم التنبؤية البعدية من عينات MCMC:
25 Lambda_hat <- mean(as.matrix(model.samples)[, "Lambda"])
26 Phi1_hat <- mean(as.matrix(model.samples)[, "Phi1"])
27 Theta1_hat <- mean(as.matrix(model.samples)[, "Theta1"])
28 # 2. تهيئة المعلمات للقيم المقدرة والمطابق:
29 mu <- rep(NA, T) # mu[t] = القيمة المقدرة
30 e <- rep(NA, T) # e[t] = الخطأ
31 yhat <- rep(NA, T) # yhat[t] = القيمة المتوقعة
32 mu[1] <- NA
33 e[1] <- 0 # نطقي e[1] يحتاج e[0]
34 for (t in 2:T) {mu[t] <- Lambda_hat + Phi1_hat * y[t - 1] + Theta1_hat * e[t - 1]}
35 e[t] <- y[t] - mu[t]
36 yhat[t] <- mu[t]
37 # 3. حساب متوسط مربعات الخطأ MSE:
38 mse <- mean((y[2:T] - yhat[2:T])^2)
39 print(mse)

```

Annexe 03 : Résultats de convergence des chaînes de Markov:



Annexe 04 : Les fonctions d'autocorrélation (ACF) des échantillons des paramètres, jusqu'à un décalage (lag) de 350:



Annexe 05 : l'estimation d'un modèle ARMA(1,1)-Garch(1,1) par MCO :

Dependent Variable: DTCH
Method: ML ARCH - Normal distribution (OPG - BHHH / Marquardt steps)
Date: 09/31/24 Time: 00:55
Sample (adjusted): 3 2908
Included observations: 2904 after adjustments
Convergence not achieved after 500 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients
MA Backcast: 2
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = $G(4) + G(5)*RESID(-1)^2 + G(6)*GARCH(-1)$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.016187	0.006315	2.563183	0.0104
AR(1)	0.961878	0.017669	54.43662	0.0000
MA(1)	-0.943972	0.022587	-41.79254	0.0000

Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.015207	0.001362	11.16784	0.0000
RESID(-1)*2	0.128510	0.007441	17.27002	0.0000
GARCH(-1)	0.579510	0.029675	20.17454	0.0000

R-squared

R-squared	0.010150	Mean dependent var	0.019354
Adjusted R-squared	0.009443	S.D. dependent var	0.237652
S.E. of regression	0.236527	Akaike info criterion	-0.145208
Sum squared resid	156.7025	Schwarz criterion	-0.132500
Log likelihood	209.5813	Hannan-Quinn criter.	-0.140621
Durbin-Watson stat	1.875349		

Inverted AR Roots

Inverted AR Roots	.96
Inverted MA Roots	.94

Annexe 06 : le test d'ARCH pour vérifier l'hétéroscédasticité:

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	3.373981	Prob. F(1,2901)	0.0663
Obs*R-squared	3.372328	Prob. Chi-Square(1)	0.0663