

LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTERET GESTION ET MODELISATION DES TITRES FINANCIERS A REVENUS FIXES

TAGUEMOUNT Asma
Maitre de conférences B, ENSSEA

RESUME

Au cours du temps, les rendements des actifs à revenus fixes varient en fonction de leur maturité. Une telle relation est en général appelée structure par terme des taux d'intérêt ou encore la courbe des taux d'intérêt.

La structure par terme des taux d'intérêt nous permet de comparer les rendements de divers investissements de même maturité lorsque ces investissements sont détenus jusqu'à leur maturité. Elle peut être utilisée afin de prendre des décisions d'achat ou de vente pour mieux ajuster le portefeuille. Elle peut aussi servir d'indicateur sur la direction des taux d'intérêt et sur la situation économique en général.

Vu son utilité, les chercheurs et les professionnels ont essayé de déterminer les mécanismes affectant sa forme et son évolution : à côté des théories dites traditionnelles qui ont essayé d'expliquer le pourquoi des différences de rendements, divers modèles stochastiques ont été proposés afin de décrire le comportement de la courbe des taux d'intérêt.

MOTS CLETS : courbe de taux, taux zéro coupon, bootstrap, les théories traditionnelles de la courbe des taux, évaluation par l'équilibre, évaluation par l'arbitrage..

INTRODUCTION

Afin d'évaluer un flux futur aujourd'hui, nous avons besoin de facteurs d'actualisation. Un facteur d'actualisation à une date future est le facteur utilisé pour rapporter ce flux à la date d'aujourd'hui.

Une courbe de taux est la représentation de ces facteurs pour plusieurs maturités (à chaque date future correspond un facteur d'actualisation utilisé pour rapporter à la date de valorisation, des flux reçus à cette date future). Cependant, ces facteurs d'actualisation ne sont pas affichés explicitement sur les marchés comme les cotations des instruments financiers.

En effet, certaines courbes de taux sont construites à partir des cotations de certains produits financiers sur le marché, qui varient d'un jour à l'autre, selon le principe de l'offre et de la demande, et d'autres sont induites à partir de ces taux explicites.

Pour construire la courbe de taux nous devons suivre une méthodologie précise. Et afin d'expliquer sa déformation une modélisation rigoureuse est indispensable, nécessitant ainsi des mathématiques avancées et des outils puissants de résolution d'équations.

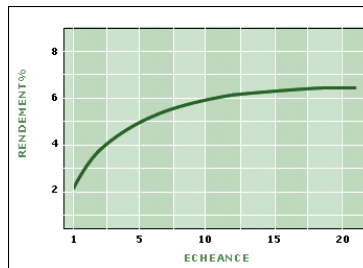
I- Présentation de la structure par terme des taux d'intérêt

I-1- Définitions de la courbe des taux d'intérêt

La structure par terme des taux d'intérêt, la gamme des taux d'intérêt ou encore la courbe des taux ou de rendement représente, à une date donnée, un instantané des rendements offerts par des obligations de même nature, et plus particulièrement du même niveau de solvabilité (même émetteur donc même risque de défaut), mais à échéances différentes.

C'est la fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité (son échéance), indique le niveau de taux d'intérêt associé. On la représente sur un espace dont l'axe des abscisses correspond à la maturité de l'obligation et l'axe des ordonnées au taux d'intérêt. On peut dissocier les maturités à court terme de la courbe (de 3 mois à 2 ans) et celles de long terme (au-delà de 2 ans et pouvant aller jusqu'à 50 ans).

Cette courbe ne sera pas la même demain, les différents acteurs vont avoir besoin d'emprunter ou prêter, ils vont changer leurs anticipations, ils vont vendre ou acheter des obligations, et des événements peuvent survenir, alors cela va faire varier les taux en fonction de l'offre et de la demande.



Courbe de taux croissante

I-2- La classification des courbes de taux

A une date donnée et dans un pays ou une zone économique unifiée, il existe une multitude de courbes de taux. On distingue : les courbes de marché et les courbes implicites.

Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps. Parmi les courbes de marché:

- la courbe des taux de rendement à maturité: elle est construite à partir des taux de rendement des obligations ;
- la courbe des taux de swaps: elle est construite à partir des taux de swaps.

Les courbes implicites sont dérivées indirectement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps. Parmi les courbes implicites:

- la courbe des taux zéro-coupon ;
- la (les) courbe(s) de taux forwards ;
- la courbe des taux forwards instantanés,
- la courbe des taux de rendement au pair.

On peut aussi classer les courbes de taux, selon l'émetteur, le secteur auquel il appartient ainsi que son niveau de rating. On trouve :

- la courbe des taux de rendement du Trésor ;
- la courbe des taux de rendement des entreprises du secteur bancaire disposant du rating A ;
- la courbe des taux de rendement de la société X

I-3- Les différentes formes de la courbe des taux

D'une façon générale, les courbes de taux sont concaves et croissantes, au moins sur leur partie (0-10 ans). Pour être plus précis, les taux à 3 mois d'un type d'instrument donné sont le plus souvent plus bas (et, dans des cas exceptionnels, plus haut) que ceux à 10 ans du même type d'instrument.

Cette structure vient, selon l'explication traditionnelle (Aversion au risque), d'une préférence naturelle des investisseurs pour la liquidité et donc pour les instruments de taux à court terme. Et contre une immobilisation plus longue de leur épargne, et une volatilité accrue des mouvements de prix de celle-ci, les investisseurs exigeraient une rémunération supplémentaire.

La forme de la courbe des taux n'est cependant pas figée. Il se peut en effet qu'elle se modifie sensiblement en raison d'une évolution marquée de la situation monétaire ou budgétaire du pays émetteur.

Plusieurs facteurs endogènes et exogènes à l'émetteur viennent modifier l'apparence de la courbe des taux :

L'évolution des taux directeurs de la Banque centrale va conduire les mouvements de la partie courte de la courbe.

À long terme, deux facteurs entrent en compte dans l'évolution de la courbe :

D'un côté, la prime de risque liée aux incertitudes sur la solvabilité et au défaut de l'émetteur. Ce risque de crédit est notamment évalué par les agences de notation grâce à leur échelle de notation. Plus un pays est bien noté, plus sa probabilité de défaut est faible et donc le taux d'intérêt de long terme exigé est faible.

De l'autre, le risque inflationniste détermine le niveau de taux exigé par les investisseurs, celui-ci détruit le rendement des titres détenus. Les investisseurs qui

achètent des obligations à maturité longue vont donc demander un rendement d'autant plus élevé si leurs anticipations d'inflation le sont également.

II- Les théories économiques explicatives des courbes de taux d'intérêt

Ces théories proposent une tentative d'explication des liaisons entre les taux à terme et les taux au comptant.

II-1- La théorie des anticipations

Selon la théorie des anticipations de F.Lutz, le taux à terme fournit une bonne anticipation du taux au comptant futur. Les taux à long terme seraient, dans ces conditions, égaux à une moyenne géométrique des taux anticipés au comptant.

Un modèle à deux périodes permet de comprendre le raisonnement :

1- Imaginons qu'un agent dispose d'un capital C qu'il envisage de placer sur deux périodes à un taux R . A l'échéance, il obtient :

$$C(1 + R)^2$$

2- Une autre possibilité consiste à placer sur une première période et à reconduire l'opération sur une seconde période. Il obtient :

$$C(1 + r_{(0,1)})(1 + f_{(1,2)})$$

La logique d'arbitrage aboutit à l'égalité : $C(1 + R)^2 = c(1 + r_{(0,1)})(1 + f_{(1,2)})$. Le taux à long terme dépend du taux court $r_{(0,1)}$ et du taux anticipé $f_{(1,2)}$

Maintenant remplaçons $f_{(1,2)}$ par $r_{(0,1)}$:

✓ Si $r_{(0,1)} < f_{(1,2)}$ alors :

$C(1 + R)^2 > C(1 + r_{(0,1)})(1 + f_{(1,2)})$ et $R > r_{(0,1)}$ alors la courbe est **croissante**

✓ Si $r_{(0,1)} > f_{(1,2)}$ alors :

$C(1 + R)^2 < C(1 + r_{(0,1)})(1 + f_{(1,2)})$ et $R < r_{(0,1)}$ alors la courbe est **décroissante**

✓ Si $r_{(0,1)} = f_{(1,2)}$

$c(1 + R)^2 = c(1 + r_{(0,1)})(1 + f_{(1,2)})$ et $R = r_{(0,1)}$ alors la courbe est **plate**.

Les hypothèses de départ : absence de coûts de transaction, parfaite substitution entre les actifs courts et longs, anticipations homogènes, constituent des limites. La préférence pour la liquidité est un frein à la substitution entre actifs, et les anticipations présentent un certain degré d'hétérogénéité.

Cette théorie repose sur le fait que les marchés de taux d'intérêt sont arbitrés et que, notamment, des arbitrages peuvent être réalisés entre tous les compartiments de la courbe des taux. Ainsi, un placement à dix ans sera équivalent à une série de dix placements à un an ou à un placement à vingt ans dont on sortirait au bout de dix ans par exemple. Cette théorie induit également que l'on peut prévoir directement à partir des taux effectivement constatés sur le marché au comptant pour diverses échéances les taux futurs qui y sont implicitement contenus.

II-2- La théorie des anticipations avec prime de liquidité

Selon cette théorie, les emprunteurs ont plutôt tendance à vouloir emprunter à long terme car ils redoutent que les taux puissent monter à court terme et qu'une succession d'emprunts à court terme coûte plus cher qu'un emprunt sur un horizon plus lointain. De plus, les frais de transaction liés à une suite d'opérations à court terme sont beaucoup plus élevés. Ils cherchent à connaître par avance le coût de leur endettement sur un horizon lointain de façon à avoir une bonne visibilité en termes de marge de manœuvre et de rentabilité à dégager dans leur exploitation.

Les prêteurs, par contre, cherchent à placer sur l'horizon le plus court possible. Ils redoutent avant tout une hausse des taux sur le marché qui les contraindrait soit à devoir enregistrer des moins-values comptables, soit à vendre en cas de besoin à perte les titres acquis. Ils redoutent donc les pertes en capital d'autant plus fortes que la sensibilité du titre est importante et que l'échéance sont éloignées.

Il résulte de ces présupposés un déséquilibre fondamental entre l'offre et la demande. La demande se concentre sur les emprunts longs et l'offre sur les placements à court terme. Pour qu'un ajustement s'opère, il est nécessaire de considérer qu'il va exister une prime dite prime de liquidité afin d'inciter les prêteurs à investir à plus long terme. Cette prime est d'autant plus importante que l'échéance est longue, c'est-à-dire que l'aversion au risque en capital est la plus grande.

La prime de liquidité vient incrémenter la courbe des taux sur toutes les maturités. Dans le cas où cette courbe anticipe des hausses de taux futurs (cas d'une courbe croissante) ou constants (cas d'une courbe plate), la prime de liquidité conduira à une courbe réelle encore plus positive. Dans le cas d'une courbe négative, l'introduction d'une prime de liquidité pourra conduire soit à une courbe croissante, soit à une courbe décroissante selon la force des anticipations de baisse des taux futurs.

II-3- La théorie de la segmentation de marché et la théorie de l'habitat préféré

Ces courants de pensées reposent sur l'hypothèse d'une demande spécifique d'actifs sur certaines échéances.

La théorie de la segmentation institutionnelle des marchés proposée par Cullbertson suppose une spécialisation des institutions financières sur certaines échéances (marché obligataire, marché monétaire) aboutissant à un cloisonnement du marché de l'argent (rendant les opérations d'arbitrage difficiles). Dans ces conditions aucune relation stable entre les taux courts et les taux longs ne peut être mise en évidence (les taux courts évoluent indépendamment des taux longs. La courbe de structure des taux est alors discontinue.

Les réformes entreprises pour obtenir un décroisement du marché des capitaux ont permis les opérations d'arbitrage entre différents segments du marché, rendant obsolète ce courant de pensée.

Modigliani et Sutch ont proposé une nouvelle formulation de cette théorie, sous 'appellation de théorie de l'habitat préféré. Chaque opérateur aurait un habitat préféré mais il pourrait le quitter pour un autre proche, à condition d'obtenir un

rendement suffisamment attractif en fonction de l'offre et de la demande de liquidités et de la prime offerte sur ce nouveau segment.

Le niveau des primes ne dépendrait plus uniquement de la maturité, mais aussi des conditions du marché.

II-4- la théorie des anticipations rationnelles

Introduites par John Muth dès 1961, ces hypothèses de rationalité ont été considérablement développées par Robert Lucas (1972), puis Thomas Sargent (1981). Elles constituent l'un des fondements de la Nouvelle économie classique.

La théorie des **Anticipations rationnelles** est une hypothèse selon laquelle les prévisions des agents économiques, grâce aux informations dont ils disposent, sont souvent conformes aux modèles théoriques expliquant leurs comportements. Bien qu'il puisse subsister une part d'incertitude et d'erreurs dans la réalisation des comportements économiques, les prises de décision sont toujours optimales, et elles sont basées sur l'information dont les agents disposent ainsi que sur leurs expériences passées. Cela suppose également que les agents connaissent le modèle qui régit l'économie, et toutes les variables qui le composent.

III a construction de la courbe zéro coupon à partir des données de marché

Construire une courbe de taux à partir d'obligations classiques, dotées d'un coupon, créerait une courbe souffrant d'un certain nombre d'incohérences. Ainsi, par exemple deux obligations ayant la même échéance mais une duration très différente, n'auront pas le même taux de rendement. De même, deux coupons identiques appartenant à deux obligations de maturité différente ne seront pas actualisés au même taux de rendement, alors qu'ils génèrent un flux strictement identique.

Afin d'éviter des distorsions dues à des niveaux de coupons annuels différents, on ne retient que des titres qui ne versent pas de coupon, c'est-à-dire des obligations à coupon zéro.

Étant donné qu'il n'existe généralement pas d'obligation coupon zéro cotée pour chaque échéance ou, s'il en existe, qu'elles sont trop peu liquides pour que leur taux de rentabilité actuariel soit significatif, il faut reconstruire la courbe des taux coupon zéro à partir des obligations cotées et liquides.

Avant de procéder à la modélisation de la dynamique des taux d'intérêt, on s'intéresse aux différentes techniques qui permettent de construire une courbe des taux à partir des données de marché.

III-1- Méthode de Bootstrap

La méthode de Bootstrap est une technique qui permet de construire une courbe de taux pas à pas, à partir d'éléments discontinus.

La méthode consiste à choisir une suite d'instruments financiers liquides à maturités croissantes, et à inverser les formules de valorisation de ces instruments pour obtenir les facteurs d'actualisation au fur et à mesure de notre avancement.

Pour valoriser un instrument, nous avons besoin d'un ou de plusieurs facteurs d'actualisation. C'est pourquoi une erreur dans l'un des facteurs d'actualisation fausse toute la courbe.

Pour le segment de la courbe inférieur à 1 an, on extrait les taux zéro coupon grâce aux prix des titres zéro coupon, qui sont cotés sur le marché, pour ensuite obtenir une courbe continue par interpolation linéaire ou cubique. Pour le segment de la courbe allant de 1 an à 2 ans, on choisit l'obligation à l'échéance la plus rapprochée parmi les obligations de maturité comprise entre 1 an et 2 ans.

Ce titre verse deux flux qui sont le facteur d'actualisation du premier flux connu grâce à l'étape 1, et celui du second flux qui est résolu avec l'équation non linéaire :

$$P_0 = \frac{C}{1 + r_{(0,1)}} + \frac{C + \text{prix de remboursement}}{1 + r_{(0,2)}}$$

Où $r_{(0,1)}, r_{(0,2)}$ est une séquence de taux zéro coupon

P_0 : est le prix de marché de l'obligation

C : le coupon versé par l'obligation calculé à base du taux d'intérêt facial

Ceci nous permet d'obtenir un premier point de la courbe de taux sur ce segment. On réitère alors le même procédé avec l'obligation de maturité immédiatement supérieure, mais toujours inférieure à 2 ans.

Pour le segment de la courbe allant de 2 ans à 3 ans, on réitère l'opération précédente à partir des titres ayant une maturité comprise entre 2 ans et 3 ans. On procède ainsi jusqu'à avoir le segment de la courbe de notre maturité cherchée.

Quand on utilise la méthode bootstrap, il est nécessaire de choisir une méthode d'interpolation entre deux points. Deux sont particulièrement utilisées : les interpolations linéaires et cubiques.

Interpolation linéaire : Pour cette méthode on connaît les taux zéro-coupon de maturités t_1 et t_2 . On souhaite interpoler le taux de maturité t avec $t_1 \leq t \leq t_2$. La formule générale est la suivante :

$$r_{(0,t)} = \frac{(t_2 - t)r_{(0,t_1)} + (t - t_1)r_{(0,t_2)}}{t_2 - t_1}$$

Interpolation cubique : On procède à une interpolation cubique par segment de courbes. On définit un premier segment entre t_1 et t_4 où l'on dispose de 4 taux $r_{(0,t_1)}, r_{(0,t_2)}, r_{(0,t_3)}, r_{(0,t_4)}$, le taux $r_{(0,t)}$ est défini par :

$$r_{(0,t)} = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Sous la contrainte que la courbe passe par les quatre points de marché $r_{(0,t_1)}, r_{(0,t_2)}, r_{(0,t_3)}, r_{(0,t_4)}$. D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} r_{(0,t_1)} = at_1^3 + bt_1^2 + ct_1 + d \\ r_{(0,t_2)} = at_2^3 + bt_2^2 + ct_2 + d \\ r_{(0,t_3)} = at_3^3 + bt_3^2 + ct_3 + d \\ r_{(0,t_4)} = at_4^3 + bt_4^2 + ct_4 + d \end{cases}$$

III-2- La méthode de Nelson et Siegel :

L'une des plus intéressante car ils partent de l'hypothèse où le taux instantané $f_t(\tau)$ est la solution d'une équation différentielle, dans le cas d'une racine double. C'est-à-dire $f_t(\tau)$ est de la forme :

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

III-3- Méthode des splines Polynomiaux

Ces modèles sont beaucoup plus flexibles, mais présentent au contraire des paramètres qui ne sont pas interprétables d'un point de vue financier. Elles concernent les fonctions de splines polynomiales, exponentielles ou encore les B-splines. Nous ne présenterons que la méthode des splines polynomiaux qui consiste à estimer la courbe de taux par des polynômes définie par morceaux. On considère l'écriture standard comme dans l'exemple qui suit :

$$B(0, s) = \begin{cases} B_0(s) = d_0 + c_0s + b_0s^2 + a_0s^3 & s \in [0, 5] \\ B_5(s) = d_1 + c_1s + b_1s^2 + a_1s^3 & s \in [5, 10] \\ B_{10}(s) = d_2 + c_2s + b_2s^2 + a_2s^3 & s \in [10, 20] \end{cases}$$

La fonction d'actualisation compte ici 12 paramètres. On rajoute des contraintes de régularité sur cette fonction qui garantissent la continuité de la fonction, la continuité de la dérivée première et de la dérivée seconde de cette fonction aux points de raccord 5 et 10.

Pour $i=0, 1$ et 2 :

$$\begin{cases} B_0^{(i)}(5) = B_5^{(i)}(5) \\ B_{10}^{(i)}(5) = B_5^{(i)}(10) \end{cases}$$

Et la contrainte qui porte sur le facteur d'actualisation $B_0(0) = 1$: En utilisant l'ensemble de ces 7 contraintes, le nombre de paramètres à estimer tombe à 5 :

$$B(0, s) = \begin{cases} B_0(s) = d_0 + c_0s + b_0s^2 + a_0s^3 & s \in [0, 5] \\ B_5(s) = 1 + c_0s + b_0s^2 + a_0[s^3 - (s - 5)^3] + a_1(s - 5)^3 & s \in [5, 10] \\ B_{10}(s) = 1 + c_0s + b_0s^2 + a_0[s^3 - (s - 5)^5] + a_1[(s - 5)^3 - (s - 10)^3] + a_2(s - 10)^3 & s \in [10, 20] \end{cases}$$

Le nombre de splines influe sur la qualité des résidus et le lissage de la courbe. Plus il y a de splines et meilleurs sont les résidus. La courbe devient toutefois moins lisse, et peut passer par des points aberrants. Moins il y a de splines et plus on lisse la courbe. Mais les écarts de prix peuvent devenir importants ce qui laisse à penser que la courbe est mal rendue.

VI- La modélisation de la courbe des taux

En cas de manque de données, il faudrait imposer des modèles. Il existe :

✓ **Ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'équilibre :**

En effet on parle d'équilibre général quand il s'applique à l'ensemble de l'économie (consommation/production, offre/demande). Mais une telle approche implique de poser des hypothèses restrictives qui peuvent entraîner un biais dans la modélisation.

Le modèle de COX, INGERSOLL, ROSS (1985), est un modèle répondant à une telle approche.

✓ **Et ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'arbitrage :**

Comme le modèle de VASICEK (1977). Cette approche est moins restrictive, mais il faut noter que si l'approche précédente basée sur une économie globale en équilibre implique toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

Pour illustrer ces propos, il est intéressant, dans un premier temps, de présenter le modèle de Vasicek afin de mieux comprendre l'intérêt de l'utilisation d'un modèle multifactoriel plus complexe.

Le modèle de Vasicek

Ce modèle est un modèle central pour la simulation des taux d'intérêt (en particulier les taux courts) ; il fut introduit par Aldrich Vasicek en 1977. Nous noterons la valeur du taux court modélisée à tout instant t . Ce modèle suit cette EDS¹ :

$$dr_t = k(\bar{r} - r_t)dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

α : est le retour du taux court à la moyenne

$\bar{r}$: le taux moyen à l'infini

σ_r : c'est l'écart type

$B_{x,t}$: mouvement brownien à tout instant

Ce modèle suit un processus Ornstein Uhlenbeck, de ce fait, nous obtenons une solution exacte par la même méthode évoquée au point de l'inflation. Cette solution est la suivante :

$$r_t = r_0 e^{-k_r t} + \bar{r}(1 - e^{-k_r t}) + \int_0^t \delta_r e^{k_r(s-t)} dB_{r,s}$$

Il s'en suit qu'à tout instant t : $r_t \sim N(r_0 e^{-k_r t} + \bar{r}(1 - e^{-k_r t}), \delta_r^2 \times \frac{1 - e^{-2k_r t}}{2k_r})$

Ce qui implique, par la variance du modèle, que $p(r_t < 0) > 0$. L'apparition probable de taux d'intérêt négatifs constitue une des limites importantes du modèle.

Ceci n'était qu'une illustration des limites observables des modèles monofactoriels ; de façon plus générale, d'autres limites peuvent apparaître :

¹ ELIE Romuald. Calcul Stochastique pour la finance. Cours de l'université Paris Dauphine. 79 pages

- Les différentes formes de la courbe des taux ne sont pas toutes prises en compte ;

- Ces modèles représentent mal les subtilités du marché ;

- Ils impliquent que ces taux évoluent de façon parfaitement corrélée en fonction de leur maturité.

Les modèles multifactoriels sont plus adaptés à la réalité du marché car ils permettent d'éviter certaines des limites du modèle ci-dessus, d'où l'introduction dans cette partie du modèle de Hull et White.

Le modèle de Hull et White

Une fois l'inflation décrite, les taux d'intérêt réels sont modélisés. Le taux à court terme r_t et le taux à long terme l_t reprennent l'approche de retour à la moyenne du modèle Hull et White (1994)².

Les taux réels suivent également un processus d'Ornstein – Uhlenbeck suivant :

$$\begin{cases} dr_t = k_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dB_{r,t} \\ dl_t = k_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dB_{l,t} \end{cases}$$

k_r : la vitesse de retour à la moyenne des taux courts ;

k_l : la vitesse de retour à la moyenne des taux longs ;

μ_l : le taux moyen long terme ;

σ_r : la volatilité des taux courts ;

σ_l : La volatilité des taux longs ;

$B_{r,t}, B_{l,t}$: Mouvements browniens à tout instant t

D'un point de vue pratique, il n'est pas aisé d'obtenir des données concernant les taux d'intérêt réels ; c'est pour cela qu'Ahlgrim et al. les obtiennent par différence entre les taux d'intérêt nominaux et l'inflation.

Ces deux modèles suivent des processus Ornstein Uhlenbeck ; en particulier, le modèle long terme n'est rien de plus qu'un modèle de Vasicek. De ce fait, il se discrétise par la méthode évoquée au point précédant. Nous obtenons alors :

$$r_{t+1} = r_t e^{-k_r} + l_t(1 - e^{-k_r}) + \varepsilon_{r,t} \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_r}}{2k_r}}$$

$$l_{t+1} = l_t e^{-k_l} + \mu_l(1 - e^{-k_l}) + \varepsilon_{l,t} \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_l}}{2k_l}}$$

En effet, la modélisation des taux court terme dépend directement de la modélisation des taux long terme. De ce fait, ce modèle sera plus difficile à calibrer et en particulier une méthode des doubles moindres carrés sera nécessaire.

Après avoir décrit l'évolution des taux d'intérêt, nous évaluons les titres financiers à revenus fixes. En effet, elle dépend directement de la modélisation des zéro-coupon et donc de la modélisation des courbes de taux.

² COMETS, Francis. Meyre, THIERRY .*Calcul stochastique et modèles de diffusion : cours et exercices corrigés*. Paris Dunod 2006.vol 1. 324 pages

Théoriquement, la modélisation des obligations fait intervenir une prime de risque traduisant le risque de défaut de certaines obligations ainsi que la croissance de la volatilité en fonction de leur maturité.

Dans le cadre de cette étude, nous resterons proche de l'univers risque neutre ; seul le risque de défaut sera pris en compte.

Dans un premier temps, il est nécessaire de développer le modèle de projection des zéro-coupons selon l'approche de modélisation des taux de Hull et White décrite précédemment.

Tout d'abord, notons qu'Ahlgrim et al³. reprennent la relation de Fisher, concernant le prix d'un zéro coupon à l'instant t de maturité T . En effet, ils considèrent que ces obligations sont tarifées avec des taux d'intérêt réels et des taux d'inflation. Si nous supposons que l'hypothèse d'indépendance entre les taux d'intérêt réel et l'inflation est vérifiée (test de corrélation nécessaire), nous avons alors la formule suivante concernant le prix des zéro-coupons :

$$p_{nom}(t, T) = p_{real}(t, T) \times p_{inf}(t, T)$$

$p_{nom}(t, T)$: Le prix en nominal à l'instant t d'un zéro-coupon de maturité T ;

$p_{real}(t, T)$: Le prix en réel à l'instant t d'un zéro-coupon de maturité T ;

$p_{inf}(t, T)$: la composante inflation du prix en tenant compte de l'inflation à l'instant t d'un zéro-coupon de maturité T .

Nous pouvons donc discerner quatre étapes pour la modélisation des obligations :

- ✓ la modélisation des zéro-coupon en réel ;
- ✓ la modélisation des zéro-coupon en nominal ;
- ✓ la modélisation des obligations proprement dite ;
- ✓ la modélisation de la probabilité de défaut pour les obligations risquées.

• **Modélisation des zéro coupon en réel**

A partir du modèle de taux de Hull et White, décrit au point concernant la modélisation des taux, il est possible d'obtenir le prix d'un zéro-coupon à tout instant t de maturité T .

$$p_{real} = \exp(A(s) - B_2(s)r_t - B_2(s)l_t)$$

Avec :

$S = T - t$ à tout instant t ;

r_t : le taux court modélisé à tout instant t ;

l_t : le taux long modélisé à tout instant t ;

$A(s), B_1(s)$ et $B_2(s)$: Sont des fonctions dépendant du temps :

$$B_2(s) = \frac{1 - e^{-k_r s}}{k_r}$$

$$B_1 = \frac{k_r}{k_r - k_l} \left(\frac{1 - e^{-k_l s}}{k_l} - \frac{1 - e^{-k_r s}}{k_r} \right)$$

³ PLANCHET, Frédéric. [Et al]. *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs*.
 Pagination de la partie : 109-112

$$A(s) = (B_2(s) - s)(u_l - \frac{\delta_r^2}{2k_r^2}) + B_1(u_l - \frac{\delta_r^2 B_2(s)^2}{4k_r^2} + \frac{\delta_l^2}{2} (\frac{s}{k_l^2} - 2 \frac{B_1(s) + B_2(s)}{k_l^2} + \frac{1}{k_l - k_r} - \frac{1 - e^{-k_r s}}{k_r} - \frac{2k_r}{k_l(k_l - k_r)} \\ \times \frac{1 - e^{-(k_r + k_l)s}}{k_r + k_l} + \frac{k_r^2}{k_l(k_l - k_r)} \times \frac{1 - e^{-k_l s}}{2k_l})$$

k_r : La vitesse de retour à la moyenne des taux courts ;

k_l : La vitesse de retour à la moyenne des taux longs ;

u_l : Le taux moyen long terme ;

∂_r : La volatilité des taux courts ;

∂_l : La volatilité des taux longs.

• Modélisation des zéro-coupon en nominal

Le modèle de l'inflation décrit peut être vu comme un modèle mono factoriel de Vasicek.

De ce fait, la solution de la composante inflation est bien connue :

$$p_{inf}(t, T) = A(s) \exp(-B(s)q_t)$$

Avec :

$s = T - t$ à tout instant t ;

q_t : l'inflation modélisée à tout instant t ;

$$b(s) = \frac{1 - e^{-k_q s}}{k_q}$$

$$A(s) = \exp\left(\frac{(B(s) - s) \times (k_q^2 u_q - \frac{\delta_q^2}{2})}{k_q^2} - \frac{\delta_q^2 B(s)^2}{4k_q}\right)$$

Il suffit, par la suite, d'appliquer le produit entre et pour obtenir le prix du zéro-coupon en nominal.

• Modélisation du prix de l'obligation

Considérons une obligation de maturité T , de taux facial γ et de nominal N , alors, classiquement, le prix de l'obligation est obtenu par la somme actualisée des flux tombant à chaque date i . Si nous notons le prix de cette obligation $O(T, \gamma, N)$, le flux tombant à date i , et le taux d'actualisation à la date i , nous avons alors la relation suivante :

$$O(T, \gamma, N) = \sum_{i=1}^T \frac{F_i}{(1 + t_i)^i}$$

avec:

$$F_i = \begin{cases} \gamma N & \text{si } 1 \leq i < T \\ N(1 + \gamma) & \text{si } i = T \end{cases}$$

CONCLUSION

La courbe des taux nous renseigne sur le taux de rendement des titres obligataires en fonction de la maturité. Elle nous permet donc de prévoir les taux pour l'avenir.

Son allure dépend des anticipations sur les taux courts, le risque associé à émetteur, ainsi qu'à la maturité.

La construction de la courbe des taux est d'une nécessité tant pour l'investisseur porteur de liquidité et pour l'émetteur. A fin de réaliser ça, une multitude de modèles se sont donc développés. Ils peuvent être déterministes (pendant longtemps le taux à été modélisé de façon simpliste par une constante) ou stochastiques, à discrétisation exacte ou approximative, mono- ou multifactoriels, reposant sur la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage ou sur l'équilibre du marché offre/demande.

BIBLIOGRAPHIE

- 1- ALPHONSE, Pascal [et al]. *Gestion de portefeuille et marché financiers*. 2^{ème} édition. PEARSON, 2013. 640 pages. ISBN : 978-2-7440-7238-3 ;
- 2- BELLALAH, Mondher. *Gestion des risques de taux d'intérêt et de change, théories et exercices corrigés*. préface d'ERIC Briys. DE BOECK, 2005. 511 pages. ISBN : 2-8041-4787-1 ;
- 3- COMETS, Francis. Meyre, THIERRY .*Calcul stochastique et modèles de diffusion : cours et exercices corrigés*. Paris Dunod 2006.vol 1. 324 pages. ISBN 2-10-050135-6
- 4- EL KARAOUI, Nicole. Emmanuel GOBET. *Les outils stochastiques des marchés financiers une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*. Édition de l'école polytechnique Palaiseau, 2011. 238 pages;
- 5- GOURLAOUEN, Jean-Pierre. *La structure par terme des taux d'intérêt*. ECONOMICA, 1997. Collection gestion poche. 112 pages. ISBN : 2-7178-3232-7;
- 6- JOKUNG NGUENA, OCTAVE. *Mathématiques et gestion financière. Applications avec exercices corrigés*. DE BOECK, 2004. Collection comptabilité, contrôle, et finance. 567 pages. ISBN : 978-2-8041-4402-9;
- 7- LUMBERTON, Damien. Bernard, LAPEYRE. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. 3^{ème} édition ELLIPES, 2012. 256 pages. ISBN-10: 2729871985 ;
- 8- MARTELLINI, Lionel. Philippe, PRIAULET. *Produits de taux d'intérêt : méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*. Préface de Nicol EL KARAOUI. ECONOMICA, 2000. 288 pages. ISBN : 2-7178- 4029-X ;
- 9- PORTAIT, Roland. Patrice, PONCET. *Finance de marché*. 4^{ème} édition. DALLOZ, 2014. 1083 pages. ISBN : 978-2-247-13695-7 ;
- 10- ELIE, Romuald. *Contrôle stochastique et méthodes numériques en finance mathématique*. Thèse de doctorat. Université paris Dauphine. Mathématique de la décision. 11 décembre 2006. 213 pages ;

- 11- COUPIER, David. Cours *processus stochastique*. Ecole polytechniques Lille. 54 pages ;
- 12- PLANCHET, Frédéric. [Et al]. *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs*. *ECONOMICA*, 2012. Collection Assurance, Audit, Actuariat. 288 pages ;
- 13- ELIE Romuald. *Calcul Stochastique pour la finance*. Cours de l'université Paris Dauphine. 79 pages. Disponible sur : https://www.ceremade.dauphine.fr/~elie/elie_files/CStoFinance.pdf
- 14- FRANCHI, Jacques. *Calcul Stochastique*. Cours Université de Strasbourg. 2013. Disponible sur : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~franchi/CProbActuar.pdf>;
- 15- Millet, Annie. *Calcul Stochastique 2. Mathématiques Appliquées à l'économie et à la Finance* Université Paris 1. Spécialité : Modélisation et Méthodes Mathématiques en Economie et Finance. 26 octobre 2009. 89 pages. Disponible sur : <https://samos.univ-paris1.fr/archives/ftp/cours/millet/CalculSto2/CalSto2.pdf>