

LA DISTANCE HORIZONTALE ENTRE DEUX POINTS

Par C. Million

Cap Palm Beach A Impasse Ordan
10 Rue du Cros Vieil 06400 Canne- France
e-mail : Claude.Million@wanadoo.fr

ملخص:

على حسب التطبيقات المرتقبة و/أو الدقة المتوقعة يمكن للشخص اختيار تعريفه الخاص للمسافة الأفقية بين نقطتين. لقد قام الجيوديزي Burkholder في سنة 1991 بإعطاء بعض التعاريف لهذه المسافة.

(1) HD = هو جانب من جوانب الزاوية القائمة و الذي يعتبر وتر المثلث هو مسافتها المنحنية ، الجانب الآخر هو فارق الارتفاع ، لقد صرح Burkholder من جانبه بأنها المسافة الأفقية للمهندسين ، على الأرجح مخالفة للمسافة الأفقية للجيوديزيين وبأنها المسافة المتحصل عليها عن طريق GPS و يعطيها تعريفا مختلفا.

(2) HD = المسافة بين إتجاهي المطمار بين هاتين النقطتين حسب المخطط المماس للألة.

(3) HD = الحبل بين إتجاهي المطمار في هاتين النقطتين، نهايتي نقطتين القياس هي على نفس المستوى و الحبل عمودي على الخط العمودي في نقطة وسطه .

(4) HD = المسافة بين إتجاهات المطمار بين هاتين النقطتين على طول سطح أيا كان مستوا.

(5) HD = المسافة حسب قوس متواجد على مستوى متوسط للبحار بين إتجاهات المطمار بين هاتين النقطتين.

(6) HD = المسافة حسب الخط الجيوديزي المسطر على الجسم الناقص للدوران بين إتجاهات المطمار بين هاتين النقطتين.

(7) HD = المسافة بين هاتين النقطتين في إسقاط تشابهي.

لقد قمنا باختيار نقطتين جيوديزيتين ، متباعدة نوعا ما لتكون الاختلافات معتبرة لكن بدون مبالغة. لقد قمنا بقياس هذه المسافات و كذلك مسافات أخرى.

Résumé:

Tout dépendant des applications envisagées et/ou de la précision escomptée, chacun peut choisir « sa » définition de la distance horizontale entre deux points. Le géodésien Burkholder en 1991 a donné quelques définitions de cette distance :

HD(1) = C'est un des côtés de l'angle droit dont la distance inclinée serait hypoténuse, l'autre étant la dénivelée. Burkholder déclare de son côté que c'est la distance horizontale des géomètres, probablement par opposition de la distance horizontale des géodésiens, que c'est la distance obtenue par G P S, et en donne une définition différente.

HD(2) = La distance entre les deux directions d'un fil à plomb selon le plan tangent à l'instrument.

HD(3) = La corde entre deux directions du fil à plomb en ces deux points. Les deux termes de la mesure étant au même niveau et la corde étant perpendiculaire à la verticale menée en son milieu.

HD(4) = La distance entre les directions du fil à plomb entre ces deux points. le long d'une surface de niveau quelconque.

HD(5) = la distance selon un arc situé au niveau moyen des mers entre les directions du fil à plomb entre ces deux points.

HD(6) = La distance selon la géodésique tracée sur un ellipsoïde de révolution entre les directions du fil à plomb entre ces deux points.

HD(7) = La distance entre ces deux points dans une projection conforme.

On a choisit deux points géodésiques, assez éloignés pour que les différences soient appréciables, mais sans excès, on a calculé ces distances, et quelques autres.

Abstracts:

Depending on the application and/or the precision needed, one can choose « his » appropriate definition of the horizontal distance, according to Burkholder (1991) the options are :

HD(1) = One of the right angle component of the slope distance, the other being the elevations difference.

HD(2) = The distance between two plumb lines in a plane tangent to the earth at the instrument station.

HD(3) = The chord distance between two plumb lines. The two end points having the same elevation and the chord is perpendicular to the vertical only at its midpoint.

HD(4) = The arc distance along some level surface between two plumb lines.

HD(5) = The arc distance at mean sea level surface between two plumb lines.

HD(6) = The distance along the geodesic of a revolution ellipsoid surface between two plumb lines.

HD(7) = The State Plane Grid distance between two points.

We have chosen two real geodetic points, not too close to obtain a difference, not too far to remain realistic, and computed these distances, and few others.

I. Introduction

On parle souvent de la distance horizontale entre deux points en oubliant de préciser laquelle, le géodésien Burkholder, en 1991, en a donné plusieurs, sept exactement, définitions de cette distance.

On a choisit deux points géodésiques assez éloignés pour que les différences soient appréciables, mais sans excès, et on a calculé ces distances, et quelques autres, afin de montrer qu'il faut bien définir ce terme, d'autant que pour des raisons évidentes c'est cette distance qui sera reportée sur les cartes. La question à se poser, pour le géomètre topographe, est laquelle apparaîtra sur mon plan ou ma carte, et pour l'utilisateur, laquelle suis-je certain d'obtenir en vue de mes applications ?

On a choisit deux points géodésiques réels quelconques assez éloignés, et on a calculé les distances en fonction des définitions de ce géodésien, plus quelques autres. Ces points sont connus par leurs coordonnées géocentriques X Y Z.

Si on ne réduit pas la mesure à une surface de référence, ou si les deux points ne sont pas à la même altitude, la distance horizontale de A à B sera différente de celle de B à A ! La plus longue des deux appartient au terme de la mesure qui a la plus haute altitude.

Dans la plupart des cas, en raison de l'altitude, de la hauteur du géoïde, la distance d'une projection plane est différente des distances horizontales décrites ci-après.

HD(1-1)

Selon Burkholder c'est la distance horizontale des géomètres celle qui serait « donnée » par GPS, ce qui n'est pas évident comme on va le voir.

Pour nous, c'est un des côtés de l'angle droit dont la distance inclinée serait l'hypoténuse, l'autre étant la dénivelée figure 1. Burkholder déclare pourtant que sa définition est la distance horizontale des géomètres, probablement par opposition de la distance horizontale des géodésiens, et que c'est la distance obtenue par GPS.

Nous allons donc devoir calculer la distance inclinée entre les deux points et nous le ferons grâce à la formule très connue de notre lecteur. Mais il faut aussi connaître la dénivelée. Pour cela il faut sortir du domaine 3-D et se donner une surface de référence en utilisant l'algorithme classique attribué à Helmert de projection orthogonale du point 3-D sur l'ellipsoïde de référence, sa variante corrigée par Pizzetti n'est pas utile en ce cas.

Pour passer des coordonnées géocentriques à la hauteur des points au-dessus de l'ellipsoïde de référence on utilise les formules suivantes [1] :

On rappelle d'abord que la seconde excentricité, e' , est donnée par :

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

On calcule la quantité auxiliaire :

$$\theta = \text{Arctg}\left(\frac{Z \cdot a}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot b}\right)$$

¹ On utilise, souvent, une méthode itérative différente

On calcule ensuite la latitude d'Helmert φ_H :

$$\varphi_H = \frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \sin^3(\theta)}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 \cdot a \cdot \cos^3(\theta)},$$

avec N étant la grande normale:

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2(\varphi_H) + b^2 \cdot \sin^2(\varphi_H)}}, \text{ enfin,}$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos(\varphi_H)} - N,$$

$$HD(1-1) = \sqrt{Di^2 - (h_2 - h_1)^2}$$

Les deux points ont pour coordonnées géocentriques X Y Z et pour hauteur mesurée par le NGF :

	X	Y	Z	h(mesuré)
1-	4.613.042, 649	-107.632, 929	4.388.662, 297	52,570
2-	4.627.933, 908	-121.226, 353	4.372.718, 217	59,392

La distance inclinée calculée est de 25.704, 950 m.

La distance horizontale calculée est de 25.704, 949 m.

HD(1-2)

Seulement, la méthode qu'on vient d'utiliser n'est pas du tout celle retenue par l'auteur (Burkholder) qui considère d'abord des coordonnées tri-rectangulaires locales centrées sur un des points ou sur tout autre point retenu pour origine la figure 2 détaille ce nouveau référentiel. Le passage des coordonnées géocentriques aux coordonnées locales l'origine des coordonnées étant au point choisi, Δn en direction du Nord géographique au point origine, Δu suivant la verticale de l'origine, Δe en direction de l'Est au point origine, λ et φ étant les coordonnées géographiques du point origine, ΔX , ΔY , ΔZ , sont les différences de coordonnées géocentriques entre le point calculé et le point choisi pour origine, se fait à l'aide des relations suivantes :

$$\Delta e = -\Delta X \cdot \sin(\lambda) + \Delta Y \cdot \cos(\lambda),$$

$$\Delta n = -\Delta X \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\lambda) - \Delta Y \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\lambda) + \Delta Z \cdot \cos(\varphi),$$

$$\Delta u = \Delta X \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) + \Delta Y \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) + \Delta Z \cdot \sin(\varphi)$$

selon l'auteur cité, la distance horizontale entre le point origine et le point choisi serait :

$$HD(1-2) = \sqrt{\Delta e^2 + \Delta n^2}$$

On remarque immédiatement que cette distance est différente de 1 à 2 à celle de 2 à 1, les coordonnées géographiques λ et φ étant elles-mêmes différentes.

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \Delta e &= -13.242,373 \\ \Delta n &= -22.031,387 \\ \Delta u &= -45,026 \end{aligned} \quad HD(1-2)=25.704,911\text{m, - évidemment}$$

un peu plus courte que la précédente

HD(2-1)

C'est la distance entre deux directions des fils à plomb le long d'un plan tangent à la station de l'instrument. Comme d'habitude, on place le plan tangent sur le point 1. Cela semble facile, il suffit de calculer l'arc, puis le sinus de l'arc, et le multiplier par le rayon R en ce point.

$$HD(2-1) = R.tg(s), \text{ ce n'est pas aussi facile :}$$

$$\cos(s) = \vec{1}_1 \cdot \vec{2}_1 + \vec{1}_2 \cdot \vec{2}_2 + \vec{1}_3 \cdot \vec{2}_3, \quad \vec{1} \text{ étant le vecteur normal}$$

à l'ellipsoïde au point 1, et $\vec{2}$ le vecteur normal à l'ellipsoïde au point 2, avec :

$$\vec{1}_1 = \sin(\lambda_1) \cdot \cos(\varphi_1), \quad \vec{1}_2 = \cos(\lambda_1) \cdot \cos(\varphi_1), \quad \vec{1}_3 = \sin(\varphi_1),$$

même chose pour le vecteur 2 :

$$\vec{2}_1 = \sin(\lambda_2) \cdot \cos(\varphi_2), \quad \vec{2}_2 = \cos(\lambda_2) \cdot \cos(\varphi_2), \quad \vec{2}_3 = \sin(\varphi_2),$$

Il faut, en cet instant, se rappeler que les coordonnées géographiques λ et φ sont des coordonnées ellipsoïdales, et non sphériques, et qu'en principe on ne sait pas faire des calculs d'arc avec ce type de coordonnées, toutefois, le calcul de l'angle entre deux vecteurs ci-dessus est tout à fait correct, pourvu qu'on puisse calculer le rayon moyen de l'arc !

Normalement il faut transformer les coordonnées ellipsoïdales en coordonnées sphériques pour faire des calculs de trigonométrie. C'est un problème classique de géodésie, c'est pourquoi on va résumer les opérations. Soit une sphère de rayon a ou a' , grand axe de l'ellipsoïde de référence (a' peut être différent du grand axe de l'ellipsoïde mondial a et correspondre au grand axe d'une équipotentielle théorique passant par le chantier)[2] on a :

$$N \cdot \cos(\varphi) = a \cdot \cos(\psi), \text{ puis } N = \frac{a}{w} \text{ avec } w = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)},$$

$$\cos(\psi) = \frac{\cos(\varphi)}{w}, \quad tg(\psi) = \frac{b}{a} \cdot tg(\varphi) \text{ et } tg(\varphi) = \frac{a}{b} \cdot tg(\psi)$$

ψ est la latitude sphérique. On calcule, ensuite la différence de longitude sphérique avec :

$$\Delta\lambda' = \frac{a}{b} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} w \cdot d\lambda \quad \text{intégrale qu'on calcule par}$$

la formule des trois niveaux :

$$\lambda'_2 - \lambda'_1 = \Delta\lambda' = \frac{\Delta\lambda \cdot a}{6 \cdot b} (w_1 + 4 \cdot w_M + w_2), \quad w_M$$

étant la valeur de w au milieu du segment 1-2, w est fonction de la latitude sphérique en ce point ψ_M :

$$tg(\psi_M) = \frac{tg(\psi_1) + tg(\psi_2)}{2 \cdot \cos(\frac{\Delta\lambda'}{2})}, \quad \text{on substitue}$$

$\Delta\lambda$ à $\Delta\lambda'$ sans erreur supérieure à celle introduite par l'emploi de la formule des trois niveaux pour l'intégration. On peut entreprendre le calcul de l'arc par la trigonométrie sphérique.

En ce point deux méthodes sont possibles, l'une utilise pour rayon de la sphère tangente R au point 1 le rayon moyen terrestre R_m de GRS 80 auquel on ajoute la hauteur du point au dessus de l'ellipsoïde h_e : $R = R_m + h_e$. Dans ce premier cas, il suffit de calculer l'arc par les formules de la trigonométrie sphérique.

Dans le second on veut raffiner le calcul de R en calculant la courbure moyenne de l'ellipsoïde au point 1 et dans la direction 1-2 par la formule d'Euler. On reviendra sur ce second cas dans le paragraphe suivant.

Pour calculer l'arc, qui est généralement petit, on ne peut utiliser la formule traditionnelle qui donne le cosinus de l'arc s qui serait trop imprécise. On proposera une formule qui pourrait être assimilée à « une relation de Pythagore dans le domaine sphérique ».

$$\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right)$$

$$- \sin^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\right), \text{ si on pose :}$$

$$\sin^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = A, \quad \sin^2\left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\right) = B, \quad \cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) = C,$$

$$\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) = S, \quad S = A + C \cdot B - A \cdot B, \quad \sin(s) = 2 \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{1 - S}$$

Toutefois, il y a encore plus simple, mais avec une recherche supplémentaire de la valeur d'une ligne trigonométrique :

$$\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\right) \cdot \cos(\psi_1) \cdot \cos(\psi_2)$$

$$\sin^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = A, \quad \sin^2\left(\frac{\lambda'_2 - \lambda'_1}{2}\right) = B, \quad \cos(\psi_1) = C, \quad \cos(\psi_2) = D$$

$$\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) = S, \quad S = A + B \cdot C \cdot D, \quad \sin(s) = 2 \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{1 - S}$$

On peut utiliser comme rayon terrestre moyen celui donné dans GRS 80 :

$$R = 6371008,771 \text{ m soit } R = \frac{2 \cdot a' + b'}{3} \text{ dans notre cas, pour affiner}$$

le résultat, on peut même choisir $R = \frac{2 \cdot a' + b'}{3}$. On verra que c'est une mauvaise solution, à éviter, car on a, après calcul :

$$HD \ 2-1 = 25.721,48 \text{ m.}$$

HD (2-2)

On essaie d'estimer correctement le rayon d'une sphère qui soit concentrique à la sphère paramétrique et passant par le point 1 (on pourrait faire la même opération avec une sphère passant par le point 2).

Comme l'origine des coordonnées correspond au centre de la sphère paramétrique on a : $R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$ on obtient alors : $R_1 = 6.368.053,393 \text{ m}$ puis **HD (2-2) = 25.709,316 m** comme contrôle on a calculé l'arc s à l'aide d'une formule différente des précédentes, d'abord on a calculé

$$tg(Az_{1-2}) = \frac{\sin(\Delta\lambda')}{tg(\psi_2) \cdot \cos(\psi_1) - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\Delta\lambda')},$$

l'azimut 1-2 par : les

$$\text{puis } \sin(s) = \frac{\sin(\Delta\lambda') \cos(\psi_2)}{\sin(Az_{1-2})}$$

résultats donnent neuf chiffres identiques $s = 0,00403721111$ radian, très suffisants pour nos calculs à huit chiffres significatifs.

On voit que le problème se situe dans le «rayon» à adopter

HD (3)

Cette longueur sera celle de la corde joignant les deux points, ou plutôt la corde joignant le point 1 et la direction du fil à plomb en 2, la corde étant perpendiculaire à la verticale passant par son milieu, c'est à dire, en gros, à la bissectrice de l'angle s, on a donc la relation :

$$HD(3)=2.R.\sin\left(\frac{s}{2}\right), \text{ en reprenant les mêmes rayons}$$

$$\text{que ci-dessus on aura } \begin{aligned} HD\ 3-1 &= 25721,303m \\ HD\ 3-2 &= 25709,159m \end{aligned}$$

HD (4)

Cette longueur sera celle d'un arc circulaire le long d'une surface de niveau entre les deux points. Comme d'habitude on choisit une telle surface passant par 1(sachant qu'on pourrait tout aussi bien prendre celle passant par 2). On a la relation :

$$\begin{aligned} HD(4) &= R.s \text{ en reprenant les mêmes rayons qui} \\ \text{ci-dessus on aura } HD\ 4-1 &= 25.721,321m \\ HD\ 4-2 &= 25.709,176 m, \text{ donc des résultats} \\ &\text{comparables à ceux qui précèdent.} \end{aligned}$$

II. Calculs utilisant la latitude géocentrique

On pourrait également envisager utiliser la latitude et la longitude géocentriques L et M.

$$\text{On a : } tg(L_{1ou2}) = \frac{b'^2}{a'^2} . tg(\varphi_{1ou2}) \quad \text{c'est, hélas, une} \\ \text{mauvaise solution}$$

HD (5)

Cette longueur sera celle d'un arc quelconque le long du niveau de la mer entre les deux points. On peut utiliser une des méthodes de calcul qui est la solution du problème inverse en géodésie².

On passe, comme expliqué en HD (2-1), des éléments ellipsoïdaux à leurs homologues sphériques sur la sphère paramétrique, puis on calcule l'arc s sur la sphère paramétrique selon une des deux formules trigonométriques indiquées. Enfin, on retourne à l'ellipsoïde, on a en effet :

$$arc = a' . \sqrt{1-e'^2} . \int_{s1}^{s2} \frac{ds}{w}, \text{ soit}$$

$$arc = a' . \sqrt{1-e'^2} . \frac{s}{6} . \left(\frac{1}{w_1} + \frac{4}{w_M} + \frac{1}{w_2} \right)$$

on peut donc poser :

$$R_{moyen} = \frac{a' . \sqrt{1-e'^2}}{6} . \left(\frac{1}{w_1} + \frac{4}{w_M} + \frac{1}{w_2} \right)$$

avec a' grand axe de l'équipotentielle passant par le niveau moyen des mers au lieu considéré³, soit environ 49,20 m au dessus de l'ellipsoïde et e'' sa première excentricité, voir [2]

on obtient : $HD\ (5) = 25.704,604\ m$ au niveau de la mer, et

$$R_{moyen} = \frac{25.704,604}{0,00403721111} = 6.366.921,125m \text{ ce rayon «moyen»}$$

est évidemment plus petit que ceux qu'on avait précédemment adoptés, et est une extrapolation pour le moins hardie car on pourrait, comme cela s'est fait, tout aussi bien corriger l'angle s !

Toutefois cette méthode donnerait, paraît-il, des résultats exacts au millionième, ce qui paraît exact dans les comparaisons qui vont suivre⁴.

HD (6)

C'est la distance sur une géodésique de l'ellipsoïde entre les verticales de deux points. C'est un calcul géodésique complet qu'on a déjà exposé dans [3]. Les résultats sont répertoriés dans le paragraphe ci-après réservé à cet effet.

HD (7)

C'est la distance sur une représentation plane, dans ce premier cas on a adopté les coordonnées de Lambert III données dans le répertoire :

$$\begin{aligned} X1 &= 304.316,11 & X2 &= 290.105,42 & DX &= -14.210,69 \\ Y1 &= 168.444,32 & Y2 &= 147.027,89 & DY &= -21.416,43 \\ HD\ (7-1) &= 25.702,280m \end{aligned}$$

Pour comparaison, les coordonnées Lambert 93 calculées donneraient :

$$\begin{aligned} X1 &= 350.864,468 & X2 &= 336.526,743 \\ Y1 &= 6.303.766,567 & Y2 &= 6.281.329,962 \\ HD\ (7-2) &= 25.789,502\ m \end{aligned}$$

III. La correction des latitudes en fonction de la hauteur du point

On a longuement développé ce sujet [2] : En raison de la courbure, même très légère, de la verticale, la latitude d'un point varie en fonction de sa hauteur par rapport au référentiel choisi ; si on change de référentiel, on change la latitude du point, d'où l'importance de ce choix. Notons tout de suite que cela n'affecte nullement les longitudes. On a insisté sur ce point dans le choix d'un référentiel de chantier par opposition au référentiel GRS 80 qui est souvent trop loin du chantier (50 m plus l'altitude en France), ce qui introduit une erreur d'échelle souvent gênante pour les utilisateurs. En dehors du choix du référentiel, si deux points sont situés à des hauteurs différentes leurs différences de latitudes ne seront pas exactement celles données par la formule de Helmert $\Delta\varphi_H = \varphi_{H2} - \varphi_{H1}$. Certes, la différence est faible, et généralement négligée, mais elle représente, tout de même, sous nos latitudes (45°), 0,53 m pour une dénivelée de 100 m, et même 0,053 m pour 10 m, ce qui est souvent incompatible avec la précision des mesures actuelles ! L'exemple qu'on a choisi n'introduit qu'une erreur de 4cm sur les latitudes ; évidemment, cette erreur n'affectait pas les comparaisons faites.

² Le problème direct en géodésie vise à calculer les coordonnées géographiques d'un point inconnu à partir de celles d'un point connu, de la distance et de l'azimut entre les deux points, en revanche, le problème inverse vise à calculer la distance et l'azimut entre deux points connus par leurs coordonnées géographiques.

³ Il existe des méthodes d'intégration plus précises, telles que l'intégration itérative par les intégrales de Wallis, elles sont trop longues à exposer et sortiraient de l'objet de cet article, d'ailleurs ce sont des classiques.

⁴ Dans certains ouvrages on annonce le mm pour 60 Km, cela paraît très exagéré !

Cette correction est due à Pizzetti $\varphi_p - \varphi_H$, elle a la valeur suivante :

$$\varphi_p - \varphi_H = -\frac{f^*}{R} \cdot h \cdot \sin(2\varphi) \quad \text{en radian, } R \text{ est le}$$

rayon moyen de la terre, donné par GRS 80, h la hauteur du point au-dessus du référentiel choisi et f^* l'aplatissement gravitaire, donné par GRS 80:

$$f^* = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = 0,005302440112$$

γ_p : gravité au pôle, γ_e à l'équateur . On a donc:

$d\Delta\varphi \cdot R = -f^* \cdot dh \cdot \sin(2\varphi)$, avec dh différence de niveau entre les deux points, et si on fait un calcul d'erreur très simplifié, les angles étant petits, on obtient :

$$ds = \frac{\Delta\varphi}{s} \cdot d\Delta\varphi \cdot R \quad \text{où } ds \text{ est l'écart linéaire.}$$

Dans l'exemple qui nous intéresse, l'erreur commise en n'appliquant pas la correction de Pizzetti n'est pas totalement négligeable, elle est de l'ordre de **-3,11 cm**. Évidemment, elle affecte presque également tous les résultats qu'on a donnés.

Resultats

Si on repart en arrière, en adoptant peut être un peu trop « hardiment » la valeur de « R moyen » calculé en HD 5 pour le rayon en 1, on aurait :

HD 2 = 25.704,744 m plan tangent à la sphère en 1
 HD 3 = 25.704,586 m corde de la sphère en 1
 HD 4 = 25.704,796 m arc sur surface de niveau de 1
 HD 5 = 25.704,777 m arc au niveau de la mer
 HD 6 -1 = 25.704,766 m géodésique au niveau de la mer
 HD 6-2 = 25.704,785 m géodésique au niveau de 1
 HD 6-3 = 25.704,575 m géodésique au niveau de l'ellipsoïde
 HD 7-1 = 25.702, 280 m Lambert III
 HD 7-2 = 25.789,502 m Lambert 93

Rappel :

HD 1-1 = 25.704,949m

distances réduites à l'horizontale,

HD 1-2 = 25.704,911 m

mais pas au niveau zéro, la seconde est celle du géodésien qui a eu l'idée et le mérite de rappeler ces différences importantes.

Toutefois les calculs initiaux étaient tout aussi bien correctement menés :

HD 2 - 2 = 25.709,316 m

HD 3 - 2 = 25.709,159 m

Conclusion

La conclusion s'impose d'elle-même : Compte tenu des précisions atteintes aujourd'hui par les instruments de mesures, il faut bien définir ce qu'on appelle distance horizontale entre deux points. La topographie comporte, comme la géodésie, des dénominations simples, mais souvent fort ambiguës, qui méritent toujours d'être clairement définies !

Rappelons que pour Burkholder la « vraie » distance horizontale serait celle donnée en 1-2 ; il a, depuis, bâti tout un système de représentation de la réalité 3-D sur la base d'un tridimensionnel local (e, n, u). Pour nous, et pour les usages du topographe de chantier, ce serait la distance 6-2, à laquelle on aurait appliqué la correction de Pizzetti, qui donnerait la valeur la plus proche de la distance qui serait « chaînée » horizontalement au sol, à partir de 1, entre le point 1 et la verticale de 2.

Références bibliographiques

- [1] **B.Hoffmann-Wellenhof, H.Lichtenegger, J.Collins , 1992:** GPS Theory and Practice Springer-Verlag.
- [2] **C.Million, 2003 :** Géodésie géométrique et géodésie physique dans X Y Z N°95 2^{ème} trimestre.
- [3] **C.Million, 2001:** Développement du vecteur GPS le long de la géodésique dans XYZ N°88 3^{ème} trimestre.