



تسعير خيارات الشراء الأوروبية على الأسهم في ظل التقلبات العشوائية،

دراسة تطبيقية باستخدام نموذج هيستون

Pricing European Call Options on Stocks Under Stochastic Volatility
(An empirical study using the Heston model)

زايري بلقاسم

شوارفية محمد الأمين*

مخبر الإصلاحات الاقتصادية والتكامل الإقليمي والجهوي
 جامعة وهران 2 محمد بن أحمد، الجزائر

مخبر الإصلاحات الاقتصادية والتكامل الإقليمي والجهوي
 جامعة وهران 2 محمد بن أحمد، الجزائر

zairi.belkacem@univ-oran2.dz

chouarfia.med.elamine@univ-oran2.dz

تاريخ النشر: 2025/04/27

تاريخ القبول: 2025/03/29

تاريخ الإرسال: 2025/02/06

ملخص:

تناولت الدراسة تحليل نموذج هيستون (Heston Model) بهدف تحديد القيمة العادلة لعقد خيار الشراء الأوربي، حيث بدأت الدراسة بتقديم مقارنة مفاهيمية لعقود الخيارات في قالب نظري. ثم تسليط الضوء على أنموذج بلاك-شولز (Black-Scholes) باعتباره الأنموذج المرجعي لنظرية تسعير الخيارات. ثم انتقلت إلى أنموذج هيستون الذي يقدم إطاراً أكثر واقعية عبر نمذجة التقلب الضمني كعملية عشوائية تتبع حركة براونية معكوسة، مع معادلة تفاضلية جزئية تربط بين التقلب وسعر الأصل. وقد تم الاعتماد على المنهج الوصفي في عرض هذه الجوانب، في حين تم الاعتماد على المنهج التحليلي في الجانب التطبيقي، الذي ركز أولاً على معايرة معاملات أنموذج هيستون باستخدام خوارزمية تحسين عديدة L-BFGS-B لتقييم الدقة التنبؤية للأنموذج. ليتم بعد ذلك تنفيذ الأنموذج باستخدام برمجية Python، ومقارنة النتائج المتحصلة عليها مع بيانات السوق (مثل أسعار الخيارات والتقلب الضمني). أظهرت النتائج قدرة الأنموذج على تقليد سلوك التقلب الديناميكي بدقة، كما أظهر الأنموذج تفوقاً في تسعير الخيارات الخاسرة OTM والمتعادلة ATM.

الكلمات المفتاحية: أنموذج هيستون؛ برمجية بايثون؛ تقلبات عشوائية؛ عقود خيارات؛ معايرة معاملات.

Abstract:

The study analyzes the Heston Model to determine the fair value of a European call option. It first presents a conceptual approach to options contracts, then discusses the Black-Scholes model as the benchmark for option pricing. The Heston Model is introduced as a more realistic framework, modeling implied volatility as a mean-reverting stochastic process driven by a Brownian motion and governed by a partial differential equation linking volatility to the asset price. A descriptive approach is used for theoretical aspects, while an analytical approach is applied in the empirical study. Model parameters are calibrated using the L-BFGS-B optimization algorithm to assess predictive accuracy. The model is then implemented in Python and compared with market data, including option prices and implied volatility. Results show that the model effectively captures volatility dynamics and performs well in pricing (OTM) and (ATM) options.

Key Words: Options contracts; Stochastic volatility; Heston model; Parameter calibration; Python programming.

JEL Classification: G13 ; G12 ; C63.

* مرسل المقال: شوارفية محمد الأمين (chouarfia.med.elamine@univ-oran2.dz)



المقدمة:

حظيت الهندسة المالية باهتمام واسع من قبل الباحثين والأكاديميين في الإدارة المالية الحديثة، خاصة بعد موجة التحرير المالي والثورة المعلوماتية والاتصالية التي عرفتها اقتصاديات العالم بعد زوال نظام بريتن وودز، وما نتج عنها من تعاضل ظاهرة التقلب في أسعار الصرف وأسعار الفائدة وأسعار الأسهم وغيرها، الأمر الذي ولّد لنا ابتكارات شديدة التعقيد كانت بمثابة استجابة لحاجة المؤسسات المالية والمصرفية والشركات في صورة أدوات وآليات مالية جديدة تفي باحتياجات المجتمعات، وتسيطر على المخاطر التي تواجهها تلك المؤسسات والهيئات. وهنا ظهرت المشتقات المالية كإحدى هذه التقنيات المبتكرة التي قدّمها الفكر المالي المعاصر، والتي ليست أصولاً مالية Financial assets ولا أصولاً عينية Real assets وإنما هي عقود كمختلف أنواع العقود المتعارف عليها.

وتعد الخيارات المالية أكثر أنواع المشتقات المالية إبداعاً وابتكاراً، كما تعتبر واحدة من أقوى الأدوات المالية المستخدمة للتحوط ضد المخاطر على اختلافها، والتي يتعرض لها المتعاملون بها، لتسهيل بذلك عمليات التداول في الأصول المالية المتنوعة (أسهم، مؤشرات، العملات الأجنبية، والأوراق المالية ذات العوائد) لغرض الاستثمار، المضاربة والتحوط ضد تقلبات السوق. وبلغ إجمالي حجم عقود الخيارات المالية بناء على البيانات الإحصائية من موقع بنك التسوية الدولية (BIS, 2022) حوالي 1.3 مليار دولار يومياً في شهر أبريل 2022، وبالتالي فإن التقدير السنوي لحجم التداول حوالي 312 مليار دولار. وتعتبر هذه الإحصائيات في الأسواق المنظمة OTC فإذا تم إضافة التداول الخارجي غير المصرح به فإن حجم عقود الخيارات يكون ما بين 600-700 مليار دولار سنوياً وفق البيانات المتاحة.

وهنا تظهر أهمية تناول تقييم عقود الخيارات ونماذج تسعيرها، لما لهما من تطبيقات عديدة في مجالات التمويل والاستثمار. حيث يحتل موضوع التقييم أو التسعير بمختلف أنواعه في مجال التمويل مكانة مهمة، وتزداد أهميته في بيئة عدم التأكد التي يتصف بها العالم، وقد عمل العديد من الباحثين على بناء نظرية للتسعير العقلاني للخيارات المالية، ولعل أبرزها نموذج بلاك شولز (S&B) كونه الأشهر في حقل تسعير الخيارات المالية، إلا أنه عرف الكثير من الانتقادات بسبب افتراضه ثبات التقلب وهذا الأخير الذي يعتبر العنصر الأهم والحاسم في عملية التسعير. ونتيجة لهذا ظهرت نماذج أخرى تناولت التقلب كدالة محددة للزمن وظهر أيضاً نموذج يدرس التقلب المتحرك، وأخيراً التقلب العشوائي الذي صاغه الرياضي ستيفن هيستون (Heston, 1993)، والذي يعتبر النموذج الأشهر لنماذج التقلبات العشوائية. وفي هذا الإطار تبرز معالم إشكالية هذه الدراسة التي نبلورها في السؤال التالي:

كيف يتم تحديد القيمة العادلة لعقد الخيار باستخدام نموذج هيستون على سلة من الأسهم؟

وتندرج تحت هذا الإشكالية الرئيسية مجموعة من التساؤلات أهمها:

- ماذا يقصد بعقود الخيارات المالية؟

- هل نموذج هيستون (Heston model) قادر على تسعير الخيارات الأوروبية على الأسهم؟



فرضيات الدراسة: على ضوء مشكلة الدراسة صيغت الفرضيات التالية:

- الخيارات أحد أهم أنواع المشتقات التي تمنح المستثمرين فيها فرصا ذات أهمية كبيرة لتخفيض المخاطر التي يتعرضون لها باعتماد آلية استبدال موجود معين بموجود آخر يكون في الغالب نقدي؛
- إن أنموذج هيستون (Heston model) دقيق في تسعير الخيارات الأوربية على الأسهم.

أهداف الدراسة: ومن أهم ما تهدف اليه دراستنا هذه ما يلي:

- العرض والنقاش المعرفي والنظري لمواضيع الخيارات والتقلبات ودراسة نماذج تسعير تلك الخيارات والوقوف على الجدليات الفكرية والمضامين الفلسفية لكل منها؛
- تسليط الضوء على المدخل العام لأنموذج هيستون وتوضيح تقنية استخدامه في حساب القيمة النظرية العادلة للخيارات من النوع الأوربي على الأسهم.

منهجية الدراسة: تكيفا مع متطلبات الدراسة وطبيعة المعلومات التي تتناولها والإشكالية المطروحة، تم الاعتماد على المنهج الوصفي وهذا على سبيل التشخيص السليم والوصف الدقيق لموضوع الدراسة من مختلف جوانبه من خلال التعريف النظري لعقود الخيارات المالية وأنواعها. أما الجانب التطبيقي فاستخدمنا المنهج التحليلي لاستخلاص أهم الجوانب المتعلقة بعقود الخيارات من حيث تسعيرها وتقييمها وكذا طرق وأدوات قياسها.

الدراسات السابقة:

تناولت العديد من الدراسات والبحوث السابقة موضوع تسعير الخيارات المالية وطرحت نماذج مختلفة استخدمت في عملية التسعير، ونستهل هذا المسح الأدبي بدراسة تطبيقية قام بها (Bouasabah, 2021) بعنوان **"Evaluating the Predictive Accuracy of Heston Stochastic Volatility Model for Currency Options using Local and Global Calibration"** حيث ارتكزت هذه الدراسة على تنفيذ ومعايرة أنموذج هيستون (Heston model) باستخدام لغة Matlab لفترة تمتد من 28 ماي 2020 إلى 7 ماي 2021 باستخدام 5 أجال استحقاق، ولكل تاريخ استحقاق تم استخدام 5 أسعار تنفيذ (في إجمالي 25 خياراً من خيارات العملات). حيث هدفت هذه الدراسة إلى تحقيق نتائج مهمة فيما يتعلق بتطبيق أنموذج هيستون على تقدير سعر خيار العملة مع التركيز على التنفيذ، المعايرة، وجعله أنموذج تسعير خيارات العملات الأجنبية الأنسب لسوق العملات الأجنبية باستخدام الأمثلية الموضعية والشاملة. وانتهت هذه الدراسة إلى أن الحلول البسيطة نسبياً يمكن أن تؤدي إلى أسعار دقيقة لخيارات العملة، وأن تقدير معلمات المعايرة باستخدام طريقتي الأمثلية الموضعية والشاملة أعطى نتائج جيدة جداً في إطار زمني قصير نسبياً. حيث إن الأمثلية الموضعية باستخدام وظيفة lsqnonlin في Matlab توفر نتائج معايرة ممتازة لجميع أسعار خيارات عملات، كما أنها تستخدم أوقاتاً حسابية أقل.



وفي دراسة أخرى لـ (Chen et al., 2021) بعنوان **"An efficient method for pricing foreign currency options"** تم تحليل تجريبي لعينة من خيارات العملات الأجنبية (USD/EUR) أخذت بياناتها من بورصة نازداك، لفترة 2020/03/02 إلى 2020/09/15 لما مجموعه 2176 ملاحظة من موقع Investing، وقد سعت هذه الدراسة إلى اقتراح طريقة فعالة لتسعير خيارات العملات الأجنبية بالنظر إلى أن عائدات العملات الأجنبية لها توزيعات الذيل الثقيل. وتصميم الذيل الثقيل للتوزيع تم باستخدام توزيع Student-t بدلاً من التوزيع العادي وتم تقدير معلمات التوزيع باستخدام طريقة العزوم في التقدير (Method of Moments Estimator (MME). وقد استطاع الأنموذج المقترح من حل مشكلة عدم الاتساق في الافتراض التوزيعي الأساسي لنماذج تسعير خيارات العملة. وهذا مهم من الناحية الاقتصادية لأن التوزيع الإحصائي المستخدم لعوائد العملات يؤثر على تقديرات معلومات دلتا، جاما، وثيتا. كما أن توزيع Student's-t قادر على إنشاء تقديرات توفر ملائمة أفضل لتوزيع عوائد العملة؛ وبالتالي فإن الأنموذج يولّد معايير لأسعار الخيارات تتفوّق على النماذج الحالية مثل بلاك شولز والحصول على دقة أكبر في قيم خيارات العملات. أما دراسة (Crisóstomo, 2015) التي عنوانها **"An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab"** فقد كانت دراسة تحليلية على عينة من (60) خيار شراء أوروبي مجزأة على ثلاث مجموعات لها ثلاث تواريخ استحقاق وخمسة أسعار تنفيذ، أخذت بيانات المجموعة الأولى من بورصة NASDAQ لسنة 2014. وقد هدفت الدراسة إلى تنفيذ ومعايرة أنموذج التقلب العشوائي هيستون مع إجراء العديد من اختبارات المعايرة باستخدام الأمثلة المحلية والشاملة مع مقارنة النتائج مع أسعار السوق المنشورة. حيث قدمت كل من تقنيتي الأمثلة الشاملة والموضعية نتائج مقبولة خلال مدة زمنية قصيرة نسبياً، وأنه من الممكن استخدام ديناميكية أنموذج هيستون لتسعير منتجات مالية أخرى التي لا يتم تداولها بكفاءة في السوق المالي. وارتكزت دراسة (Dunn et al., 2014) المعنونة بـ **"Estimating Option Prices with Heston's Stochastic Volatility Model"** على اشتقاق واختبار صيغ تسعير الخيارات المالية لأنموذج هيستون ومقارنتها مع التقديرات الناتجة عن أنموذج Black-Scholes. والتي كانت تطبيقاتها على عينة تتكون من 36 خيار شراء لمؤشر S&P 100 استناداً إلى بيانات يومية اعتباراً من جانفي 1991 إلى جوان 1997. وقد أظهرت نتائج الفحص البصري و Root Mean Squared Error (RMSE) لهذه الدراسة إلى أن تقديرات أنموذج Heston بطريقة العزوم (The Method Of Moments) MOM أقرب من تقديرات أنموذج Black-Scholes إلى أسعار خيار الشراء الفعلية في عينة بيانات السوق. ومن خلال استعراض الدراسات السابقة، فإن الباحثين قد حصلوا على مجموعة من الفوائد تلخصت فيما تعلق منها بموضوع تسعير الخيارات المالية باستخدام أنموذج هيستون وكذا رسم الأطر الهيكلية لبنية الدراسة الحالية. وعليه نشير إلى أن دراستنا الحالية جاءت مكتملة لما سبقها من الدراسات، ما جعل منها إضافة علمية ومرجعا يستند إليه ضمن النطاق العلمي، إلا أنها اختلفت عنها في عدة جوانب تمثلت في الفجوة العلمية لهذه الدراسة كالحُدود الزمنية لهذه الدراسة، طريقة التقدير وكذا استخدام برمجية Python لأجل التسعير والمعايرة (Calibration).



I. الخلفية النظرية للخيارات المالية:

1. مقارنة مفاهيمية للخيارات المالية:

الخيار في اللغة اسم مشتق من الاختيار، والاختيار يعني الانتقاء، وخيار الشئين أحسنهما وأفضلهما، أما في الأدبيات المالية والاقتصادية المعاصرة فإن الخيار يتواءم مع ما تناولته اللغة، فقد عرّفه (الزحيلي، 2006، صفحة 502) على أنه "عقد بعوض على حق مجرد، يخول صاحبه بيع شيء محدد، أو شراؤه بسعر معين طيلة (طوال) مدة معينة (معلومة) أو في تاريخ محدد، إما مباشرة أو من خلال هيئة ضامنة لحقوق الطرفين". ويمكن النظر إلى الخيار على أنه "عقد بين طرفين أحدهما بائع والآخر مشتري حيث يمنح المشتري الحق وليس الالتزام، لشراء أو بيع شيء ما في تاريخ لاحق بسعر متفق عليه عند تحرير العقد" (Chance & Brooks, 2015, p. 04). وهناك وجهة نظر أخرى ترى أنه أداة تتيح لحاملها فرصة شراء أو بيع أصل محدد بسعر محدد في أو قبل تاريخ انتهاء الصلاحية المحدد، حيث أن الخيارات هي أكثر أنواع الأوراق المالية المشتقة شيوعاً (Zutter & Smart, 2019, p. 794). وفي تعريف لـ (Farid, 2015, p. 03) أنه أداة مشتقة تمنح حاملها الحق في شراء أو بيع ورقة مالية أساسية في تاريخ مستقبلي بسعر متفق عليه اليوم. على عكس العقد الآجل أو المستقبلي، يمنح الخيار الحق في عدم التنفيذ إذا لم يكن سعر السوق في مصلحة حامله. وإذا تم ذلك، فإن خسارته تقتصر على المبلغ الذي دفعه عند شراء الخيار.

ويتبين من التعريفات السابقة أنها تتفق جميعاً من حيث المضمون، وإن تباينت تبايناً محدوداً في التفاصيل. وعليه يمكن أن نعرف الخيار بأنه اتفاق تعاقدى خاص، أو أنه عقد بين طرفين أحدهما مشتري يطلق عليه صاحب المركز الطويل والآخر بائع أو محرر الخيار ويطلق عليه اسم صاحب المركز القصير، وبموجبه يُعطى حامله (المشتري) الحق وليس الالتزام في شراء أو بيع عدد من وحدات أصل حقيقي أو مالي، بسعر محدد ومتفق عليه لحظة توقيع العقد، يسمى سعر التنفيذ أو الممارسة، على أن يتم التنفيذ في تاريخ لاحق هو تاريخ الاستحقاق أو تاريخ انتهاء الصلاحية. وللمشتري الحق في عدم إتمام العقد وتنفيذه إذا كان ذلك في غير صالحه خاصة في غياب صفة الإلزام للقيام بعملية البيع أو الشراء، وهذا مقابل عمولة يدفعها للمحرر تسمى بعلاوة الصفقة الشرطية أو ثمن عقد الخيار، وتعرف علاوة الصفقة الشرطية بأنها تعويض متفق عليه يدفع لبائع عقد الخيار من قبل المشتري مقابل تمتعه حق شراء (إن كان خيار شراء) أو حق بيع (إن كان خيار بيع) محل التعاقد خلال فترة زمنية محددة، وهذا المبلغ غير مرجع سواء نُفذ المشتري حقه أو لم ينفذ (قندوز، 2016).

تنقسم عقود الخيار إلى نوعين رئيسيين (Hull, 2022, p. 41): خيارات الشراء (Call Options) التي تتيح شراء الأصل بسعر التنفيذ، وخيارات البيع (Put Options) التي تسمح ببيعه. كما تُصنف حسب نمط التنفيذ إلى أمريكية (قابلة للتنفيذ في أي وقت حتى انتهاء الصلاحية) أو أوروبية (تُنفذ فقط عند الانتهاء). وهناك خيارات الأصول التي تتنوع لتشمل خيارات الأسهم والمؤشرات والسلع والعملات الرقمية وغيرها، حيث تعتمد قيمتها على تقلبات سعر الأصل الأساسي، والوقت المتبقي، والعلاقة بين سعر التنفيذ والسوق. تتميز بمرونتها واستخدام الرفع المالي.



نظرية تسعير الخيارات المالية:

1.2 تقييم الخيارات المالية:

توفر نظرية تسعير الخيارات المالية إطارًا مهمًا لفهم كيفية تسعير الخيارات في الأسواق المالية، حيث أنها تلعب دورًا في تداول الخيارات وإدارة المخاطر، وقد ارتبطت نظرية تسعير الخيارات ارتباطًا وثيقًا بالمفاهيم المرتبطة بالعمليات العشوائية. وتمثل أطروحة الدكتوراه لويس باشيليه (Bachelier, 1900) أول عمل مهم حول تسعير الخيارات، والذي يعتبر مساهمة مهمة بعد ابتكاره نظرية الحركة البراونية لخيارات سندات الحكومة الفرنسية. وعلى الرغم من أن أطروحة باشيليه قوبلت في البداية بالشك ولم تُنحَظ باهتمام كبير في ذلك الوقت، إلا أنه تم الاعتراف بأفكاره وأساليبه لاحقًا على أنها رائدة ومؤثرة. وقد وُفِّرت نظريته إطارًا رياضيًا لفهم وتحليل العشوائية وعدم اليقين المتأصل في تحركات أسعار سندات الحكومة الفرنسية، ومهد الطريق للتطورات المستقبلية في هذا المجال. ونظرية تسعير الخيارات هي مجموعة من النماذج والمفاهيم الرياضية التي تستخدم العوامل المؤثرة في سعر الخيار كمدخلات لتحديد السعر أو القيمة النظرية العادلة لعقد الخيار خلال أي لحظة زمنية. ويُعد نموذج (Black & Scholes, 1973) أحد أكثر نماذج تسعير الخيارات استخدامًا في المالية الكمية، والذي تم تطويره في عام 1973 بواسطة (Fischer Black)، (Myron Scholes) و (Robert Merton).

ويعتبر هذا النموذج حجر الزاوية في نظرية تسعير الخيارات الحديثة، حيث يفترض (Lin et al., 2024, p. 2) أن الخيار محل التعاقد من النوع الأوروبي وليس الأمريكي في ظل وجود سوق مالية فعّالة، تتوفر المعلومات فيها بشكل كامل وتكون متاحة لجميع المشاركين في نفس الوقت. كما يفترض النموذج عدم وجود تكاليف للمعاملات وعدم وجود فرص للتلاعب بالسوق أو المراجعة، في حين أن التداول مستمر للخيارات وأسعارها تتحرك بشكل عشوائي (Randomly)، كما أن سعر فائدة خال من المخاطر، قصير الأجل معروف وثابت على مدى فترة صلاحية الخيار مثله مثل التقلب. في حين أن أسعار الأصول تتبع توزيع اللوغاريتم الطبيعي أو ما يُعرف أيضًا بتوزيع الاحتمالات الطبيعية، وهذا يعني أن الحركة السعرية للأصول قابلة للتنبؤ ولا توجد قفزات في أسعار الأصول. وقد استند مبتكرو النموذج في اشتقاقهما له إلى افتراض مفاده أن من الممكن إدارة مركز الخيار من خلال بناء تحوط خالي من المخاطرة. وتم إعداد هذا النموذج وفق الصيغة الرياضية التالية (Taufik et al., 2024):

$$C(S, T) = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (1)$$

$$P(S, T) = Ke^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (4)$$

حيث أن:



- (C) سعر خيار الشراء؛ (σ) تقلب سعر الأصل أي الانحراف المعياري لعوائد الأصل؛
 (P) سعر خيار البيع؛ (r) معدل الفائدة الخالي من المخاطرة؛
 (S) السعر السوقي الجاري للسهم؛ $N(d)$ دالة التوزيع أو الكثافة التراكمية؛
 (K) سعر التنفيذ أو الممارسة؛ (T) تاريخ الإستحقاق.

2.2 نموذج الدراسة (Heston Model)

أدى تفاقم الابتسامات والانحرافات في سطوح التقلب الضمني¹ الناتج عن حالة الذعر المالي (Financial Panic) بسبب اختيار سوق الأسهم في أكتوبر 1987 (Rouah, 2013)، وتأثيره اللاحق على النماذج الرياضية لخيارات الأسعار إلى إثارة التساؤلات حول قدرة نموذج بلاك شولز على توفير تسعير مناسب في ظل هذه التقلبات ومدى قدرته أيضا على التعبير عن حقيقة السوق، خاصة افتراضه ثبات التقلب خلال حياة الخيار وأن العوائد اللوغاريتمية تتوزع توزيعاً طبيعياً، والمعروف رياضياً بمنحنى الجرس (Bell Curve) أو التوزيع الجاوسي (Gaussian Distribution). وقد أبرزت الدراسات والمشاهدات التجريبية أن هذا الافتراض لا يمكن إسقاطه على الأسواق المالية، وأن توزيع العائدات ليس طبيعياً حيث أظهر انحرافاً وتفرطحاً. كما كان لظهور الكثير من الدلائل التي تثبت وجود ابتسامات التقلب الدافع إلى سعي عدد من الباحثين إلى إزالة هذا الافتراض في نماذجهم من خلال السماح للتقلبات بأن تكون متغيرة بمرور الوقت ومرتبطة بسعر الأصل. ونظراً لأن قيمة الخيار حساسة جداً لهذه التغيرات فقد تم اعتبار التقلب متغيراً عشوائياً، وتُعرف النماذج التي تستخدم هذا النهج باسم نماذج التقلب العشوائي، حيث تفترض هذه النماذج أن سعر الأصل الأساسي يتبع حركة براونية هندسية بالشكل الذي يجعل سعر الأصل أكثر تكيّفاً مع حقائق السوق. وتعتبر أعمال كل من (Hull & White, 1987)، (Wiggins, 1987)، (Chesney & Scott, 1989) و (Stein & Stein, 1991) أولى الأعمال التي تناولت هذا الموضوع إلا أن أبرز عمل هو ما اقترحه ستيفن هيستون الذي عُرف لاحقاً باسم نموذج هيستون (Heston Model) في بحثه لعام 1993 "حل مغلق الشكل للخيارات ذات التقلب العشوائي مع تطبيقات على خيارات السندات والعملات" (Heston, 1993, p. 327). وقد أصبح هذا النموذج الأكثر استخداماً في خيارات التسعير، حيث قدّم حلاً مغلقاً لتسعير خيارات الشراء الأوروبية كما أظهر قدرة على إنتاج ابتسامات تقلب يمكن الحصول عليها من بيانات السوق. ويستند هذا النموذج إلى معادلتين تفاضليتين عشوائيتين صيغتا كما يلي (Orzechowski, 2022, p. 41):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S \quad (5)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^v \quad (6)$$

$$dW_t^S dW_t^v = \rho dt, S(0) = S_0 > 0, v(0) = v_0 > 0 \quad (7)$$

حيث:

S_t يمثل سعر الأصل في الزمن t ؛ κ يمثل معدل متوسط الارتداد للتباين طويل الأمد θ ؛



dS_t يشير إلى الاختلاف الدقيق في سعر الأصل؛ θ تمثل متوسط التباين الطويل الأمد في سعر الأصل؛
 μ يمثل معدل العائد المتوقع للأصل؛ dW_t^S تمثل الحركة البراونية لسعر الأصل في الزمن t ؛
 $\sqrt{v_t}$ يمثل التقلب في سعر الأصل في الزمن t ؛ dW_t^v تمثل الحركة البراونية لتباين سعر الأصل في الزمن t ؛
 σ يمثل تقلب التقلب $\sqrt{v_t}$ ؛ ρ تمثل معامل الارتباط بين عمليتي (dW_t^S, dW_t^v) .

عند استقراء معادلتنا نموذج هيستون تظهر المساهمة الرئيسية للنموذج وهذا بافتراضه التقلب العشوائي، وتتجلى هذه المساهمة في إضافته عملية عشوائية أخرى نجدها في معادلة الحركة البراونية W_t^v ، والتي تعتبر الجزء الأكثر أهمية في هذا النموذج حيث تنقسم إلى جزئين.

● الجزء الأول: يعبر عن خاصية الارتداد المتوسط في نموذج هيستون (Heston Model) والتي تعبر بدورها عن سرعة عودة متغير التقلب إلى متوسطه الطويل الأمد. هذه الخاصية تمثل بوضوح في المعامل المسمى بـ K في معادلة هيستون، فإذا كانت قيمة K عالية فذلك يعني أن عملية الارتداد إلى متوسط التقلب θ ستكون أسرع، وبالتالي التقلب سيكون أقرب إلى متوسطه التوقعي بشكل أسرع وإذا كانت قيمة K منخفضة فإن التقلب سيكون أقل تذبذباً وسيستغرق وقتاً أطول للعودة إلى متوسطه التوقعي (Cox et al., 1985). هذه الخاصية تمثل جزءاً مهماً في تفسير كيفية تصرف سعر الأصل وتقلبه في نموذج هيستون وتأثير قيم معامل الارتداد المتوسط K على توقعات السوق وتسعير الخيارات والأدوات المالية الأخرى.

● الجزء الثاني: أما هذا الجزء فإنه يعبر عن معلمة تقلب التقلب σ والتي تعكس مدى تذبذب سعر الأصل. عند استخدام نموذج هيستون لتسعير الخيارات يمكن تعديل قيمة σ لمحاكاة مختلف سيناريوهات التقلب وتقدير القيم المالية المتوقعة للخيارات تحت مختلف الظروف (Li, 2020). وكونه مضروباً في العملية العشوائية W_t^v فلأنها تمثل تغيرات التقلب في الفولتية عبر الزمن، وقد تم استخدامها في معادلة هيستون لتحديد كيفية تغير التقلبات على مر الزمن بشكل عشوائي، حيث تؤثر تغيرات قيمة σ على مقدار التقلب المتوقع في الفولتية وبالتالي تؤثر على تسعير الخيارات وتقديرها باستخدام ذات النموذج. مع الإشارة إلى وجود ارتباط بين العمليتين العشوائيتين W_t^v و W_t^S من خلال المعلمة ρ والتي تؤثر بدورها على انحراف توزيع العوائد وبالتالي الانحراف في ابتسامة التقلب الضمنية.

ويمكن التعبير عن معادلة تسعير خيار الشراء الأوروبي وفق نموذج هيستون كما يلي (Bayad et al., 2024):

$$c(S, v, t) = e^{-r\tau} E[(S(T) - K)^+] = e^x P_1(x, v, \tau) - e^{-r\tau} K P_2(x, v, \tau) \quad (8)$$

$$c(S, v, t) = S P_1 - K e^{-r\tau} P_2$$

$$\tau = T - t, \quad x = \ln S$$

حيث أن: P_1, P_2 يمثلان تحويل فورييه العكسي لأجل $J=1,2$

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} \varphi_j(x, K, v, \tau; \phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad (9)$$

$$j \in \{1, 2\}$$



$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln \left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\} \quad (10)$$

$$\varphi_j(X_0, K, v_0, \tau; \phi) = e^{C(\tau; \phi) + D(\tau; \phi)v + i\phi X} \quad (11)$$

$$D_j(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right] \quad (12)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \quad (13)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \quad (14)$$

حيث: $b_1 = \kappa\lambda - \rho\sigma$, $b_2 = \kappa + \lambda$, $u_1 = 0.5$, $u_2 = -0.5$

وبالتالي تكون الصيغة النهائية لخيار الشراء الأوربي كالآتي:

$$C = S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f_1(\phi)}{i\phi} \right) d\phi \right) - Ke^{-r\tau} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f_2(\phi)}{i\phi} \right) d\phi \right) \quad (15)$$

II. الجانب التطبيقي للدراسة

1. مجتمع وعينة الدراسة

استقرت الدراسة على شركة بيركشاير هاثاواي (Berkshire Hathaway)، التي تعد من أضخم الشركات القابضة العالمية، تأسست عام 1839 كشركة نسيج (Berkshire Hathaway INC., 2024) قبل أن يتحول مسارها عام 1965 تحت قيادة "Warren Buffett" إلى أنموذج استثماري فريد، يركز على امتلاك شركات ذات قيمة جوهرية عالية وإدارة محفظة استثمارية متنوعة. تُدار Berkshire عبر استراتيجية تجمع بين الاستحواذ الكامل على شركات رائدة في قطاعات (Hargrave, 2023) مثل؛ التأمين (GEICO)، الطاقة (NV Energy)، واستثمارات ضخمة في أسهم شركات عامة مثل Apple و Coca-Cola. كما تعرض الشركة للمستثمرين فثنين من الأسهم: الفئة A (BRK-A) بأسعار تتجاوز 500 ألف دولار مع حقوق تصويت كاملة، والفئة B (BRK-B) بأسعار تقارب 350 دولارًا للمستثمرين الأفراد (Buffett, 1997). وكجزء من فلسفتها لتعميم الفرص الاستثمارية، فإن الشركة تمتنع عن توزيع الأرباح لتعزيز النمو الداخلي (Vanzo, 2024). حيث حققت عوائد سنوية تراكمية تبلغ حوالي 20% منذ 1965، مدعومةً باحتياطيات نقدية هائلة (~150 مليار دولار) وسمعة قوية في تجاوز الأزمات (Jennewine, 2024). رغم التحديات تظل Berkshire رمزًا للاستقرار المالي والاستثمار طويل الأجل.

بهدف تحقيق أهداف الدراسة فقد تم استخدام عينة تتكون من (15) خيار شراء مبرم على أسهم شركة Berkshire Hathaway من فئة ب (BRK-B) تمتد فترتها من 2024.12.19 إلى 2025.06.20. وتتكون هذه العينة من بيانات فعلية تتمثل في أسعار العرض (البيع) والطلب (الشراء) اليومية لخيارات الشراء، سعر الإغلاق، سعر التنفيذ، السعر الفوري للسهم والفائدة المفتوحة وحجم التداول. حيث سنستخدمها كمدخلات في أنموذج هيستون



(Heston Model)، وهذا للتحقق من مدى قدرة و دقة النموذج في حساب وتحديد القيمة النظرية العادلة للخيارات الأوروبية على الأسهم. وتم جلب هذه البيانات من الموقع الإلكتروني Yahoo Finance بتاريخ 2024.12.19. كما تم التقاط خيارات مريحة ITM، متكافئة ATM، غير مريحة OTM. وهذا ما يسمح بإجراء تحليل شامل لأداء النموذج عبر ظروف السوق المختلفة. في حين تم تقسيم هذه العينة على وفق تاريخ الاستحقاق و أسعار التنفيذ.

الجدول رقم (1): "تصنيف الخيارات المالية على أساس الربحية"

اسم الشركة	عدد الخيارات	زمن الاستحقاق	أسعار التنفيذ
Berkshire Hathaway	06	1	06
	03	30	03
	03	94	03
	03	185	03
مجموع الخيارات		15	

المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى بيانات موقع Yahoo Finance

2. أدوات الدراسة :

لإجراء الدراسة تم استخدام بايثون Python، وهي لغة برمجة عالية المستوى، قوية ومرنة في مجال التمويل الكمي، حيث تُستخدم على نطاق واسع في نمذجة الأدوات المالية، المحاكاة، والتحليل العددي (Hilpisch, 2020). بفضل مكتباتها الغنية مثل NumPy، SciPy، pandas و QuantLib، كما يوفر Python بيئة متكاملة لتنفيذ نماذج تسعير الخيارات مثل أنموذج هيستون، وهذا باستخدام طرق عددية متنوعة مثل محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo simulation)، تحويل فورييه (Fourier Transform)، وطرق الفروق المحدودة (FDM) (Mategaonkar, 2022). كما تدعم بايثون معايرة النماذج المالية لبيانات السوق من خلال خوارزميات التحسين، وتقنيات التفاضل التلقائي، وحتى التعلم العميق عبر TensorFlow (Liu et al., 2019). بفضل هذا النظام البيئي المتكامل، تتيح بايثون تنفيذ نماذج مالية دقيقة وفعالة، مما يجعلها أداة أساسية للبحث والتطبيقات العملية في الأسواق المالية.

3. معايرة النموذج:

أنموذج هيستون (Heston Model) هو أنموذج مالي ثنائي الأبعاد (Two-Dimensional). يحتوي على معلمات ضمنية لا يمكن تحديدها مباشرة من بيانات السوق الحقيقية، ولهذا فإن معايرة هذه المعلمات لبيانات السوق الحقيقية أمر صعب (Clevenhaus et al., 2024). ويعتبر النموذج مفيداً عملياً فقط إذا كان بإمكانه تكرار أسعار السوق الحالية للخيارات الأوروبية بدقة. حيث إن المعايرة هي العملية الحاسمة لضبط معلماته، وهذا لتقليل التناقض بين الأسعار الناتجة عن النموذج وأسعار السوق الملحوظة. ويتضمن ذلك تحسين المعلمات الرئيسية مثل التقلب الأولي v_0 ، التباين طويل الأجل θ ، متوسط معدل الارتداد K ، تقلب التقلبات σ ، والارتباط بين عوائد الأصول والتقلبات ρ . ومن خلال تحسين هذه المعايير بشكل متكرر، يتم تعزيز الكفاءة الحسابية بشكل كبير وضبط النموذج بدقة



ليتوافق مع بيانات السوق، مما يضمن موثوقيته ودقته في التسعير (Cui et al., 2017). وتستخدم عملية المعايرة عادة تقنيات التحسين العددي لتقليل هامش الخطأ، مما يجعل أنموذج هيستون أداة قوية لالتقاط ديناميكيات أسعار السوق وأسطح التقلب الضمنية. وفي هذه الدراسة، سنستخدم طريقة تحسين شائعة الاستخدام تسمى خوارزمية (The L-BFGS-B) اختصاراً لـ (Limited-Memory BFGS With Bound Constraints) (Davidon, 1991). وتُسميت على اسم مكتشفها (Shanno, Goldfarb, Fletcher, Broyden). وتنتمي BFGS إلى عائلة (Quasi-Newton Method). حيث تتميز هذه الخوارزمية بفعاليتها في حل المشكلات الشهيرة بفضل كفاءتها في استخدام الذاكرة (Nocedal & Wright, 2006, pp. 136–137). وتعتبر خوارزمية L-BFGS-B امتداد للـ BFGS حيث تم تصميمها لغرضين:

- تقليل دالة الهدف (Objective Function): تستخدم ذاكرة محدودة (تسمح بتخزين مصفوفات كبيرة مثل مصفوفة Hessian الكاملة).

- القيود المحدودة: تسمح للمتغيرات بأن يكون لها حدود علوية وسفلية ($x_i \geq 0$).

$$m_k(x) = f(x_k) + g_k^T(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T B_k(x - x_k) \quad (16)$$

حيث أن:

- g_k هو تدرج دالة الهدف (Objective Function) عند x_k ؛

- B_k هي مصفوفة L-BFGS والتي تعمل كتقريب لمصفوفة هيسيان (Hessian matrix) عند النقطة x_k . لاحترام القيود، تستخدم L-BFGS-B طريقة التدرج المسقط: تحدد المتغيرات عند حدودها النشطة وتركز اتجاه البحث على المتغيرات الحرة، مما يضمن بقاء كل نقطة جديدة داخل المنطقة الممكنة. كما تعدل أطوال الخطوة خلال بحث خطي معدل لتجنب تجاوز أي حدود. على أن الحدود العليا والدنيا لمعاملات أنموذج هيستون كالآتي:

$$2k\theta > \sigma^2, \quad -1 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < 1 \\ \sigma < 1, \quad \kappa > 0, \quad 0 < v_0 < 1$$

4. نتائج المعايرة:

باستخدام الحدود الموضحة أعلاه تم استخدام خيار الشراء الأوروبي على الأسهم لشركة (Berkshire) الذي تم جلبه من موقع Yahoo Finance بتاريخ 2024.12.19. استخدمنا وظيفة تقليل الخطأ بين أسعار النماذج المقتبسة. حيث أنه عادة ما يتم تعريف الخطأ على أنه الفرق التربيعي بين أسعار السوق الحقيقي وأسعار النماذج الرياضية، (Rouah Fabrice, 2015, p. 116). وهو ما يسمى أيضاً بدالة الخسارة ويتم حسابها كالآتي:

$$\mathcal{L}(\kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0) = \sum_{i,j} [C_{\text{market}}(T_i, K_j) - C_{\text{Heston}}(T_i, K_j; \kappa, \theta, \sigma, \rho, v_0)]^2 \quad (17)$$

وعليه تم الحصول على القيم العشوائية للمعاملات الخمس للأنموذج كما هو موضح في الجدول التالي:



الجدول رقم (2): "يوضح القيم العشوائية للمعاملات الخمس للأنموذج"

	Initial Variance	Rate Of Reversion	Long-Run Mean	Volatility Of Volatility	Correlation Coefficients
Parameters	ν_0	κ	θ	σ	ρ
Values	0.0528485908	1.0119515036	0.0167586678	0.2114664724	-0.6606734881

المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

5. النتائج والمناقشة

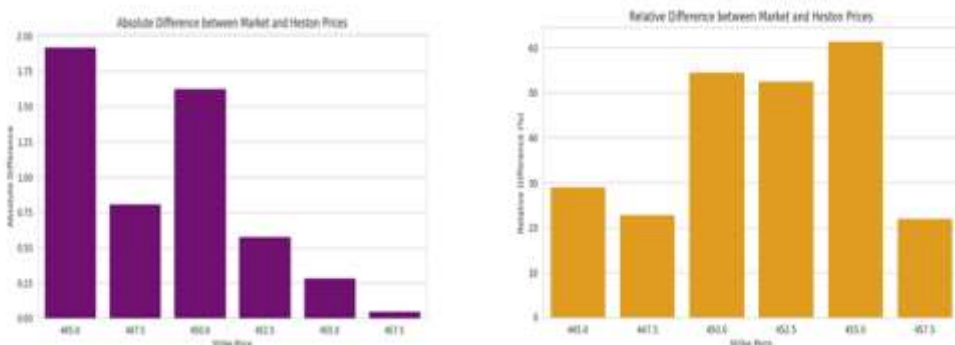
1.5. التحليل المالي لأسعار خيارات الشراء الأوربية الناتجة عن أنموذج هيستون (Heston Model)

يتناول هذا المبحث تحليلاً مالياً للتغير الحاصل في أسعار خيارات شركة (Berkshire) عينة الدراسة تبعاً للتغير في تواريخ الاستحقاق خلال مدة الدراسة والتي تتألف من أربعة تواريخ استحقاق. حيث سيتم عرض النتائج التي تم الحصول عليها من أنموذج التقلب العشوائي المتمثل بأنموذج هيستون (Heston Model).

أ. تحليل أسعار خيارات الشراء ذات الاستحقاق يوم واحد: يبين الجدول رقم (04) أسعار خيارات الشراء من النوع الأوربي التي تم إبرامها على أسهم شركة (Berkshire) عينة الدراسة وعددها (06) خيارات، والتي لها نفس تاريخ الاستحقاق (يوم واحد). حيث تم تحريرها بتاريخ 2024.12.19 وتنتهي صلاحيتها بتاريخ 2024.12.20. حيث تم ممارسة هذه الخيارات بأسعار تنفيذ (Strike Price) مختلفة تتراوح ما بين 445 و 475.5 دولار، كما أن السعر الفوري (Spot Price) هو 449,34 دولار. وعند مقارنة السعر السوقي لسعر الخيار مع السعر المحسوب باستخدام أنموذج هيستون، وقياس الفرق المطلق (Absolute Difference) والفرق النسبي (Relative Difference) لكل عقد؛ لاحظنا ما يلي:

الفروق بين أسعار السوق الحقيقية وأسعار أنموذج هيستون: فإن متوسط الخطأ المطلق (MAE) يبلغ 0.88، وهو مقياس أساسي لتقييم دقة الأنموذج؛ متوسط الفرق النسبي يبلغ 40.50%، مما يشير إلى أن أنموذج هيستون يعيل إلى التقليل من تقدير الأسعار مقارنة بالسوق.

الشكل رقم (1): "يوضح العلاقة بين الخطأ المطلق والخطأ النسبي و بين أسعار التنفيذ"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

الاتجاه العام للفروقات:

- في خيارات ATM و ITM حيث سعر التنفيذ (445 – 450 دولار) أقل أو هو قريب من السعر الفوري 449,34 دولار، أظهر أنموذج هيستون فرقا واضحا في السعر بينه و بين سعر السوق و إن كان نسبيا؛
 - في خيارات OTM حيث سعر التنفيذ أعلى من السعر الفوري، فإنه كذلك أظهر أنموذج هيستون فروقات أكبر بنسبة تصل إلى 60% مما يدل على أنه يجد صعوبة في تقييم أسعار الخيارات المنخفضة أو الرخيصة. ربما بسبب عدم قدرته على التقاط منحنى التقلب الضمني (Volatility Smile) بدقة.
- الشكل رقم (2): "مقارنة بين أسعار السوق الحقيقي و أسعار أنموذج هيستون"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

الجدول رقم (3): "يوضح أسعار أنموذج السوق و أنموذج هيستون لفترة استحقاق يوم واحد"

Strike Price	Last Price	IV	Spot Price	Maturity	Rate	Maturity in days	Heston price	Abs-difference	Relative diff
445	6,58	0,00001	449,34	0,002738	0,000126	1	4,662323	1,92	29,14
447,5	3,55	0,00001	449,34	0,002738	0,000126	1	2,736528	0,81	22,91
450	2,98	0,007822	449,34	0,002738	0,000126	1	1,349644	1,63	54,71
452,5	1,1	0,03126	449,34	0,002738	0,000126	1	0,521498	0,58	52,59
455	0,47	0,062509	449,34	0,002738	0,000126	1	0,181065	0,29	61,48
457,5	0,24	0,062509	449,34	0,002738	0,000126	1	0,186781	0,05	22,17
MAE								0,88	40,50

المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python



ب. تحليل أسعار خيارات الشراء ذات الاستحقاق 30 يوماً: يتضمن الجدول رقم (05) بيانات 03 أسعار خيارات الشراء من النوع الأوربي المبرمة على نفس الشركة، لها نفس آجال الاستحقاق (30 يوماً) أي أنها تنتهي بتاريخ 2025.01.17. ويظهر الجدول نتائج دقيقة تُشير إلى وجود فروقات ملحوظة بين الأسعار السوقية وتوقعات النموذج، حيث بلغ متوسط الخطأ المطلق (MAE) 0.87 مع تباين في الفروقات النسبية بين 4.69% إلى 9.06%، مما يعكس اختلافاً في دقة النموذج حسب أسعار التنفيذ. فعند سعر التنفيذ 445 دولار (خيار ITM حيث السعر الفوري 449.34 دولار أعلى من سعر التنفيذ)، سجل النموذج أعلى فرق مطلق (1.3956) ونسبي (9.06%) رغم أن التقلب الضمني (IV) كان منخفضاً بشكل استثنائي (0.00001)، مما قد يشير إلى إما خطأ في قياس IV السوقى (ربما بسبب سيولة منخفضة أو بيانات غير دقيقة) أو عجز النموذج في محاكاة ديناميكيات التقلب لخيارات (ITM). أما عند سعر التنفيذ 450 دولار خيار (ATM)، كان النموذج أكثر دقة بفرق نسبي 4.69% فرق مطلق (0.508) مع ارتفاع طفيف في IV (0.00196)، مما يوحي بأن النموذج يعمل بشكل أفضل عند أسعار التنفيذ المتوازنة. في المقابل، عند سعر التنفيذ 455 دولار (خيار OTM)، ارتفع الفرق النسبي إلى 8.47% رغم زيادة IV إلى 0.0078، مما قد يعكس تحدياً في نمذجة التقلب العشوائي (Stochastic Volatility) في نموذج هيستون لخيارات OTM، خاصة مع وجود قيم IV غير متناسبة مع مستويات أسعار التنفيذ (حيث يُتوقع عادةً ارتفاع IV للخيارات OTM). من ناحية أخرى، تشير الفروقات إلى أن النموذج يبالغ في تقدير الأسعار عند سعر التنفيذ 450 دولار (توقع أعلى من السوق) ويقلل من تقديرها عند 445 و 455 دولار، وهو نمط قد يعكس عدم دقة في معلمات النموذج مثل سرعة عودة التقلب إلى متوسطه (Mean Reversion Speed) أو ارتباط التقلب مع العائدات (Volatility-Return Correlation). كما أن انخفاض IV الشديد (أقل من 1%) لجميع الخيارات يثير تساؤلات حول افتراضات النموذج، خاصة أن مثل هذه القيم نادرة في الأسواق الحقيقية وتشير إلى خيارات ذات آجال استحقاق قصيرة جداً.

الشكل رقم (3): "مقارنة بين أسعار السوق الحقيقي و أسعار نموذج هيستون"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python



الجدول رقم (4): "يوضح أسعار أنموذج السوق و أنموذج هيستون لفترة استحقاق 30 يوما"

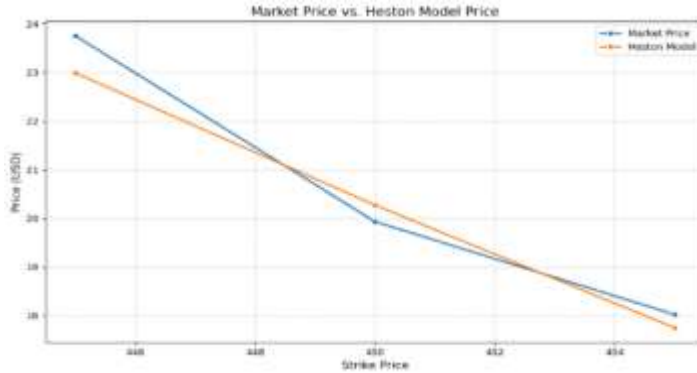
Strike Price	Last Price	IV	Spot Price	Maturity	Rate	Maturity in days	Heston price	Abs-difference	Relative diff
445	15,4	0,00001	449,34	0,082136	0,003778	30	14,004 36	1,39	9,06
450	10,83	0,001963	449,34	0,082136	0,003778	30	11,338 28	0,50	4,69
455	8,31	0,007822	449,34	0,082136	0,003778	30	9,0135 46	0,70	8,46
MAE								0,87	7,41

المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

ت. تحليل أسعار خيارات الشراء ذات الاستحقاق 94 يوما: بناءً على البيانات المقدمة في الجدول رقم (06)، يُظهر أنموذج هيستون دقة معقولة في تسعير الخيارات مقارنة بالأسعار السوقية، حيث بلغ متوسط الخطأ المطلق (MAE) 0.46 ومتوسط الخطأ النسبي 2.14%، مما يشير إلى أن الفروق بين الأسعار النموذجية والسوقية صغيرة نسبياً مقارنة بحجم الأسعار نفسها (~18-24 دولار). ومع ذلك، تُلاحظ فروق نسبية أعلى (~3.2%) للخيارات ITM ذات سعر التنفيذ الأقل (445 دولار) مقارنة بتلك ذات سعر التنفيذ الأعلى (خيارات OTM (455 دولار). حيث انخفض الخطأ النسبي إلى ~1.5%، وهو ما قد يعكس تحسناً في دقة الأنموذج مع زيادة سعر التنفيذ، أو اختلافاً في سلوك التقلب الضمني (IV) بين هذه الخيارات. حيث أن التقلب الضمني (IV) المذكور في البيانات يظهر قيمةً منخفضة بشكل غير طبيعي (0.00001 لسعر التنفيذ 445 دولار و 0.000987 لسعر التنفيذ 450 دولار)، وهو أمر نادر في الأسواق الحقيقية حيث يُتوقع أن يكون IV أعلى من ذلك بكثير حتى لخيارات ATM ذات سعر التنفيذ القريب من السعر الفوري (\$449.34 = Spot)، مما يشير إلى أن السوق يتوقع حركة سعرية منخفضة لهذه الخيارات كما يثير في نفس الوقت تساؤلات حول معلمات الأنموذج. من ناحية أخرى، يُظهر تحليل التوزيع أن الفروق المطلقة تتركز حول 0.3-0.7 مع وجود تحيز سلبي (الأنموذج يقلل من التقدير بشكل متكرر)، بينما يكشف سطح التقلب الضمني (IV Surface) عن زيادة طفيفة في IV مع ارتفاع سعر التنفيذ، لكنه يفشل في تكوين "الابتسامة" أو "الانحناء" المعتاد في نماذج التقلب، مما قد يشير إلى قصور الأنموذج في التقاط ديناميكيات السوق الحقيقية أو مشكلة في معايرة المعلمات الأساسية مثل سرعة عودة التقلب إلى المتوسط (Mean Reversion Speed) أو التقلب طويل الأجل (Long-Term Volatility). يُعتبر الأنموذج مقبولاً في ظل هذه البيانات، لكنه يحتاج إلى تحسينات جوهرية في المعلمات خاصة إذا كانت الـ IV المنخفضة تعكس واقع السوق.



الشكل رقم (4): "مقارنة بين أسعار السوق الحقيقي و أسعار أنموذج هيستون"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

الجدول رقم (5): "يوضح أسعار أنموذج السوق و أنموذج هيستون لفترة استحقاق 94 يوما"

Strike Price	Last Price	IV	Spot Price	Maturity	Rate	Maturity in days	Heston price	Abs-difference	Relative diff
445	23,75	0,00001	449,34	0,257358	0,011838	94	22,98597	0,76	3,21
450	19,93	0,000987	449,34	0,257358	0,011838	94	20,26821	0,33	1,69
455	18,02	0,007822	449,34	0,257358	0,011838	94	17,74832	0,27	1,50
MAE								0,46	2,14

المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

ث. تحليل أسعار خيارات الشراء ذات الاستحقاق 185 يوما: يظهر الجدول رقم (07) أن نتائج أنموذج هيستون توافقاً جزئياً مع الأسعار السوقية للخيارات، حيث تتراوح الفروق المطلقة بين 0.58 إلى 1.16 (بمتوسط خطأ مطلق 0.91) والفروق النسبية بين 1.92% إلى 4.13% (بمتوسط خطأ نسبي 3.05%)، مع تسجيل أعلى فرق مطلق عند سعر التنفيذ 445 دولار (سعر السوق: 31.6 مقابل سعر الأنموذج: 32.58) وأعلى فرق نسبي عند سعر التنفيذ 455 دولار (السوق: 28.08 مقابل الأنموذج: 26.92)، مما يشير إلى أن الأنموذج يبالغ في تقدير قيمة خيارات ITM ذات سعر التنفيذ المنخفض ويقلل من تقديرها بالنسبة لخيارات OTM عند سعر التنفيذ المرتفع، وهو ما قد يعكس عدم دقة في نمذجة علاقة التقلب بسعر التنفيذ أو حساسية الأنموذج لمعلومات مثل (سرعة عودة التقلب إلى المتوسط) أو (تقلبية التقلب نفسها).

من ناحية أخرى، تُظهر بيانات التقلب الضمني (IV) قيمةً منخفضة للغاية (0.00001 إلى 0.003916) تُناقض السلوك المعتاد للسوق (كمنحنى التقلب "Volatility Smile")، مما يثير احتمالية وجود افتراضات غير واقعية في الأنموذج، مثل إهمال تأثير القفزات السعرية أو عدم مراعاة السيولة المنخفضة. يُضاف إلى ذلك أن تناقض الفروق السعرية مع مستويات التقلب الضمني المنخفضة قد يشير إلى أن الأنموذج يفشل في التقاط الديناميكيات



الحقيقية للسوق، مما يستلزم معايير دقيقة للمعلومات (كمعامل الارتباط بين السعر والتقلب، والتقلب طويل الأجل)، ومراجعة حساب الـ IV، مع الأخذ في الاعتبار تأثير معدل الفائدة (0.023299) وفترة الاستحقاق المتبقية (185 يوماً) على حساسية النتائج. وعليه، يُعتبر النموذج أداة مفيدة لكنها غير كافية بمفردها في هذه الحالة، مما يُبرز الحاجة إلى تكامله مع مؤشرات أخرى لتعكس تعقيدات السوق بدقة أعلى.

الشكل رقم (5): "مقارنة بين أسعار السوق الحقيقي وأسعار نموذج هيستون"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

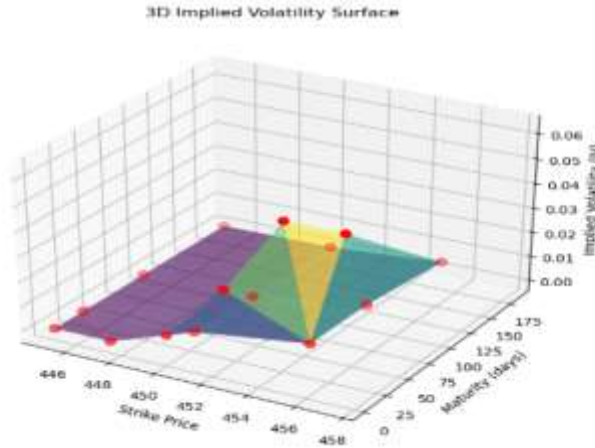
الجدول رقم (6): "يوضح أسعار نموذج السوق و نموذج هيستون لفترة استحقاق 185 يوماً"

Strike Price	Last Price	IV	Spot Price	Maturity	Rate	Maturity in days	Heston price	Abs-difference	Relative diff
445	31,6	0,00001	449,34	0,506502	0,023299	185	32,57882	0,97	3,09
450	30,26	0,000498	449,34	0,506502	0,023299	185	29,67823	0,58	1,92
455	28,08	0,003916	449,34	0,506502	0,023299	185	26,9195	1,16	4,13
MAE								0,91	3,05

المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

ج. اختبار النموذج في جميع فترات الاستحقاق: عند استعراض شكل التقلب الضمني ثلاثي الأبعاد (IV Surface) لجميع فترات الاستحقاق الأربع: فإنه يُظهر تفاوتاً واضحاً في التقلبات الضمنية عبر أسعار التنفيذ وآجال الاستحقاق. ففي الأمثلة القصيرة الأجل (1-30 يوماً)، لوحظت قيم تقلب ضمني منخفضة للغاية، وهذه القيم تبدو واقعية بسبب قصر أجل الاستحقاق. بينما في الفترات المتوسطة والطويلة (94-185 يوماً)، تظهر التقلبات الضمنية نمطاً أكثر اتساقاً، مما يعكس "ابتسامة التقلب" (Volatility Smile) النموذجية في خيارات الأسهم، حيث يزداد التقلب عندما تكون الخيارات (ATM).

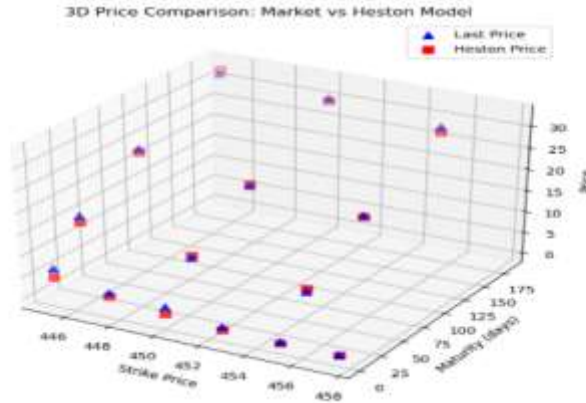
الشكل رقم (6): "شكل ثلاثي الابعاد يوضح سطح التقلب الضمني"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python

أما في مقارنة الأسعار بين السوق ونموذج Heston، فالنموذج يُظهر دقة أكبر في الخيارات ذات الاستحقاقات الطويلة (مثل 276 يومًا)، حيث تقل الفروق النسبية إلى 1.85%، بينما تتفاقم الأخطاء في الخيارات قصيرة الأجل (مثل 1 يوم) مع فروق نسبية تصل إلى 61.48%.

الشكل رقم (7): "مقارنة بين أسعار السوق الحقيقي و أسعار أنموذج هيستون"



المصدر: من إعداد الباحثين بالاستناد إلى مخرجات برمجية Python



الخاتمة

من خلال هذه الدراسة حاولنا تحديد القيمة النظرية العادلة لخيارات الشراء الأوروبية على الأسهم باستخدام نموذج هيستون وهذا لعينة من 15 خيار مبرم على أسهم شركة (Berkshire)، وخلصت الدراسة إلى النتائج التالية:

- أنموذج هيستون يقترب بشكل جيد من الأسعار السوقية: وهذا ما يتضح من التقارب بين المربع الأحمر (الأنموذج) والمثلث الأزرق (السوق) أن أنموذج هيستون يقدم تمثيلًا جيدًا لأسعار الخيارات؛
- أنموذج هيستون مناسب لكنه ليس مثاليًا: يتطابق إلى حد كبير مع أسعار السوق لكنه يظهر بعض الانحرافات؛

- يتفوق أنموذج هيستون في تسعير خيارات الخاسرة OTM والمتعادلة ATM؛
- أسعار الخيارات تزداد مع الاستحقاق، مما يتوافق مع النظريات المالية. أي الفرضية القائلة بأن الخيارات تصبح أكثر تكلفة مع ازدياد فترة الاستحقاق بسبب زيادة عدم اليقين؛
- يظهر أن التقلب الضمني يتغير بشكل غير خطي بناءً على كل من Moneyness وفترة الاستحقاق.
- خوارزمية تحسين عديدة L-BFGS-B لم تعط نتائج دقيقة أثناء المعايرة.

التوصيات وآفاق البحث:

- قد يكون من المفيد دمج تعديلات مثل إضافة عمليات القفز (Jump Processes)؛
- دمج نماذج مكتملة: استخدام نموذج Bates (هيستون + قفزات Jumps) لالتقاط أخطار الحركات المفاجئة؛

- استخدام طرق معايرة متقدمة: عن استخدام خوارزميات مثل Levenberg-Marquardt أو Bayesian Optimization لضبط المعلمات بدقة؛

- استخدام البرمجة العصبية والتعلم العميق في عمليات التسعير وتدريب النماذج على توليد نتائج أكثر دقة.

قائمة المراجع:

- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 17, 21–86.
- Bayad, S., Hilal, K., & El Hajaji, A. (2024). Valuing a European Option Under the Heston Model with Interest Rate. In Applied Mathematics and Modelling in Finance, Marketing and Economics (Vol. 1114, pp. 197–206). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-42847-0_16
- Berkshire Hathaway INC. (2024). Berkshire Hathaway INC. <https://www.berkshirehathaway.com/>.
- BIS. (2022). Derivatives statistics. <https://stats.bis.org/statx/toc/DER.html>
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81(3), 637–654.



- Bouasabah, M. (2021). Evaluating the Predictive Accuracy of Heston Stochastic Volatility Model for Currency Options using Local and Global Calibration. *International Journal of Innovation and Applied Studies*, 34(1), 51–61.
- Buffett, W. E. (1997, February 28). Chairman's Letter - 1996. <https://www.berkshirehathaway.com/letters/1996.html>
- Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J., & Zhu, C. (1995). A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(5), 1190–1208. <https://doi.org/10.1137/0916069>
- Chance, D. M., & Brooks, R. (2015). *Introduction to Derivatives and Risk Management 10th Edition (10th Edition)*. Cengage Learning.
- Chen, R., Zhou, H., Yu, L., Jin, C., & Zhang, S. (2021). An efficient method for pricing foreign currency options. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 74, 101295.
- Chesney, M., & Scott, L. (1989). Pricing European currency options: A comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(3), 267–284.
- Clevenhaus, A., Totzeck, C., & Ehrhardt, M. (2024). A gradient-based calibration method for the Heston model. *International Journal of Computer Mathematics*, 101(9–10), 1094–1112. <https://doi.org/10.1080/00207160.2024.2353189>
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407. <https://doi.org/10.2307/1911242>
- Crisóstomo, R. (2015). An analysis of the heston stochastic volatility model: Implementation and calibration using matlab. *ArXiv Preprint ArXiv:1502.02963*.
- Cui, Y., del Baño Rollin, S., & Germano, G. (2017). Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model. *European Journal of Operational Research*, 263(2), 625–638. <https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.08718>
- Davidon, W. C. (1991). Variable Metric Method for Minimization. *SIAM Journal on Optimization*, 1(1), 1–17. <https://doi.org/10.1137/0801001>
- Dunn, R., Hauser, P., Seibold, T., & Gong, H. (2014). Estimating option prices with Heston's stochastic volatility model.
- Farid, J. A. (2015). *An Option Greeks Primer*. Palgrave Macmillan UK. <https://doi.org/10.1057/9781137371676>
- Hargrave, M. (2023, May 8). Berkshire Hathaway: What It Is, Market Cap, and Who Owns It. <https://www.investopedia.com/terms/b/berkshire-hathaway.asp>
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Hilpisch, Y. J. (2020). *Python for Finance: Mastering Data-Driven Finance (2nd Edition)*. O'Reilly Media.
- Hull, J. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives, [Global Edition] (11th ed)*. Pearson Education, Limited.
- Hull, J., & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2), 281–300.



- Jennewine, T. (2024, December 4). Warren Buffett Sends a \$150 Billion Warning to Stock Investors as the S&P 500 Races Past Record Highs. <https://finance.yahoo.com/news/warren-buffett-sends-150-billion-085000578.html>
- Li, M. (2020). The Calibration of the Heston Model Using Neural Network Pricing Approximations.
- Lin, Y., Qian, R., & Yan, Y. (2024). A Study of Black-Scholes-Merton Model. Finance & Economics, 1(8). <https://doi.org/10.61173/b0jadz18>
- Liu, S., Borovykh, A., Grzelak, L. A., & Oosterlee, C. W. (2019). A neural network-based framework for financial model calibration. Journal of Mathematics in Industry, 9(1), 9. <https://doi.org/10.1186/s13362-019-0066-7>
- Mategaonkar, M. (2022). Numerical modeling of groundwater flow and contaminant transport. In Groundwater Contamination in Coastal Aquifers (pp. 181–189). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-824387-9.00005-0>
- Nocedal, J., & Wright, S. (2006). Numerical Optimization (Springer Science & Business Media, Ed.; 2nd edition). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5>
- Orzechowski, A. (2022). Pricing European Options in the Heston and the Double Heston models. Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, 22(1), 39–50. <https://doi.org/10.22630/MIBE.2021.22.1.4>
- Rouah, F. D. (2013). The Heston model and its extensions in Matlab and C. John Wiley & Sons.
- Rouah Fabrice, D. (2015). The Heston Model and Its Extensions in VBA (F. D. Rouah, Ed.; 1st Edition). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781119020523>
- Stein, E. M., & Stein, J. C. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. The Review of Financial Studies, 4(4), 727–752.
- Taufik, A., Idris, M., & Lestia, A. S. (2024). Metode Black-Scholes Dalam Penentuan Harga Opsi. Epsilon: Journal Matematika Murni Dan Terapan (Epsilon: Journal Of Pure And Applied Mathematics), 18(1), 122. <https://doi.org/10.20527/epsilon.v18i1.12604>
- Vanzo, R. (2024, May 13). Will Berkshire Hathaway Class B Stock Ever Pay Dividends? | The Motley Fool. <https://www.fool.com/investing/2024/05/13/will-berkshire-hathaway-stock-ever-pay-dividends/>
- Wiggins, J. B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. Journal of Financial Economics, 19(2), 351–372.
- Zutter, C., & Smart, S. (2019). Principles of managerial finance, 15th edition [Global Edition]. Prentice Hall.
- الزحئل، و. (2006). المعاملات المالية المعاصرة. الطبعة الثالثة. دمشق، سورفا. دار الفكر المعاصر.
- قندوز، ع. ا. (2016). أساسيات المشتقات المالية: الخيارات، العقود الآجلة والمستقبلية، المقايضات. ألمانيا. نور نشر.



الملاحق:

Implement the characteristic function and calculate option price

```
File Edit View Run Kernel Settings Help
+ - X Copy Paste Run Code v JupyterLab

def heston_charfunc(phi, S0, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r):
    a = kappa*theta
    b = kappa+lambda
    rspi = rho*sigma*phi*1j
    d = np.sqrt((rho*sigma*phi*1j - b)**2 + (phi*1j+phi**2)*sigma**2)
    g = (b-rspi+d)/(b-rspi-d)
    exp1 = np.exp(r*phi*1j*tau)
    term2 = S0**(phi*1j) * ((1-g*np.exp(d*tau))/(1-g))**(-2*a/sigma**2)
    exp2 = np.exp(a*tau*(b-rspi+d)/sigma**2 + v0*(b-rspi+d)*((1-np.exp(d*tau))/(1-g*np.exp(d*tau)))/sigma**2)
    return exp1*term2*exp2

def integrand(phi, S0, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r):
    args = (S0, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r)
    numerator = np.exp(r*tau)*heston_charfunc(phi-1j,*args) - K*heston_charfunc(phi,*args)
    denominator = 1j*phi*K**(1j*phi)
    return numerator/denominator

def heston_price_rec(S0, K, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r):
    args = (S0, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r)
    P, umax, N = 0, 100, 10000
    dphi=umax/N
    for i in range(1,N):
        phi = dphi * (2*i + 1)/2
        numerator = np.exp(r*tau)*heston_charfunc(phi-1j,*args) - K * heston_charfunc(phi,*args)
        denominator = 1j*phi*K**(1j*phi)
        P += dphi * numerator/denominator
    return np.real((S0 - K*np.exp(-r*tau))/2 + P/np.pi)

def heston_price(S0, K, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r):
    args = (S0, v0, kappa, theta, sigma, rho, lambda, tau, r)
    real_integral, err = np.real(quad(integrand, 0, 100, args=args))
    return (S0 - K*np.exp(-r*tau))/2 + real_integral/np.pi
```

Calibration - Optimization Objective function

```
File Edit View Run Kernel Settings Help
+ - X Copy Paste Run Code v

# Optimization parameters
params = {
    "v0": {"x0": 0.1, "lbub": [1e-3, 0.1]},
    "kappa": {"x0": 3, "lbub": [1e-3, 5]},
    "theta": {"x0": 0.05, "lbub": [1e-3, 0.1]},
    "sigma": {"x0": 0.3, "lbub": [1e-2, 1]},
    "rho": {"x0": -0.8, "lbub": [-1, 0]},
}

x0 = [param["x0"] for param in params.values()]
bnds = [param["lbub"] for param in params.values()]

def SqErr(x):
    v0, kappa, theta, sigma, rho = x
    err = np.sum((P - heston_price_rec(S0, K, v0, kappa, theta, sigma, rho, tau, r)) ** 2 / len(P))
    return err

# Optimize parameters
result = minimize(SqErr, x0, tol=1e-3, method='L-BFGS-B', options={'maxiter': 1e3}, bounds=bnds)
```

¹ التقلب الضمني يشير إلى التقلبات المقدرة لحركة سعر الأصل الأساسي. حيث يقيس بشكل عام درجة تقلب الأسعار أو عدم اليقين في قيمة الأصل أي أنه يعكس توقعات السوق أو تصور السوق لتقلبات الأسعار المستقبلية للأصل على مدى عمر عقد الخيار.