

Printed from

Journal of Scientific Research

<http://www2.univ-bechar.dz/jrs/>

Modélisation par la méthode asymptotique des problèmes de contact

M. Tarfaoui¹, N. Terfaya², A. Benzegaou¹

¹ *Laboratoire L2ME, Université de Bechar, Algérie*

² *Laboratoire FIMAS, Université de Bechar, Algérie*

Published on 10 July 2013



ISSN 2170-1237

The Editor, on behalf of the Editorial Board and Reviewers, has great pleasure in presenting this number of the Journal of Scientific Research. This journal (ISSN 2170-1237) is a periodic and multidisciplinary journal, published by the University of Bechar. This journal is located at the interface of research journals, and the vulgarization journals in the field of scientific research. It publishes quality articles in the domain of basic and applied sciences, technologies and humanities sciences, where the main objective is to coordinate and disseminate scientific and technical information relating to various disciplines.

The research articles and the development must be original and contribute innovative, helping in the development of new and advanced technologies, like the studies that have concrete ideas which are of primary interest in mastering a contemporary scientific concepts. These articles can be written in Arabic, French or English. They will not be published in another journal or under review elsewhere. The target readership is composed especially of engineers and technicians, teachers, researchers, scholars, consultants, companies, university lab, teaching techniques and literary ... The journal is obtainable in electronic form, which is available worldwide on the Internet and can be accessed at the journal URL:

<http://www2.univ-bechar.dz/jrs/>.

Director of Journal

Pr. BELGHACHI Abderrahmane

Editor in Chief

Dr. HASNI Abdelhafi d

Co-Editor in Chief

Dr. BASSOU Abdesselam

Editorial Member

TERFAYA Nazihe

BOUIDA Ahmed

LATFAOUI Mohieddine

MOSTADI Siham

Reviewers board of the Journal.

Pr. KADRY SEIFEDINE (The American University in KUWAIT)
Pr. RAZZAQ GHUMMAN Abdul (Al Qassim University KSA)
Pr. PK. MD. MOTIUR RAHMAN (University of Dhaka Bangladesh)
Pr. MAHMOOD GHAAZAW Yousry (Al Qassim University KSA)
Pr. KHENOUS Houari Boumediene (King Khalid University KSA)
Pr. RAOUS Michel (Laboratory of Mechanic and Acoustic France)
Pr. RATAN Y. Borse (M S G College Malegaon Camp India)
Pr. LEBON Frédéric (University of Aix-Marseille 1 France)
Pr. MONGI Ben Ouédou (National Engineering School of Tunis)
Pr. BOUKELIF Aoued (University of Sidi Bel Abbes Algeria)
Pr. DJORDJEVICH Alexandar (University of Hong Kong)
Pr. BENABBASSI Abdelhakem (University of Bechar Algeria)
Pr. BOULARD Thierry (National Institute of Agronomic Research France)
Pr. LUCA Varani (University of Montpellier France)
Pr. NEBBOU Mohamed (University of Bechar Algeria)
Dr. FELLAH Zine El Abidine Laboratory of Mechanic and Acoustic France)
Dr. ZHEN Gao (University of Ontario Institute of Technology Canada)
Dr. OUERDACHI Lahbassi (University of Annaba Algeria)
Dr. HADJ ABDELKADER Hicham (IBISC – University of Evry France)
Dr. KARRAY M'HAMED ALI (National Engineering School of Tunis)
Dr. ALLAL Mohammed Amine (University of Tlemcen Algeria)
Dr. FOUCHAL Fazia (GEMH - University of Limoges France)
Dr. TORRES Jeremi (University of Montpellier 2 France)
Dr. CHANDRAKANT Govindrao Dighavka (L. V. H. College of Panchavati India)
Dr. ABID Chérifa (Polytech' University of Aix-Marseille France)
Dr. HAMMADI Fodil (University of Bechar Algeria)
Dr. LABBACI Boudjema (University of Bechar Algeria)
Dr. DJERMANE Mohammed (University of Bechar Algeria)
Dr. BENSALI Abd-El-Hamid (University of Tlemcen)
Dr. BENBACHIR Maamar (University of Bechar Algeria)

Pr. BALBINOT Alexandre (Federal University of Rio Grande do Sul Brazil)
Pr. TEHIRICHI Mohamed (University of Bechar Algeria)
Pr. JAIN GOTAN (Materials Research Lab., A.C.S. College, Nandgaon India)
Pr. SAIDANE Abdelkader (ENSET Oran Algeria)
Pr. DI GIAMBERARDINO Paolo (University of Rome « La Sapienza » Italy)
Pr. SENGOUGA Nouredine (University of Biskra Algeria)
Pr. CHERITI Abdelkarim (University of Bechar Algeria)
Pr. MEDALE Marc (University of Aix-Marseille France)
Pr. HELMAOUI Abderrachid (University of Bechar Algeria)
Pr. HAMOUINE Abdelmadjid (University of Bechar Algeria)
Pr. DRAOUI Belkacem (University of Bechar Algeria)
Pr. BELGHACHI Abderrahmane (University of Bechar Algeria)
Pr. SHAILENDHRA Karthikeyan (AMRITA School of Engineering India)
Pr. BURAK Barutcu (University of Istanbul Turkey)
Pr. LAOUFI Abdallah (University of Bechar Algeria)
Dr. SELLAM Mebrouk (University of Bechar Algeria)
Dr. ABDUL RAHIM Ruzairi (University Technology of Malaysia)
Dr. BELBOUKHARI Nasser (University of Bechar Algeria)
Dr. CHIKR EL MEZOUAR Zouaoui (University of Bechar Algeria)
Dr. BENACHAIBA Chellali (University of Bechar Algeria)
Dr. KAMECHE Mohamed (Centre des Techniques Spatiales, Oran Algeria)
Dr. MERAD Lotfi (Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques Tlemcen Algeria)
Dr. BASSOU Abdesselam (University of Bechar Algeria)
Dr. ABOU-BEKR Nabil (University of Tlemcen Algeria)
Dr. BOUNOUA Abdennacer (University of Sidi bel abbes Algeria)
Dr. TAMALI Mohamed (University of Bechar Algeria)
Dr. FAZALUL RAHMAN Mohd Hafiz (University of Malaysia)
Dr. ABDELAZIZ Yazid (University of Bechar Algeria)
Dr. BERGA Abdelmadjid (University of Bechar Algeria)
Dr. Rachid KHALFAOUI (University of Bechar Algeria)
Dr. SANJAY KHER Sanjay (Raja Ramanna Centre for Advanced Technology INDIA)

Journal of Scientific Research

P.O.Box 417 route de Kenadsa

08000 Bechar - ALGERIA

Tel: +213 (0) 49 81 90 24

Fax: +213 (0) 49 81 52 44

Editorial mail: jrs.bechar@gmail.com

Submission mail: submission.bechar@gmail.com

Web: <http://www2.univ-bechar.dz/jrs/>



Modélisation par la méthode asymptotique des problèmes de contact

M. Tarfaoui¹, N. Terfaya², A. Benzegaou¹

¹ Laboratoire L2ME, Université de Bechar, Algérie

² Laboratoire FIMAS, Université de Bechar, Algérie

Résumé – Le travail proposé, entre dans le cadre de la modélisation des problèmes de contact et de frottement entre un corps élastique et une fondation rigide. L'objectif principal est d'associer une méthode de perturbation à la méthode des éléments finis et de développer une méthode asymptotique permet à la fois la résolution du problème de contact avec présence du frottement.

Mots clés: Contact, frottement, méthode asymptotique, méthode des éléments finis, dynamique des structures, méthode de flexibilité.

I. Introduction

Dans le présent travail, nous présenterons la résolution des problèmes de contact avec frottement par la méthode asymptotique. Le concept de base de cette méthode repose sur la formulation des déplacements sous forme de séries entières d'ordre p en fonction du temps. Pour être capable de traiter des problèmes d'intérêt industriel qui font intervenir le contact, on doit disposer à des algorithmes. Ceci nous amène à poser le problème d'une manière suffisamment générale et souple, qui offre un choix de méthodes de résolution des équations d'équilibre en présence du contact [1], [2], [3].

II. Formulation de contact

Pour étudier la cinématique du contact dans le repère du contacteur A , on considère un point P^α de son contour Γ_A au voisinage de l'obstacle B . La projection orthogonale du point P^α sur la surface de l'obstacle Γ_B définit au point P' , qui sera l'origine du repère local $(\mathbf{t}_1, \mathbf{n}, \mathbf{t}_2)$ lié à l'obstacle. Le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté vers l'extérieur de Γ_B est normal à sa surface en P' . Les deux vecteurs unitaires $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ sont orthogonaux à $\mathbf{n}$ "Figure 1."

Les équations d'équilibre des corps en contact sont exprimées dans le repère global XYZ . Le déplacement relatif du contacteur par rapport à l'obstacle est défini par :

$$\mathbf{U} = \Delta \mathbf{X}_{P'} - \Delta \mathbf{X}_{P^\alpha} \quad (1)$$

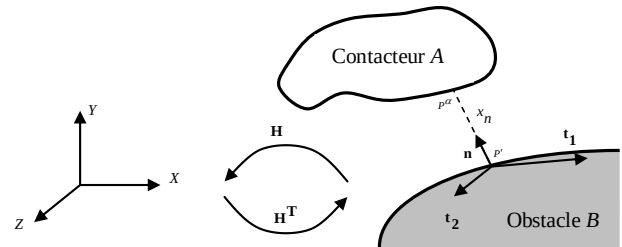


Figure 1. Géométrie du problème.

où $\Delta \mathbf{X}_{P^\alpha}$ et $\Delta \mathbf{X}_{P'}$ sont les déplacements globaux du point de contact et de sa projection sur la surface de l'obstacle.

Il existe un opérateur linéaire $\mathbf{H}$ qui permet de transformer les composantes des déplacements relatifs globaux dans le repère local.

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}(\mathbf{X})^T \mathbf{U}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{r} \quad (2)$$

II.1. Lois de contact unilatéral

Au cours de l'évolution de contact, il n'y a pas de pénétration des corps l'un dans l'autre. Cette condition est exprimée par :

$$x_n \geq 0 \quad (3)$$

C'est une condition de contact statique qui exprime que chaque point du corps élastique en contact ne doit pas coller au solide rigide. Cette condition est exprimée par :

$$r_n \geq 0 \quad (4)$$

Lorsque le point n'est pas en contact, sa réaction normale est nulle. Cette condition est définie par :

$$x_n r_n = 0 \quad (5)$$

Ces conditions peuvent être résumées sous la forme des *conditions de Signorini*.

$$x_n \geq 0, r_n \geq 0, x_n r_n = 0 \quad (6)$$

II.2. Loi de frottement

Une loi de frottement est généralement caractérisée par un critère d'adhérence, une règle de glissement est une condition de complémentarité [4]. Le modèle de *Coulomb* s'écrit :

$$\begin{cases} \| \mathbf{f}_t \| \leq \mu \| \mathbf{f}_n \| \\ \| \mathbf{f}_t \| < \mu \| \mathbf{f}_n \| \Rightarrow \mathbf{v}_g = 0 \\ \| \mathbf{f}_t \| = -\mu \| \mathbf{f}_n \| \mathbf{v}_g / \| \mathbf{v}_g \| \end{cases} \quad (7)$$

II.3. Equations des écarts entre les nœuds de contact

On propose une méthode de flexibilité qui est appropriée pour résoudre ce problème localement non linéaire. Quand le contact se produit, n'importe quelle paire de nœuds de contact peut être dans trois états suivant – *non contact*, *adhérence* ou *glissement*. L'équation complémentaire d'équilibre des deux corps Ω_1 et Ω_2 est :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{R} \quad (8)$$

où $\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité, $\mathbf{U}$ est le vecteur de déplacement des nœuds de Ω_1 et Ω_2 , $\mathbf{F}_{ext}$ est le vecteur des charges extérieures et $\mathbf{R}$ est le vecteur des forces de contact. Le déplacement dû aux forces de contact peut être exprimé comme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_{ext} \quad (9)$$

et

$$\mathbf{U}^T = \left\langle \mathbf{U}_1^{*T} \quad \mathbf{U}_1^T \quad \mathbf{U}_2^{*T} \quad \mathbf{U}_2^T \right\rangle \quad (10)$$

avec $\mathbf{U}_1$ est le vecteur de déplacements des nœuds de Ω_1 candidats au contact (respectivement $\mathbf{U}_2$), $\mathbf{U}_1^*$ est le vecteur de déplacements des autres nœuds de Ω_1 (respectivement $\mathbf{U}_2^*$). Le vecteur des *écarts* est défini par :

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 + \Delta\mathbf{X}_0 \quad (11)$$

où $\Delta\mathbf{X}_0$ est le vecteur initial des écarts. Le vecteur des écarts peut être exprimé de la manière suivante :

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{R} + \mathbf{X}_{free} + \Delta\mathbf{X}_0 \quad (12)$$

avec $\mathbf{X}_{lib}$ est le vecteur des écarts résultant des charges extérieures et $\mathbf{W}$ est la matrice de flexibilité. Le processus itératif est procédé jusqu'à tous les conditions de contact sont satisfaites et alors toutes les forces de contact $\mathbf{R}$ sont obtenues. Nous introduisons leurs valeurs dans (8), on obtiendra le champ de déplacement.

II.4. Calcul de la matrice de flexibilité

La méthode de résolution des inégalités de contact et de frottement que nous avons choisi, nécessite l'utilisation de la matrice de flexibilité qui exprime les déplacements des nœuds du maillage dus à des forces unitaires appliquées aux nœuds candidats au contact. Cette matrice a la forme suivante :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{11} & \mathbf{w}^{12} & \dots & \mathbf{w}^{1n} \\ \mathbf{w}^{21} & \mathbf{w}^{22} & \dots & \mathbf{w}^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}^{n1} & \mathbf{w}^{n2} & \dots & \mathbf{w}^{nn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

où les matrices $\mathbf{w}^{\alpha\beta}$ sont définies (2x2) en 2D et (3x3) en 3D, expriment l'influence des modifications des réactions de contact $\mathbf{r}^\beta$ au nœud P^β , sur le déplacement du point candidat P^α dans son repère local. La colonne j de la matrice de flexibilité est obtenue par :

$$\mathbf{w}_j^\alpha = \mathbf{H}^{\alpha T} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{I}^\alpha) \quad (14)$$

avec $\mathbf{I}^\alpha$ est le vecteur correspond à une force unitaire dans l'une des directions $\mathbf{t}$ ou $\mathbf{n}$ dans le repère local de P^α [5].

III. Formulation de la méthode asymptotique

L'utilisation de la méthode asymptotique nous permet de résoudre des équations différentielles du type [6], [7], [8] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (15)$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité. L'expression exacte du déplacement en série s'écrit comme :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{u}_j t^j = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 t + \mathbf{u}_2 t^2 + \dots + \mathbf{u}_p t^p + \dots \quad (16)$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_j$ sont inconnus, indépendants du temps qui servent à la construction des polynômes d'ordre p . Nous pouvons à l'aide de l'équation (16), obtenir l'équation de la vitesse et accélération.

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j \mathbf{u}_j t^{j-1}, \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) \mathbf{u}_j t^{j-2} \quad (17)$$

A l'instant initial $t = 0$, nous permettons d'obtenir les vecteurs contenant les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \mathbf{u}_1 \quad (18)$$

Le vecteur des forces nodales doit aussi être converti en série entière, d'où :

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{F}_j t^j \quad (19)$$

En substituant (16), (17) et (19) dans (15) et appliquons le principe des travaux virtuels, nous pouvons obtenir récursivement les vecteurs de coefficients :

$$\mathbf{u}_p = \frac{1}{p(p-1)} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_{p-2} - (p-1) \mathbf{C} \mathbf{u}_{p-1} - \mathbf{K} \mathbf{u}_{p-2}) \quad (20)$$

Nous ne pouvons pas calculer tous les termes de la série $\mathbf{u}(t)$, nous approchons la solution par la série tronquée à un ordre p . Nous pouvons maintenant assembler la solution sous forme de polynôme [9].

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^p \mathbf{u}_j t^j = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 t + \mathbf{u}_2 t^2 + \dots + \mathbf{u}_p t^p \quad (21)$$

En reportant (21) dans les équations d'équilibre, nous obtenons le résidu :

$$\mathbf{Res}(t) = \mathbf{Res}_{p-1} t^{p-1} + \mathbf{Res}_p t^p - \sum_{j=p+1}^{\infty} \mathbf{F}_j t^j \quad (22)$$

III.1. Critère de convergence

L'utilisation d'une série limitée nous oblige à utiliser le polynôme dans un certain rayon, appeler *rayon de convergence*. L'objectif de la présente section est de déterminer la limite au delà de laquelle la série diverge

[10], [11]. Nous appellerons cette limite le *temps critique* t_{crit} .

$$\frac{\|\mathbf{u}(t_{crit}^i + \tau)_{Ordrep} - \mathbf{u}(t_{crit}^i + \tau)_{Ordrep-1}\|}{\|\mathbf{u}(t_{crit}^i + \tau)_{Ordrep} - \mathbf{u}(t_{crit}^i)\|} \leq \varepsilon \quad (23)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on réduit (23) comme :

$$\frac{\|\mathbf{u}_p\| \tau^p}{\|\mathbf{u}_1\| \tau} \leq \varepsilon \quad (24)$$

Si $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_p$ et ε sont connus, nous pouvons déterminer le temps critique t_{crit}^{i+1} , d'où :

$$t_{crit}^{i+1} = \left(\varepsilon \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \|\mathbf{u}_1\| \neq 0, p \neq 1 \quad (25)$$

Lorsque la vitesse initiale est nulle, nous devons donc utiliser le vecteur $\mathbf{u}_2$ et réajuster (25) à cette contrainte [12].

$$t_{crit}^{i+1} = \left(\varepsilon \frac{\|\mathbf{u}_2\|}{\|\mathbf{u}_p\|} \right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad p \neq 2 \quad (26)$$

IV. Algorithme de résolution

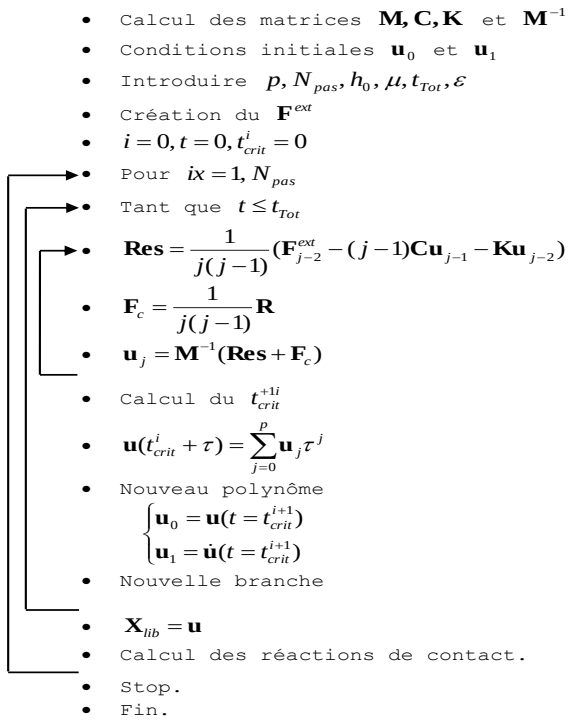


Figure 2. Algorithme de résolution.

V. Application

Un corps élastique candidat d'entrer en contact avec un obstacle rigide sous l'effet d'une force de compression égale à 300 N (Fig. 3), l'écart entre les deux solides est 1 mm , le module de Young $E = 10^{-2}\text{ N/mm}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la masse volumique $\rho = 10^{-4}\text{ N/mm}^3$ [13], [14].

Le corps déformable est discrétisé par 16 éléments, la surface de contact est constituée de 5 nœuds. Nous choisissons un élément quadratique à 4 nœuds "Figure 3."

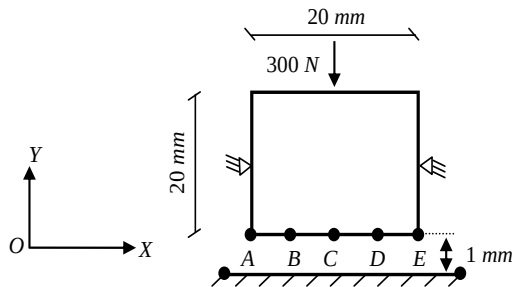


Figure 3. Corps élastique/Obstacle rigide.

- Coefficient de frottement $\mu = 0$

Le nœud C entre en premier lieu en contact avec l'obstacle puis il reste en état d'adhérence. Cela se traduit par un déplacement tangentiel nul et une réaction normale positive "Figure 4. (a)", "Figure 4. (b)".

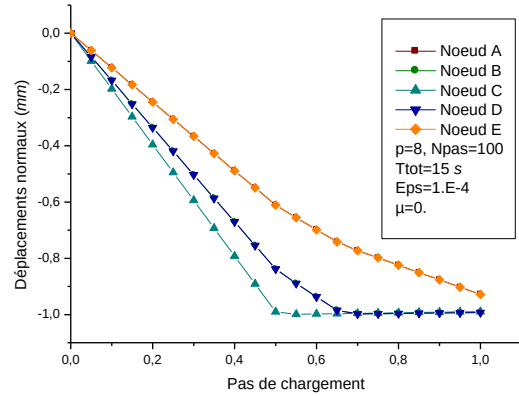


Figure 4. (a). Pas de chargement/Déplacements normaux.

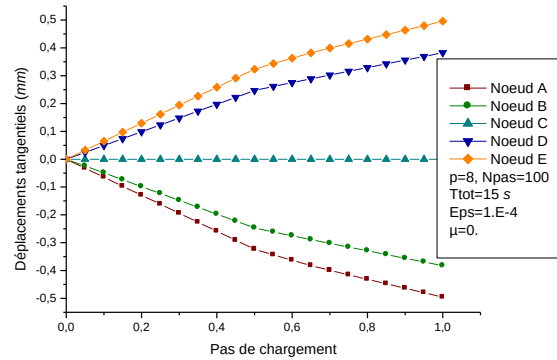


Figure 4. (b). Pas de chargement/Déplacements tangentiels.

Les nœuds B et D rentrent en contact et glissent sur l'obstacle cela se traduit que leurs déplacements tangentiels sont non constants et leurs réactions normales sont positives. Les nœuds A et E sont libres, c-à-d que leurs réactions normales sont nulles, ce qui signifie que les conditions de Signorini sont vérifiées. Les réactions tangentielles pour tous les nœuds sont nulles suite au coefficient de frottement nul, ce qui vérifie la loi de Coulomb. Par raison de symétrie, nous avons pour les deux nœuds B et D des déplacements normaux et réactions normales égaux, ainsi que des déplacements tangentiels de même valeur mais de sens opposé. D'une façon analogue pour les nœuds A et E.

- Coefficient de frottement $\mu = 0,3$

Suite aux interprétations précédentes, nous remarquerons clairement concernant les nœuds B et D que les déplacements tangentiels deviennent constants, autrement dit, que leurs vitesses de glissement sont nuls, c-à-d que l'état d'adhérence est vérifié "Figure 5. (a)".

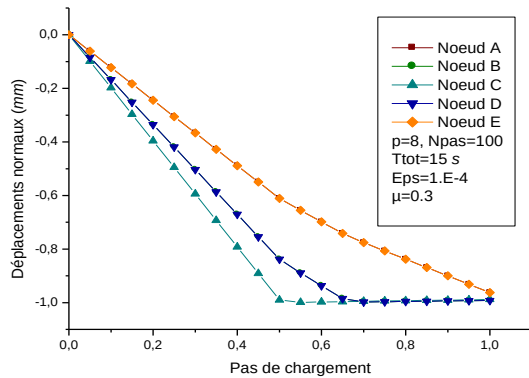


Figure 5. (a). Pas de chargement/Déplacements normaux.

Or, les réactions tangentielles vérifient l'inéquation $\|\mathbf{r}_t\| \leq \mu \|\mathbf{r}_n\|$, on peut dire que ces dernières incluent intégralement dans le cône de *Coulomb* "Figure 5. (b)".

Finalement, il faut signaler qu'aucune pénétration n'a été détectée et la stabilité de notre algorithme est performante.

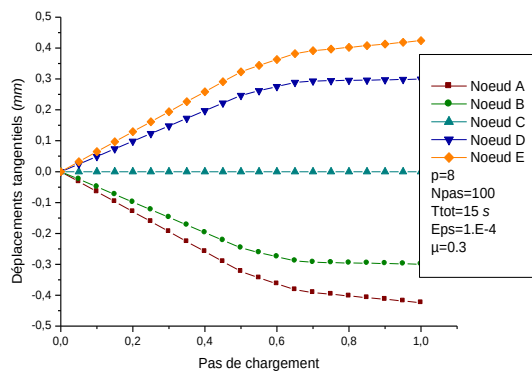


Figure 5. (b). Pas de chargement/Déplacements tangentiels.

VI. Conclusion

Notre schéma de résolution des problèmes de contact avec frottement étant acceptable. Les lois de contact unilatéral et la loi de frottement peuvent aussi facilement injecter en combinaison avec la méthode asymptotique. Chaque itération de contact fait une résolution du système réduit. La méthode asymptotique permet de déterminer les solutions du problème avec un nombre réduit de polynômes, ce qui correspond à un gain important de calcul. D'autre part, l'application de la méthode asymptotique aux problèmes de contact avec frottement nous a permis de développer les forces de contact en séries entières et d'appliquer la technique de perturbation. Par conséquent, le pas de chargement varie de manière adaptative avec le temps critique le long de la branche solution. Cependant, la précision des résultats dépend de la tolérance et de l'ordre du polynôme.

Références

- [1] M. Tarfaoui, "Modélisation des problèmes de contact avec frottement par la méthode asymptotique", Thèse de Magistère, Université de Bechar, Algérie, 2008.
- [2] D. H. Nguyen, G. De Saxce, "Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique", *Comput. Structures*, 11, pp. 55 - 67, 1980.
- [3] C. Zammali, "Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact - impact", Thèse de Doctorat, Université de Paris, 2005.
- [4] Z. Q. Feng, G. De Saxce, "The bipotential method - A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms", *Int. J. Math. and Compt. Modelling on Contact Mechanics*, Special issue, Recent Advance in Contact Mechanics, 1996.
- [5] J. C. Simo, P. Wriggers, R. L. Taylor, "A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, pp. 163 - 180, 1985.
- [6] V. B. Zelentsov, "An asymptotic method of solving transient dynamic contact problems of the theory of elasticity for a strip", *J. Appl. Maths. Mech.*, Vol. 66, N° 5, pp. 841 - 855, 2002.
- [7] N. Berrahma-Chekroun, "Etude de différents types de chargements pour des problèmes en dynamique linéaire résolus par la méthode asymptotique", Thèse de Maitre es Science (M. Sc.), Université de Laval, Canada, 1999.
- [8] H. Zahrouni, "Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations", Thèse de Doctorat, Université de Metz, France, 1998.
- [9] V. M. Aleksandrov, D. A. Posharski, "An asymptotic method in contact problems", *J. Appl. Maths. Mech.*, Vol. 63, N° 2, pp. 283 - 290, 1999.
- [10] A. Elhage Hussein, "Modélisation des problèmes de contact par une méthode asymptotique", Thèse de Doctorat, Université de Metz, France, 1998.
- [11] B. Cochelin, "A path-following technique via an asymptotic numerical method", *Computers & Structures*, 53(5), pp. 1181 - 1192, 1994.
- [12] E. Dionne, "Méthode asymptotique appliquée à la résolution temporelle des équations dynamiques linéaires", Thèse de Maitre es Science (M. Sc.), Université de Laval, Canada, 1997.
- [13] M. Jean, G. Touzot, "Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems", *J. Theo. Appl. Mech.*, 7, pp. 145 - 160, 1988.
- [14] Z. Q. Feng, "Contribution à la modélisation des problèmes non linéaires - contact, plasticité et endommagement", Thèse de Doctorat, UTC, France, 1991.

Journal of Scientific Research

**P.O.Box 417 route de Kenadsa
08000 Bechar - ALGERIA
Tel: +213 (0) 49 81 90 24
Fax: +213 (0) 49 81 52 44
Editorial mail: jrs.bechar@gmail.com
Submission mail: submission.bechar@gmail.com
Web: <http://www2.univ-bechar.dz/jrs/>**
