مدى فهم طلبة المدرسة العليا للأساتذة للسيرورات غير المنتهية الممثلة للعدد الأصم: حالة متتاليات هيرون.

The extent to which high school students understand the infinite processes representing irrational number: the case of Heron's sequences.

ياسين مفتاح[1،*]، محمد حازي[2]

[2،1] مخبر تعليمية العلوم، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة(الجزائر)،meftah_yacine@univ-khenchela.dz

تاريخ الاستلام:31-01-2026 تاريخ القبول: 21-09-2026 تاريخ النشر: 30-09-2026

ملخص: يتضمن المقال دراسة مدى امتلاك طلبة السنة الرابعة شعبة رياضيات لمفهوم السيرورات غير المنتهية الممثلة للعدد الصماء. على وجه التحديد، ركزنا على قياس تأثير فهم متتاليات هيرون التراجعية التي تؤول نهايتها إلى عدد أصم في إجابات المشاركين فيما يتعلق بأصمية عدد. كخلفية نظرية، استعملنا برنامج التيمس المتقدم 2015 لتصنيف المستويات المعرفية ولتسهيل هذا التصنيف ركزنا على نظرية مستويات توظيف المعرفة. تبنينا في هذه الدراسة المنهج الوصفي التحليلي كونه الأنسب لدراسة الأسئلة المفتوحة والنصف المفتوحة المتضمَنة في النشاطين المقدمين للمشاركين في الدراسة. أظهرت نتائج الدراسة الحالية نسبا متباعدة بين المستويات المعرفية الثلاث: معرفة، تطبيق، واستدلال، مع ضعف واضح في مستوى الاستدلال، مما يدل على وجود صعوبات لدى المشاركين فيما يخص تناول العدد الأصم كسيروة غير منتهية ممثلة في متتاليات هيرون التراجعية. كتوصية عامة نقترح تعزيز المفاهيم والمعارف المتعلقة بمختلف التمثيلات الممثلة للأعداد الصماء، بالخصوص التركيز على السيرورات غير المنتهية التي تؤول نهايتها إلى عدد أصم.

الكلمات المفتاحية: عدد أصم؛ مستويات المعرفة؛ سيرورة غير منتهية؛ التقارب؛ متتالية تراجعية.

Abstract: The article includes a study on the extent to which fourth-year mathematics students possess the concept of infinite processes representing irrational numbers. Specifically, we focused on measuring the impact of understanding Heron's recurrent sequences, which converge to an irrational number, on participants' responses regarding the irrationality of a number. As a theoretical background, we used the Advanced TIMSS 2015 program to classify tasks cognitive levels, and to facilitate this classification, we focused on the theory of levels of knowledge use. In this study, we adopted a descriptive-analytical approach, as it is the most suitable for examining the open and semi-open questions included in the two activities presented to the study participants. The previous results show varying proportions across the three cognitive levels—knowledge, application, and reasoning—with a clear weakness in the latter, indicating difficulties among participants in addressing irrational numbers as infinite processes represented in Heron's recurrent sequences. As a general recommendation, we suggest strengthening concepts and knowledge related to the various representations of irrational numbers, particularly focusing on infinite processes that converge to an irrational number.

Keywords: irrational number; levels of knowledge; infinite process; convergence; recurrent sequences.

*المؤلف المراسل:

1-مقدمة

إنّ اكتساب الأعداد الصمّاء مرتبط بكيفية تمثيلها، لكنّ استعمال هذه التمثيلات قد يساعد أو يعيق فهم المتعلّمين. للعدد الأصم عدّة تمثيلات، نذكر منها التمثيل بالنشور العشرية، بالكسور المستمرّة، بالنظام الثنائي، بالإنشاءات الهندسية...الخ.

من السهل على المتعلمين استيعاب مفهوم العدد الناطق ككائن لعدة اعتبارات منها تميزه كامتداد منطقي للعدد الطبيعي والعشري وبتمثيله الواضح بكتابة كسرية أو بنشر عشري دوري، إذ يُعرف في الكتب المدرسية للتعليم الثانوي بالعدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم. خلافا للعدد الأصم، حيث كان ظهوره فاصلا بين الحساب ودراسة المقادير، كما أنّ تعريفه كنقيض للعدد الناطق يتميز بغياب تمثيل واضح له. بالإضافة الى أن الظهور التاريخي لهذه الأعداد عرف نوعا من الفجائية والتشتت والتباين في السياق: ظهرت الأعداد الجذرية (les radicaux) كأعداد صماء في نسق هندسي من خلال المقادير غير قابلة للقياس ونظرية فيتاغورس، أما عدد أولار (nombre d'Euler) فظهر في سياق تحليلي من خلال دراسة السلاسل العددية وأخرى في سياق حسابي بحت كالأعداد اللوغاريتمية والمثلثية ...إلخ.

1.1-الاشكالية:

لم يتم تحديد الأعداد الصماء كمجموعة إلا بعد بناء مجموعة الأعداد الحقيقية (قطوع ديديكاند ومتتاليات كوشي، ...) وهنا تم تمييز الأعداد الصماء بالأعداد الحقيقية غير الناطقة واكتسبت هيئة مجموعة أعداد تستمد جل خصائصها من مجموعة الأعداد الحقيقية. تميزت بنية هذه الأعداد بالتجريد، كما أن لها قوة المستمر وغير قابلة للعد.

حاول الرياضياتيون السيطرة على الأعداد الصماء من خلال دراستهم للأعداد الحقيقية إذ وضعوا لها عدة تصنيفات، نذكر منها:

- الأعداد الجبرية والأعداد المتسامية، فالعدد الجبري يظهر كجذر لكثيرات حدود معاملاتها صحيحة مثل الأعداد الجذرية، وعكسها الأعداد المتسامية كالعدد π والعدد e.
- أعداد صماء قابلة للإنشاء وأخرى ليست كذلك وهذا بدوره تقسيم لمجموعة الأعداد الجبرية حيث نجد بعضها قابل للإنشاء كالجذور التربيعية وغير قابلة للإنشاء كالجذور التكعيبية أو الجذور النونية الفردية.

صاحب هذا التقطع في نشأة الأعداد الصماء اختلاف في فكرة إثبات أصمية كل عدد – رغم اقتصار معظمها على شكل واحد من أشكال البرهان وهو البرهان بالخلف، وهذا يدل على قوة تجريدها وتعقد بنيتها.

يتميز تدريس الأعداد الصماء في التعليم الجامعي بتقديم هذه الأعداد كمجموعة أعداد حقيقية غير ناطقة دون تحديد جميع عناصرها. من خلال تجربتي في التعليم الجامعي تبين أن الطلبة يجدون صعوبات في التعامل مع الأعداد الصماء، وبصفة عامة الأعداد الحقيقية والمفاهيم الرياضياتية المتعلقة بها، وأشارت دراسات متعددة إلى بعض من هذه الصعوبات التي يصادفها الطلبة في اكتساب هذا المفهوم.

تتأسس معظم المفاهيم في التحليل الرياضياتي على الأعداد الحقيقية حيث تظهر أهمية استيعاب هذه الأعداد وبنيتها في تطوير التفكير الرياضياتي في مجال التحليل. تتبين من هذه الزاوية لزوم دراسة الصعوبات التي تعترض الطلبة في اكتساب مجموعة الأعداد الصماء كمركب أساسي في مجموعة الأعداد الحقيقية والوقوف على مسبباتها.

يمكن تناول الموضوع بدراسة السيرورات غير المنتهية التي أسست –على مدى تاريخ المفهوم –لظهور العدد الأصم باعتبار أن الصعوبات والحواجز التاريخية والابستمولوجية التي صاحبت ظهور المفهوم يمكن أن تساهم دراستها والوقوف على شدة مقاومتها وتأثيرها في رسو هذا المفهوم وافتكاك مكانة متينة ضمن المفاهيم الرياضياتية.

سيساهم تخصيص هذه السيرورات بالدراسة إلى تسليط الضوء على شق مهم من التحليل الرياضياتي والمساهمة في إبراز بعض الصعوبات التي تعيق أو تقلل من فهم الطلبة للعدد الأصم مرورا من هذه السيرورات التي تتدخل في إرساء عدة مفاهيم رياضياتية متعلقة بعدة ميادين رياضياتية: في التحليل الرياضياتي نجد مفهوم التقارب وفي الطوبولوجيا نجد مفهوم الكثافة وفي التحليل العددي نجد مختلف طرق التقريب كطريقة أولار وكذا الطرق المستعملة في تقدير النقطة الصامدة ...إلخ.

نزعم أن الاتجاه نحو دراسة فهم العدد الأصم من وجهة نظر تحليلية حديث ويفتح بابا عريضا نحو التوسع في الموضوع نظرا لثراء هذا الاتجاه ولتركيز الدراسات السابقة على مختلف تمثيلات وتعريفات العدد الأصم على عمومها.

كون العدد الأصم مغمور وسط هذه السيرورات المتنوعة والمتميزة بنوع من الاستقلالية والتشعب، ستحتاج كل سيرورة إلى إفرادها بدراسة مستقلة لاستقصاء عمق اكتسابها من طرف المتعلمين وإمكانية ربطها بالعدد الأصم. سنركز في هذه الدراسة على مفهوم المتتاليات كسيرورة غير منتهية تؤول نهايتها إلى عدد أصم، بالخصوص سنركز على متتاليات الجذر التربيعي (متتالية هيرون). من خلال ما سبق تظهر تساؤلات عن أي مدى يمكن قياس إدراك المتعلمين لسيرورات المتتاليات التي تؤول إلى عدد أصم؟ وكيف يمكن تمييز معارف الطلبة إزاء هذه السيرورات؟

لاحظ موناغان (Monaghan, 1986) أن الصور الذهنية للطلاب لكل من النشور العشرية الدورية وغير الدورية غالبًا ما تمثل أرقاما طبيعية تستمر إلى الأبد، نظرًا لتوسعاتها العشرية غير المنتهية.

يعتقد تال (Tall, 2013, p. 265) أن هناك صعوبات تعيق الطلبة في فهم الأعداد الصماء، فالانتقال من الأعداد الناطقة إلى الأعداد الحقيقية يظهر أنه نقطة تحول رئيسية لكثير من الطلبة. في المدرسة، يصادف الطلبة الأعداد الصماء مثل $\sqrt{2}$ وπ، ويبدؤون بإدراك أن المستقيم العددي يحتوي على أعداد غير ناطقة، رغم عدم وضوح ماهية هذه الأعداد.

لاحظ كيدرون وفينير (Kidron I. &., 1983) بأنّه يتم تصور النشور العشرية غير المنتهية عند الطلبة بأحد تقريباتها المنتهية أو ككائن ديناميكي في سيرورة غير منتهية نهاية محتملة: عند كل مرحلة يتم تحسين التقريب بعد إضافة رقم بعد أرقام الفاصلة. ميز كيدرون وفينير هذا التصور بوضع المصطلح " الادراك الدينامي للنشور العشرية غير المنتهية". بعدها، عالج كيدرون (Kidron I. , 1985) مفهوم النشور العشرية الدورية وغير الدورية في المدارس العليا للأساتذة.

ركّز أركافي (Arcavi، 1987) على تقديم وسائل تعليمية مرتبطة بتاريخ الرياضيات أثناء تصميم دروس موجّهة للأساتذة قبل وأثناء الخدمة، وجدوا أنّ أحد أسباب الغموض بين الأعداد الناطقة والصماء هو الاستعمال المشترك لتقريب العدد الناطق إلى العدد الأصم كاستعمال 3,14 أو 22/7 في حالة العدد π.

فيما يتعلق بالخلفية النظرية في نسق تعليمي، نذكر فيشبين وآخرون (Fischbein, 1995). حيث يرى أن هناك اهمال فيما يخص تدريس الأعداد الصماء وبأن " الأفكار الرياضياتية المتميزة بالتجانس والبناء المعرفي المنتظم لا تنقل بطريقة خطية للطلبة. بالتأكيد، هذه مهمة صعبة من الناحية التعليمية، ولكن يجب ألا تحيدها المناهج الدراسية ". لاحظ فيشبيين في دراسته أن المشاركين لم يتمكنوا من التمييز بين الأعداد الناطقة وغير الناطقة وكذا الأعداد الحقيقية بشكل صحيح.

بينت زاسكيس وسيروتيك (Zazkis & Sirotic, N. , 2004) كيف تؤثر التمثيلات المختلفة للعدد الأصم في إجابات المشاركين فيما يخص أصمية عدد. كما لا حظتا (Sirotic & Zazkis, 2007) عدم التجانس بين حدس المشاركين مع المعارف الرسمية والتقنية. واكدت الباحثتان أن بناء روابط متجانسة بين المعرفة الرسمية والخوارزمية والحدس والمفهوم أساسي في إدراك الأصمية. قامت (Zazkis & Sirotic, 2010) بتقصي إدراك الطلبة الأساتذة الطلبة للرابط الموجود بين النشر العشري الدوري غير المنتهي والعدد الناطق، حيث لاحظتا عدم تملك المشاركين للتكافؤ بين القضيتين. واعتبرتا ذلك "حلقة مفقودة" في إدراك الطلبة للعدد الأصم، يُعطى في المدرسة التكافؤ الموجود بين عدم وجود تمثيل على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث α عدد صحيح و b عدد صحيح غير معدوم مع النشور العشرية غير الدورية. كما أظهرت الباحثتان في هذه الدراسة الصعوبات المعترضة في ربط التمثيلات المختلفة مع هذا التكافؤ. واستنتجتا أنه يجب التنسيق بين مختلف تمثيلات العدد: تمثيل عشري أو في نظام آخر، رمزي، هندسي، كسري وأضافتا حتى الكسور المستمرة في البحث عن طبيعة عدد حقيقي.

يختلف تقديم الأعداد الصماء من بلد إلى آخر حيث تقدم في بعض البلدان من المستوى 7. يعتقد برونير (Bronner, 1997) أن النظام التعليمي الفرنسي لم يحدد العلاقة الشخصية للمعلمين فيما يخص العدد الحقيقي والجذر التربيعي بالكامل بسبب القيود المؤسسية. استعمل بونير مصطلح " الفراغ التعليمي المؤسسي" لتوضيح النقص في التوجيه المقدم للمعلمين فيما يخص كيفية الانتقال من الأعداد الناطقة إلى الأعداد الصماء. ذكر برونير كيفية ظهور الجذر التربيعي –في بعض الحلات–بميزة جبرية قوية عبر جانبه العملياتي، والتغاضي عن حضور الجذر التربيعي حالما نتساءل عن كونه عددا أصما. كما ذكر انعدام تحدي ديداكتيكي فيما يخص جانب "الأعداد الصماء الجديدة". عادة ما يظهر العدد الجذري في بعض الحالات كنوع من الكتابات وليس كعدد، وفي حالات أخرى يوجد بعض الانفتاح فيما يخص الأعداد الجديدة. تظهر النشور العشرية كأعداد مستمرة ولا تتوقف، فالعدد $\sqrt{7}$ كتابة عددية بقيمة حقيقية" حيث يمكن تقريبها ولا يمكننا معرفة كيفية كتابتها بطريقة أخرى.

لاحظ لارغييه (Larguier, 2012) أن البحث عن نوع العدد ما هو إلا مهمة رمزية في بداية التعليم الثانوي، وربط هذا التساؤل بطرح الإشكالية المتعلقة بأفضل طريقة يُكتب بها العدد.

أشار فيفييه (Vivier, 2008) إلى أن التساؤل عن كتابة العدد بقي مضمرا وأن التساؤل عن تحديد نوع العدد أصبح مشكل رياضياتي حقيقي.

في منحى التنسيق بين مختلف التمثيلات استعمل فوسكوغلو (Voskoglou. & Michael , 2013) مقاربة تحليلية معتمدة على تمثيلات مختلفة للعدد الأصم. في بداية الأمر يتم تحديد العدد الناطق من خلال تمثليه في السجلين العشري والكسري بالإضافة إلى أعداد صماء مثل العدد π، أو العدد 2,00131311311311131111113.... كما اقترحا أنشطة حول التمثيل الهندسي للأعداد الصماء. وبين أن هذا التنوع في التمثيلات يؤدي إلى فهم أعمق للأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة.

أشار غونزلاز مارتان وآخرون (González-Martín & al., 2013) إلى الطريقة التي يتم تكييف تصورات الطلبة حول العدد الأصم مع طريقة كتابته "يكون تصور الطلبة حول الأعداد الحقيقية ضعيفا على العموم عند دخولهم إلى الجامعة، بحيث لا يعطون المعنى الصحيح لبعض الأعداد مثلا $\sqrt{2}$ والعددπ مثلا، بحيث لا يعتبرون العدد π كعدد، بل كإشارة أو رمز أو وسيط من تلك الوسائط المستعملة في الرياضيات المكتوبة فهم يرونها كنوع من الكتابات".

حديثا، أشار الباحثان ديرون غيريي وتانغاي (Durand-Guerrier & Tanguay, 2016) أن الطلبة في بداية دخولهم الجامعي يمتلكون معارف محدودة عن الأعداد الحقيقية. لاحظوا أن تصورات الطلبة للأعداد مرتبط بطريقة كتابتها، ووفقا لتصورات الطلبة، فالأعداد التي لها صفة العدد الحقيقي مضمنة فقط في التمثيل العشري.

وسع كيدرون (Kidron I. , 2018) دراساته السابقة لتصبح أكثر شمولا فيما يخص بعض القضايا المتعلقة بالنشور العشرية، حيث لاحظ أن فئة قليلة من الطلبة (19%) أظهرت وعيا كافيا حول العدد الأصم كنشر عشري غير منتهي وغير دوري. ونفس النسبة تقريبا أبدت وجود هذه الأعداد في المستقيم العددي. كما لاحظ وجود خلط في تصورات بعض الطلبة حيث يدركون كون النشر العشري غير المنتهي وغير الدوري كعدد أصم إلا أنهم لا يقرون بوجود موضع لها على المستقيم العددي.

كشف الباحثان (Rizos & Adam, 2022) وجود بعض الثغرات لدى الطلاب المتعلقة بالأعداد الحقيقية وكشفا عن وجود خلط بين الأعداد الصماء وتقريبها العشري.

يعرف المجلس الوطني لأساتذة الرياضيات (NCTM, 2026)السيرورة في الرياضيات على أنها مجموعة من الإجراءات أو الأنشطة المنظمة والمتتابعة التي يستخدمها الفرد في التعامل مع مشكلات أو مفاهيم رياضية بهدف الوصول إلى فهم أو حل بعبارة أخرى، السيرورة الرياضية ليست مجرد نتيجة أو مفهوم ثابت، بل هي سلسلة من الخطوات الذهنية والمنهجية التي تنشأ أثناء ممارسة الرياضيات.

تميزت دراسات الأعداد الصماء المذكورة أعلاه بالتركيز على مختلف تمثيلاته سواء التمثيل الهندسي، الحسابي أو الجبري مهملة جانب التركيز على السيرورات غير المنتهية حيث ينتج من ممارستها والتحكم في المفاهيم المتعلقة بتلك السيرورات كالتقارب في المتتاليات والدقة أو السرعة في التقريبات...إلخ أنّ العدد الأصم كائن مغمور وسط مكونات هذه السيرورات. أما الدراسات المتعلقة بالشق التحليلي فتركزت معظمها على تمثيلات المتعلقة فيما يتعلق بالخواص الطبولوجية لمجموعة الأعداد الحقيقية بالخصوص خاصية التكملة وبعض المفاهيم في التحليل الرياضياتي المنتمية إلى حقلها المفاهيمي كتقارب متتاليات كوشي والنظريات المتعلقة بتقارب المتتاليات عموما. أظهرت دراسة تمثيلات العدد الأصم مرونة وتنوعا في بنيتها وأثارت عدة تساؤلات وتصورات تمت دراستها من أجل اختيار السبل المناسبة لتبليغها للمتعلمين، وفي المقابل تُطرح تساؤلات حول دراسة ما تقدمه السيرورات غير المنتهية في البرامج التعليمية بالجامعة لفهم العدد الأصم وفعاليتها بالنسبة لتعليم وتعلم هذه الكائنات، نبحث عن دورها من خلال محاولة الإجابة عن الأسئلة التالية:

- كيف تظهر تمثيلات المتعلمين للأعداد الصماء كنتيجة لهذه السيرورات؟

- هل يستطيع المتعلمون استيعاب مختلف الجوانب المهيكلة لهذه السيرورات: استيعاب عدم انتهائها وتقاربها، التحكم في الجانب الحسابي لها، كيفية بناء هذه السيرورات...؟
- ما هي العوائق المعترضة في فهم هذه السيرورات التي تضمن اكتسابا أمثلا للعدد الأصم؟

من خلال البحث عن أجوبة لهذه الأسئلة، قد نكتشف اتجاهات جديدة حول دور هذه السيرورات في فهم المتعلّمين للأعداد الصمّاء.

نحاول من خلال هذه الدراسة تحقيق الأهداف التالية:

- ✓ إبراز أهمية التحكم في السيرورات غير المنتهية في اكتساب مفهوم العدد الأصم وتحديد تأثيرها في فهم المتعلّمين.
- ✓ إبراز الصعوبات التي يواجهها المتعلمون في الربط بين السيرورة غير المنتهية ومفهوم العدد الأصم.

2.1-مفاهيم الدراسة:

1- مستويات المعرفة من خلال برنامج التيمس timss2015

يمثل برنامج التيمس والتيمس المتقدم أنظمة عالمية للتقويم، كان ظهورها للمرة الأولى عام 1995. تهدف هده البرامج إلى تقييم مكتسبات المتعلم في الرياضيات وفي العلوم. يتعلق الأمر في هذا العمل بدراسة وتصنيف مكتسبات طلبة الرياضيات في الجامعة فيما يخص السيرورات غير المنتهية. يقدم التيمس المتقدم معلومات عن مستوى طلبة الرياضيات، كما يستهدف المكتسبات الواجب على المتعلم اكتسابها خلال نهاية السداسي الأول من السنة الأولى في التعليم الجامعي.

حسب ويليام شميدت (Schmidt & Willium H., 1992) ، يمثل المنهاج الرسمي تصورا لما يجب أن يراه النظام التعليمي مدرسا، بمعنى الأهداف التعلمية المحددة للتلاميذ في النظام الوطني للتربية. في هذا المشروع، تتم أجرأة المناهج الرسمية بوصف المحتويات والأهداف المرجوة من التعلم.

يسمح هذا بإنشاء شبكة تصف بالتفصيل المحتويات الأساسية والسيرورات المعرفية المراد اختبارها في مادة التحليل بالخصوص محور المتتاليات العددية.

في المرحلة الأولى قمنا بدراسة المحتوي بالتدقيق حيث تم أجرأته إلى أهداف خاصة. كما تم تضمين هذه الشبكة بنسب من أجل تقدير ثقل كل مركبة من مركبات المحتوى وكذا مستوى تفكير في المحور المختار.

إنّ تصور هذه الشبكة يهدف إلى تحليل ومقارنة منتوج الطلبة مع التصنيف المرجعي للمحتوى المستهدف باستخدام برنامج التيمس.

1.1 تقديم جدول التخصيص تيمس المتقدم للمتتاليات

يمثل جدول التخصيص لبرنامج التيمس المتقدم (TIMSS-ADV) أداة تساعد لاختيار الأسئلة المتعلقة بتقويم المكتسبات. فهو يصنف مجموعة المحتويات المفاهيمية والمهارات والسيرورات المعرفية المناسبة لمنهاج ويظهر درجة أهميتها ممثلة في نسبة، كما تسمح بالتحقق من الانسجام بين محتوى الاستبيان والتعلمات المختارة في إطار المنهاج.

يتضمن البعد المعرفي في الرياضيات لمنهاج معطى سيرورات التفكير التي من المفترض أن يطورها التلاميذ. يصف البعد المعرفي لبرنامج التيمس المتقدم مجموعة المهارات والسيرورات المعرفية المستهدفة

من طرف تعلمات منهاج الرياضيات المختار. يتضمن هذا البعد ثلاثة مستويات معرفية: "تعرف" و"تطبيق" و"استدلال". يغطي كل مستوى معرفي مجموعة من السيرورات أو المهارات المعرفية.

1.1-1 المستوى المعرفي "معرفة"

يشير المستوى المعرفي "تعرف" إلى معارف المتعلمين للأفعال، المفاهيم والإجراءات الرياضياتية التي تشكل أساسا للتفكير الرياضياتي. حسب بودين (Bodin, 2010) يتعلق الأمر بمعرفة التعبير، التحديد، التعرف، والتطبيق "تلقائيا". تتمثل السيرورات المعرفية الأساسية لهذا في "تذكير" و"معرفة" و" حساب" و"انتقاء معلومة"، "استخراج/إبراز". حسب ميليس وآخرون (mullis & martin, 2015) لا يتطلب هذا المستوى المعرفي مكتسبات سابقة. يتعلق الأمر بالإجابة عن السؤال الرياضياتي مباشرة وبشكل آني باستخدام المحتويات والطرق التي تعلمها التلميذ في القسم. تتمثل السيرورات والمهارات المعرفية لهذا المستوى في: "تذكير" و"معرفة" و" حساب" و"استخراج". يظهر الجدول أدناه مختلف المهارات التي يتضمنها المستوى المعرفي "معرفة".

جدول (1) جدول يبين السيرورات المعرفية للمستوى "معرفة".

المستوى المعرفي	السيرورة المعرفية	الوصف
المستوى "معرفة" **يتعلق بقدرة التلاميذ على التذكر والتعرف على الأفعال والإجراءات والمفاهيم الضرورية لأساس رياضياتي متين.**	تذكر	يتذكر تعريف المتتاليات ومختلف تمثيلاتها. يتذكر مجموعتي الأعداد الطبيعية والحقيقية وخواصهما.
	تعرف	يتعرف على المتتاليات المحدودة، الرتيبة، المتقاربة أو المتباعدة. يُعرف النهايات ومتتالية كوشي، المتتالية المستخرجة والتراجعية.
	حساب	حساب نهاية متتالية بسيطة. حساب الفرق بين حدين متتاليين لدراسة الرتابة.
	استخراج	استخراج متتالية جزئية من متتالية معطاة.

1.1-2 المستوى "تطبيق"

يعود هذا المستوى المعرفي إلى تطبيق الرياضيات في مشكلات ثابتة ومألوفة لدى المتعلم. حسب الباحث (Bodin, 2010) تتطلب معالجة الوضعيات في هذا المستوى أكثر من خطوة للإثبات أو لتطبيق الإجراءات. تتمثل السيرورات الأساسية لهذا المستوى المعرفي في: "تحديد/اختيار"، "تمثيل/محاكاة"، "تنفيذ/تحقيق".

تُحمل الأسئلة المنوطة بهذا المستوى المعرفي على استعمال المعارف كأدوات تطبيق وحل مشاكل مألوفة ومعتادة، كما تتطلب إدراكا مسبقا من جهة التلميذ. في خطوات الحل، يجب على التلميذ تحقيق تحويلات بسيطة ومكافئة لصياغة المسألة، أو تحقيق تبديل للإطار أو السجل. يمكن أن تمثل هذه الوضعيات مشكلات واقعية أو رياضياتية بحتة. فالمتعلم مدعو لتفعيل معارفه وإجراءاته من أجل حل المشكل الذي لا يكون حله آنيا. يُظهر الجدول أدناه مختلف المهارات التي يتضمنها المستوى المعرفي "تطبيق".

جدول (2) جدول يبين السيرورات المعرفية للمستوى "تطبيق".

المستوى المعرفي	السيرورة المعرفية	الوصف
المستوى "تطبيق"	تحديد	تطبيق خواص المتتاليات المتقاربة. تحديد الطريقة والاجراء المناسب لحساب نهاية متتالية.
يركز على استعمال المعارف من أجل نمذجة وتنفيذ استراتيجيات لغرض حل المشكل.	تمثيل/ نمذجة	استغلال تعريف نهاية متتالية لمعرفة ما إذا كانت المتتالية متناهية في الصغر أو غير منتهية. توظيف العلاقة بين المتتاليات المتقاربات ومتتالية كوشي.
	تنفيذ	دراسة متتالية تراجعية بسيطة بتنفيذ طرائق مألوفة. استعمال العمليات على النهايات لاستنتاج نهاية متتالية. يستعمل المنطق المطلوب في البرهان بالتدريج.

3-1.1 المستوى "استدلال"

حسب بودن (Bodin, 2010) يستدعي الاستدلال تحليلا قبليا، تجربة وتجميع القرائن. فالأمر لا يتعلق بتكهن أو التعرف على أفعال، إجراءات أو نظريات وإنما يتعلق بإنتاج فرضيات واتباع إجراءات نوعية مركزة على التفكير والتجديد. حسب ميليس (mullis & martin, 2015)، فإن الاستدلال يتجاوز حل المسائل الروتينية ليشمل وضعيات غير مألوفة، ووضعيات مركبة ومسائل ذات خطوات متعددة. تكون الأسئلة والمسائل التي تتطلب هذا المستوى المعرفي معقدة وغير مألوفة بالنسبة للتلميذ، حيث تجره إلى استخدام جملة من الخطوات والعمليات قبل الوصول للحل. تتمثل السيرورات المعرفية للمستوى استدلال في: "تحليل"، "تركيب/دمج"،" تقييم"، "استنتاج"، "تبرير" و"تعميم".

يظهر الجدول أدناه مختلف المهارات التي يتضمنها المستوى المعرفي "استدلال".

جدول (3) جدول يبين السيرورات المعرفية للمستوى "استدلال".

المستوى المعرفي	السيرورة المعرفية	الوصف
المستوى "استدلال"	تحليل	تحديد عناصر المشكل والمعلومات والإجراءات والاستراتيجيات اللازمة لحل المشكل.
يتضمن التحليل والتركيب والتعميم والتبرير بالحجج الرياضياتية والدليل. عادة ما تكون الوضعيات التي تتطلب استدلالا غير معروفة أو معقدة.	دمج/ تركيب	مقارنة عدة متتاليات واستنتاج خواص منطقية. استعمال خاصية التدريج بطريقة صحيحة.
	تقييم	وجاهة استراتيجية المتتاليات المستخرجات من متتالية كحل بديل لإثبات تباعدها.
	استخلاص نتائج	استخلاص الطبيعة العامة لمتتالية انطلاقا من بعض مميزاتها.
	تبرير	تبرير تقارب متتالية محدودة ورتيبة.

2.1- جدول التخصيص للتقويم "رياضيات" TMSS-ADV 2015

قمنا في هذه المرحلة بقياس ثقل كل مستوى معرفي في محور المتتاليات العددية، وذلك حسب السيرورات المعرفية المنبثقة عن الأهداف البيداغوجية المرتبطة بهذا المحور في برنامج السنة أولى من التعليم الجامعي. حيث تم حساب هذه النسب على أساس عدد السيرورات المعرفية اللازمة لاكتساب مفهوم المتتاليات العددية والتي يفترض أنها تغطي النشاط الرياضياتي المتأصل في هذا المحور. يُمثل كل مستوى معرفي بنسبة تترجم النشاط الرياضياتي المراد تقييم مخرجاته. لخصنا النتائج في الجدول التالي حيث أطلق عليه خبراء التيمس المتقدم تسمية "جدول التخصيص".

جدول (4) جدول التخصيص لمحور المتتاليات العددية.

المحتوى المُدرّس	المستويات المعرفية			
المتتاليات العددية	عدد الأهداف	معرفة	تطبيق	استدلال
	16	07	07	06
الثقل ممثلا بـ %	%100	%35	%35	%30
الثقل المقترح من التيمس المتقدم 2015	%100	%35	%35	%30

2-الطريقة والأدوات:

1.2-تقديم المشكل وتحليله وفق نموذج التيمس.

من أجل دراسة اكتساب الطلبة لسيرورة غير منتهية تؤول نهايتها إلى عدد أصم قمنا بتصميم النشاطين التاليين:

النشاط الأول

شرح هيرو الإسكندري Hero of Alexandria (عاش في منتصف القرن الأول ميلادي) في كتابه الموسوم المترية " مقاربته لحساب قيم مقربة للعدد $\sqrt{720}$، وهذا ما ذكره:

" بما أن 720 ليس له ضلع ناطق، فيمكننا الحصول على ضلعه بفارق بسيط كما يلي. بما أن المربع التام الذي يلي 720 هو 729 حيث طول ضلعة 27، نقسم 720 على 27، فنتحصل على26 وثلثين. نضيف 27، فنحصل على 53 وثلثين، ثم نأخذ نصفها فتكون النتيجة $26\ 2'\ 3'$. سيكون طول ضلع 720 قريبا جدا من $26\ 2'\ 3'$. بالفعل، فلو ضربنا العدد $26\ 2'\ 3'$ في نفسه، سيكون الحاصل $720\ 36'$ حيث يظهر الفرق هو $36'$. إذا أردنا جعل الفارق أقل من $36'$، سنأخذ $720\ 36'$ بدل 729، ونتبع نفس الاجراء، سنجد أن الفارق أقل بكثير من $36'$ ".

.(Irby-Massie & Keyser, P. T., 2002)

الأسئلة

1. ترجم النص رياضياتيا، حيث أن الترميز $a\ b'c'$ في النص يعني $a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.
2. أوجد القيمة الكسرية لطول ضلع المربع في المرحلة الثانية، ثمّ قيمته المقربة إلى 10^{-8} في المرحلة الثالثة.
3. هل يمكن تعميم هذه الخوارزمية من أجل كل مرحلة n، حيث n عدد الطبيعي؟
4. هل يمكن تطبيق الخوارزمية باستبدال العدد $\sqrt{720}$ بعدد آخر؟ برر جوابك.

النشاط الثاني

ليكن a عددا ناطقا موجبا، نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{Q}_*^+ \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \end{cases}$$

أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية(u_n) .

ب- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

ج- يزعم أحدهم أنّه" إن كانت المتتالية ناطقة ومتقاربة فإنّ نهايتها ستكون عددا ناطقا".

- ما حكمك على هذا الزعم؟

د- نضع في المتتالية (u_n) : $a = \frac{338}{242}$ و $u_0 = 1.2$.

- هل يمكنك تخمين نهاية المتتالية (u_n) بحساب عدد من حدودها؟
- بيّن صحة تخمينك.

1.1.2 تحليل المهام بناءً على مستويات توظيف المعرفة (NMFC)

يصاغ كل هدف بطريقة تحدد نوع المهام المستهدفة في النشاط والتي يجب على المتعلم تحقيقها. نتبنى التمييز الذي أحدثه أ. روبير (Robert A., 1998) حيث يربط بين المهام والنشاط الرياضياتي. حسب أ.روبير *"ترتبط المهام بنص التمرين (أنشطة، مسائل)، فهي تأخذ التوظيف بعين الاعتبار وهي موصوفة بشكل رياضياتي. يكون النشاط مرتبطا بما يفعله التلاميذ من أجل حل مهمة"*

من اجل السير الحسن لهذا التحليل، سنركز على مقاربة طورها ألين روبيير (Robert A., 1998) من أجل دعم تحليل المحتوى التعليمي في الرياضيات. تناول هذه المقاربة من طرف إيريك روديتي وفرنك صال (Roditi & Salles, 2015) من أجل تقويم برنامج PISA 2012 ثم أدخلها فرنك صال (Salles, 2017) كأداة جديدة لتحليل برنامج التيمس المتقدم. إنها مقاربة ترتكز على تحليل محتوى نصوص المهام الرياضياتية بهدف تحديد المستوى المهيمن على توظيف المعارف التي تدعم نشاط التلميذ والتي يمكن استهدافها بمهمة.

نبتغي من هذا التحليل تحديد مستوى توظيف المعارف المرفقة بكل هدف بيداغوجي بهدف إعادة إنشاء جدول التخصيص. سوف نقوم بعرض هذه المستويات المختلفة كما عرفها ألين روبيير وعمل عليها ايريك روديتي وفرانك صال.

المستوى 1: التوظيف المباشر لإجراء (المستوى التقني عند أ.روبيير).

حسب روديتي وزملاؤه، تهدف الأسئلة في هذا المستوى إلى إنجاز مهام شائعة بتنفيذ إجراءات مقترحة من النص ومفترض أنها تقنية بالنسبة إليه. يُجمّع هذا المستوى من التوظيف الأسئلة التي تستهدف النجاح في تطبيقات بسيطة.

المستوى 2: توظيف إجراء مع تكييف النص (مستوى المعارف القابلة للتجنيد حسب أ.روبيير).

حسب إريك روديتي فإن أسئلة هذا المستوى تتجاوز النجاح في تطبيقات بسيطة بل تحتاج أن يكيّف أو يحول التلميذ النص أو المعطيات قبل أن يطبق معارفه. يمكن أن تستهدف هذه التحويلات معلومات مستخرجة من النص أو تغيير الإطار أو سجل التمثيل أو زاوية النظر للكائنات الرياضياتية وحتى العلاقات بين هذه الكائنات.

المستوى 3: توظيف إجراء مع ادخال وسيط (مستوى المعارف المتاحة حسب أ.روبيير).

حسب ألين روبيير يترجم هذا المستوى فعل معرفة حل ما هو مطروح دون تقديم إرشادات ويسعى للبحث بنفسه في مكتسباته عما يجب إدخاله. يشير هذا المستوى إلى إلمام التلاميذ بنوع من الوضعيات المرجعية المتنوعة التي يمكنها أن تكون أرضية للتجريب، تمتلك هذه الوضعيات معايير وأسئلة ونظام. على سبيل المثال القدرة على إعطاء أمثلة مضادة (ايجاد أو ابتكار)، تغيير الإطار دون اقتراح، تطبيق طرائق غير شائعة.

ترتبط هذه المستويات الثلاثة لتوظيف المعارف بمستويات المهارة في البعد المعرفي في برنامج التيمس. إن هذه المقاربة مكملة لتحليل محتوى منهجية برنامج التيمس فهي تسمح بـ

- إرفاق كل سيرورة معرفية مع البعد المعرفي.
- إرفاق كل نوع من المهام مع مستوى توظيف المعارف المرافق.
- إلحاق كل هدف بيداغوجي بالمستوى المعرفي المناسب.

2.1.2 تحليل الأنشطة

يتلخص الهدف العام من هذا النشاط في فكرتين رئيسيتين هما:

- ✓ قياس حسب المستويات المعرفية لتيمس المتقدم تحكم الطلبة في سيرورة غير منتهية وأدواتها الرياضياتية، ممثلة في متتالية ناطقة تؤول إلى عدد أصم.
- ✓ فهم إلى أي مدى يمكن للطلبة الربط بين هذه السيرورة غير المنتهية والعدد الأصم.

لتصنيف مستوى التفكير والسيرورة المعرفية المرتبطة بكل سؤال حسب برنامج التيمس وجب تحليل مهامه وفق مستويات توظيف المعرفة. وبهذا يمكن صياغة الأهداف الجزئية بكل وضوح.

حل السؤال (1):

الخطوات التي اتبعها هيرو لتقريب $\sqrt{720}$ هي:

- اختيار أقرب مربع كامل للعدد 720 وهو 729 وجذره هو 27.
- يقسم 720 على 27 ليحصل على $26 + \frac{2}{3}$.
- حساب المتوسط الحسابي للعددين 27 و $26 + \frac{2}{3}$ والنتيجة $26 + \frac{5}{6}$ بالرموز المذكورة $26\ 2'3'$.

الهدف: معرفة قدرة الطالب على تحويل نص لغوي إلى نص رياضياتي، فهو عملية تحديد أو تمثيل لقيم معطاة.

حل السؤال (2):

باستخدام الحاسبة يمكن حساب الوسط الحسابي للعددين $\left(26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$، $\frac{720}{\left(26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}$

فنجد القيمة ... 26,83281573498964، مربع هذه القيمة هي... 720,00000026

وهو بالتأكيد أدق من القيمة $720 + \frac{1}{36} = 720,027\overline{7}$.

نجد أن القيمة العشرية المقربة الى 10^{-8} هي 26,83281573

الهدف: يتطلب هذا السؤال تنفيذ خوارزمية محددة وهي خوارزمية هيرو من أجل الحصول على قيمة عددية، إذن فهو تطبيق مباشر لقواعد الحساب على الكسور للوصول إلى قيمة مضبوطة.

حل السؤال (3):

تعرف الخوارزمية على أنها طريقة تكرارية منمذجه بمتتالية تراجعية كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 27 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{720}{u_n}) \end{cases}$$

الهدف: كل سيرورة تكرارية يمكن ترجمتها إلى خوارزمية حساب والتي تعمم بدورها إلى متتالية تراجعية معرفة بحدها الأول وعلاقة تربط بين مجموعة من حدود تلك المتتالية، فهل يستطيع الطالب تذكر هذا التعريف وهل يستطيع تعميم الإجراء المذكور في النص؟

حل السؤال (4):

نعم يمكن تطبيقها على كل الأعداد الحقيقية الموجبة فالمنطق المتأصل فيها هندسي فإذا كان α تقديرا لجذر عدد s فإن $\frac{s}{\alpha}$ سيكون أيضا تقديرا لنفس العدد جذر s. إذن فالمتوسط الحسابي بينهما سيكون أقرب للقيمة الحقيقية لجذر s.

الهدف: من أجل حل هذا السؤال يتوجب معرفة صلاحية هذه الخوارزمية الرياضياتية في سياقات مختلفة كما تستدعي تحليل المنطق المرتبط بهذه الخوارزمية. فهي مهمة تستدعي تحليلا وتبريرا.

حل السؤال (أ):

تبين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2u_n}(a - {u_n}^2) = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - u_n\right)$$

لكي يثبت أن (u_n) متناقصة يكفيه استعمال البرهان بالتدريج لإثبات أن $(u_n)_{n\geq 1}$ موجبة وبالتالي فإن $\left(u_n + \sqrt{a}\right)$ موجبة كذلك، وأنّ $\sqrt{a} - u_n \leq 0$ أي أن $u_n - \sqrt{a} \geq 0$ من أجل كل $n \geq 1$.

الهدف: الهدف من هذا السؤال هو معرفة درجة تمكن الطالب من تحليل مهمة مركبة مألوفة، ثم تطبيق قواعد معروفة، يتطلب الأمر منهجية واضحة وتجاوز الحواجز المعترضة أثناء انجاز هذه المهمة.

يتذكر الطالب في هذه المرحلة قاعدة الفرق، ثم يدرس ويطبق الإشارة في مجال المتتاليات.

حل السؤال (ب):

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

يمكن استثمار كون المتتالية (u_n) متناقصة وموجبة فهي محدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

الهدف: تطبيق النظريات المتعلقة بالمتتاليات المحدودة والرتيبة.

حل السؤال (ج):

زعم أن نهاية متتالية ناطقة هي عدد ناطق خاطئ.

لأنه توجد متتاليات ناطقة شهيرة تؤول نهايتها إلى عدد أصم كمتتالية أولار $lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

قد يستبق الطالب هنا الإجابة ويحسب نهاية المتتالية السابقة ليجدها ناطقة تؤول إلى العدد $\sqrt{\alpha}$.

الهدف: يتذكر الطالب هنا المتتاليات الشهيرة ليستعملها كمثال مضاد من أجل نفي القضية المطروحة.

حل السؤال (د):

- بعد حساب الحدود الأولى للمتتالية نجد: ... $u_1 = 1.1819559228650$

$u_2 = 1.1818181898441$ ...

$u_3 = 1.1818181818181$ ...

يمكن وضع تخمين أن هذه المتتالية تتقارب نحو $1.\overline{18} = 1.1818181818181$ وهو بالتأكيد عدد ناطق.

الهدف: يهدف هذا السؤال إلى وضع تخمين لنهاية المتتالية بحساب عدد من حدودها، فالإجراءين الأساسيين هما حساب ثم استقراء.

- التأكد من صحة التخمين يكون بحساب النهاية بطريقة النقطة الصامدة

لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ مع $x > 0$.

المتتالية(u_n) متقاربة نحو العدد l . الدالةf مستمرة وموجبة تماما من أجل كل $x > 0$.

وبالتالي فالبحث عن l يؤول إلى حل المعادلة $f(l) = l$ نجد أن $l = \sqrt{a}$.

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \sqrt{a}$ بما أن $a = \frac{338}{242} = \frac{169}{121} = \left(\frac{13}{11}\right)^2$.

هذا يعني أن$1.\overline{18} = \frac{13}{11}$ $\lim_{n\to\infty}(u_n) =$. إذن فالتخمين الموضوع صادق.

الهدف: يتطلب الأمر هنا تمكن الطالب من نمذجة وربط حدود المتتالية بنهايتها، فالتحقق من صحة هذا التخمين التي يتطلب تذكرا لتعريفي العدد الناطق بتوسيعه الدوري المكافئ للتعريف بكسر مشترك

3.1.2 بناء جدول التخصيص

بعد تحليلنا للمهام المرتبطة بكل سؤال باستخدامنا لمستويات توظيف المعرفة خلصنا إلى الجدول التالي:

جدول (5) جدول التخصيص للنشاطين الأول والثاني.

النشاط	رقم السؤال	المهام التي يتضمنها	السيرورات المعرفية	المستوى المعرفي
النشاط الأول	س (1)	استخراج معلومات من النص الكتابي وتحويلها إلى نص لغوي.	استخراج	معرفة
	س (2)	تمثيل الخوارزمية في الإطار الحسابي.	تمثيل	تطبيق
	س (3)	تعميم الخوارزمية كمتتالية تراجعية من أجل تطبيقها بشكل أوسع.	تعميم	استدلال
	س (4)	تحليل متغيرات المتدخلة في سيرورة الخوارزمية وبالتالي في نتائجها.	تحليل وتركيب	استدلال
النشاط الثاني	س (أ)	يتذكر تعريف رتابة متتالية.	تذكر	معرفة
		تطبيق الفرق بين حدين متتاليين لتعيين اتجاه تغير متتالية.	تحديد	تطبيق
		يربط بين عناصر إثبات رتابة متتالية والإجراءات المنوطة بها.	دمج/تركيب	استدلال
	س(ب)	تطبيق النظريات المتعلقة بالمتتاليات المحدودة والرتيبة.	تنفيذ	تطبيق
	س (جـ)	يتذكر الخصائص الطبولوجية لمجموعة الأعداد الحقيقية.	تذكر	معرفة
		تحديد متتالية شهيرة لتفنيد الزعم.	تحديد	**تطبيق**
	س (د)	حساب الحدود الأولى لمتتالية.	حساب	معرفة
		تخمين أن هذه المتتالية تتقارب نحو العدد الناطق$1.\overline{18}$	تنفيذ	تطبيق
		استخلاص نهاية المتتالية بدمج مجموعة من الميزات.	استخلاص نتائج	استدلال

2.2-ثبات وصدق الأدوات

تحققنا من صدق الأداة بعرضها على مجموعة من الخبراء (اساتذة مختصين). قمنا بإجراء التعديلات اللازمة وفقا لملاحظاتهم، وهذا يعزز صدق الصياغة وصدق المضمون. أما ثبات الأداة فإن التصنيف المستمد

من الإطار المرجعي لبرنامج التيمس المرتكز على التحليل الوظيفي للمعرفة يضمنان ثبات الأداة، هذا التصنيف الممنهج يعطي كذلك اتساقا في النتائج.

3.2-الدراسة الأساسية

بعد التأكد من ثبات وصدق النشاطين، تم اختيار عينة الدراسة بحيث يكون مستواها المعرفي ملائما للمستوى المضمن في النشاطين. نزلنا إلى الميدان ووزعنا الأنشطة على طلبة السنة الرابعة شعبة الرياضيات، حيث كانت المدة المتاحة لحل النشاطين تقدر بـ ساعة ونصف بمرافقة أستاذين.

4.2-عينة الدراسة

شملت الدراسة 31 طالبا للسنة الرابعة شعبة رياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة خلال السداسي الثاني من السنة الجامعية 2022. تم مسح جميع أفراد العينة باستثناء طالبة واحدة تعذر استجابتها للأسئلة المقدمة في الأنشطة. لذا فالعينة المعرضة للمسح الشامل تضمنت 30 طالبا بنسبة تمثيل 97%.

5.2-منهج الدراسة

كما هو معلوم فإن منهج الدراسة مرتبط بطبيعة الموضوع. تهدف الدراسة إلى معرفة الصعوبات التعليمية المتأصلة في المتتاليات كسيرورة غير منتهية ممثلة للعدد الأصم لدى طلبة المدرسة العليا للأساتذة بالقبة. تم اختيار المنهج الوصفي التحليلي لتوفره على مقاييس دقيقة لتحليل الظاهرة المدروسة كما أنه مناسب لهذا النوع من الاستبيانات المفتوحة.

3-النتائج ومناقشتها:

بعد دراسة النتائج واستغلال الأدوات المشار إليها سابقا خلصنا إلى الجدول التالي،

جدول (5) جدول يظهر نسب النجاح في السيرورات المعرفية المتعلقة بكل سؤال.

النشاط	السؤال	عدد الطلبة الذين أنجزوا المهمة بنجاح.	نسبتهم	المستوى المعرفي
النشاط الأول	س (1)	29	% 96.9	معرفة
	س (2)	15	% 50	تطبيق
	س (3)	06	% 20	استدلال
	س (4)	09	%30	استدلال
النشاط الثاني	س (أ)	28	% 93.3	معرفة
		26	% 86.6	تطبيق
		05	% 16.9	استدلال
	س (ب)	08	% 26.6	تطبيق
	س (جـ)	08	% 26.6	معرفة
		07	% 23.3	تطبيق
	س (د)	22	% 73.3	معرفة
		12	% 40	تطبيق
		05	% 16.9	استدلال

يظهر الجدول تصنيف لإجابات الطلبة على أسئلة النشاطين حسب المستويات المعرفية المرتبطة بكل سؤال.

جدول (5) جدول يظهر نسب النجاح في المستويات المعرفية الممثلة للنشاطين (1) و(2).

المستويات المعرفية	معرفة	تطبيق	استدلال
النسبة الممثلة لكل مستوى بـ %	% 72.53	% 45.3	% 20.95

يظهر الجدول تصنيفا لإجابات الطلبة على أسئلة النشاطين حسب السيرورات المعرفية المرتكزة على برنامج التيمس. يمكننا ملاحظة التوزع المتباين في نسب المستويات المعرفية الثلاث وهذا حسب طبيعة المهام المقدمة للطلبة في النشاطين.

مستوى المعرفة

تفوق ملحوظ في هذا المستوى حيث سجلنا نسبة 72.53 % وقاربت في معظمها نسبة 90 % إلا في السؤال (جـ) حيث كانت النسبة 26.6 % وقد يفسر هذا بعدم تذكر الطلبة للمفهوم الطبولوجي لكثافة الأعداد الناطقة في مجموعة الأعداد الحقيقية: كل عدد حقيقي هو نهاية لمتتالية أعداد ناطقة. فكون مجموعة الأعداد الناطقة ليست فضاء متريا تاما تؤدي إلى المطلوب. أما النسبة العامة فهي تدل على تمكن واضح للطلبة من استرجاع المعارف الأساسية المنوطة بالمتتاليات.

مستوى التطبيق

تراوحت نسبة النجاح في المهام المعرفية المتعلقة بهذا المستوى بين 23.3 % و86.6 % وهذا يدل على وجود صعوبات نسبية في توظيف المعارف في جانبها الإجرائي. نلاحظ وجود إطراد بيّن في النسب بين كثرة تردد استعمال هذه المفاهيم في التعليم ودرجة تعقيدها، هذا ما تظهره النسبة المرتفعة في تقدير فرق حدين متتابعين لتعيين اتجاه تغير متتالية والنسبة الضعيفة لتعيين متتالية كمثال مضاد تفند خطأ الزعم المذكور، كما أن هذه الأخيرة مرتبطة بالمستوى المعرفي السابق فالطالب لا يتذكر المفهوم فكيف به بمستوى أرقى وهو تطبيقه.

مستوى الاستدلال

تظهر النتائج ضعفا واضحا في أداء الطلبة في المهام المعرفية المتعلقة بهذا المستوى حيث كانت نسبة النجاح فيه هي الأدنى، إذ لم تتجاوز النسبة الإجمالية 21 %، وكذلك كان توزيعها متجمعا على الوسط الحسابي، حيث لا تقل هذه النسب في السيرورات المعرفية عن 17 % ولم تتجاوز 30 %. يؤكد السؤالين الثالث والرابع من النشاط الأول أن الطلبة لا يستطيعون فهم سيرورة الخوارزمية المقدمة ولا تحديد الفكرة الأساسية التي تولدها، رغم وضوح النص وتدرج الأسئلة في النشاط.

تظهر المهمة الأخيرة من السؤال (أ) عدم وجود استراتيجية واضحة مبنية على التحليل والتركيب لتطبيق نظريات التقارب المتعلقة بالمتتالية المحدودة والرتيبة. كما يبين السؤال (د) أن هناك خللا واضحا متأصلا في التمييز بين الأعداد الناطقة بتمثيليها الكسري والعشري إذ يتجلى ذلك في مطابقة القيمتين العشرية في السؤال (د-2) والناطقة في السؤال (د-3)، وهو ما يؤكد نتائج الباحثتين زاسكيس وسيروتيك (Zazkis & Sirotic, 2010).

كما يظهر خلل واضح عند الطلبة في تطبيقهم للنظريات المتعلقة بحساب نهايات المتتاليات التراجعية بالأخص المتتاليات الناطقات التي تؤول إلى عدد أصم.

تشير هذه النتائج إلى ضعف الطلبة في المهام المتعلقة بالتحليل والاستدلال وبناء تعميمات وإثباتها باتباع استنتاجات منطقية. رغم كون هذه المهارات تتطلب مستوى أعلى من التفكير إلا أنه من المفروض

أن تكون في متناول طلبة رياضيات في المدرسة العليا وهم على وشك التخرج باعتبار أنها معارف تستهدف طلبة السنوات الأولى والثانية على وجه الخصوص.

إن هذه النتائج منسجمة مع النتائج التي تشير إليها التقارير الصادرة عن الهيئات الرسمية التي تتبنى تصنيف تقدم مستويات المعرفة (مثل هيئة التيمس المتقدم في حالتنا) لدى تلاميذ المستوى الرابع والثامن لطلبة الرياضيات للدول المنخرطة فيه، إذ غالبا ما يهيمن مستوى المعرفة ويتضاءل مستوى الاستدلال بينما يحتل مستوى التطبيق نسبا متوسطة.

4-الخلاصة:

تظهر النتائج السابقة نسبا متباعدة ومتدرجة تنازليا بين المستويات المعرفية الثلاث معرفة، تطبيق واستدلال بهذا الترتيب، هذا يدل على وجود صعوبات لدى الطلبة المقبلين على التخرج شعبة رياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة فيما يخص تناول العدد الأصم كسيرورة غير منتهية ممثلة في المتتاليات التراجعية الناطقة (متتالية هيرون في هذه الدراسة)، على وجه الخصوص فهم مركبات هذه السيرورات، والأفكار المتدخلة في تركيبها، مع تعميمها وإثبات تقاربها نحو عدد أصم.

من أجل تقليص الصعوبات المشار إليها نقترح اعتماد جملة من التوصيات التعليمية وكتحصيل حاصل خلق توازن بين مختلف المستويات المعرفية التي يرتكز عليها برنامج التيمس.

- تعزيز المفاهيم والمعارف المتعلقة بمختلف التمثيلات الممثلة للأعداد الصماء، بالخصوص التركيز على السيرورات غير المنتهية التي تؤول نهايتها إلى عدد أصم، بالإضافة إلى استعمال الجوانب الهندسية والحسابية المتدخلة في تعريفه.
- الانتقال المتدرج بين مختلف مستويات المعرفة ويتم ذلك بتخطيط تعليمي متدرج يبدأ بترسيخ المفاهيم الأساسية ثم استعمالها في وضعيات تطبيقية وصولا بها إلى وضعيات إشكالية.
- حث المدرسين على تقديم أنشطة تدعم مهارات الاستدلال بالخصوص ما يتعلق بمفاهيم لم تنل حظها في البرامج التعليمية كما هو حال الأعداد الصماء.
- تنويع في الوضعيات التعليمية باعتماد أسئلة مفتوحة ونصف مفتوحة لتنشيط مهارات الاستدلال لدى المتعلمين وإثراء الحقل المفاهيمي المرتبط بمفهوم معين، كما هو الحال في هذه الدراسة فالعدد الأصم مغمور في مجموعة من المفاهيم منها السيرورات غير المنتهية وسيرورة البرهان بالخلف مثلا.
- إثراء البرامج التعليمية بمحور يُعنى بدراسة طبولوجية الأعداد الحقيقية وبالتالي فهم أعمق للأعداد الحقيقية بالخصوص الصماء منها، وكذا توطئة محسوسة للدخول في مقياس أكثر تجريدا وهو مقياس الطبوبوجيا.

إن دراسة العدد الأصم ككائن رياضياتي مغمور في مجموعة من السيرورات غير المنتهية واسع وخصب، إذ نزعم أن إفراده بدراسة تعليمية من هذه الزاوية حديث. كما نأمل من الباحثين في هذا الشأن التوسع فيه من خلال سيرورات أخرى كالتقريبات وخوارزميات عددية كطريقة أولار أو التقسيم الثنائي أو غيرها من السيرورات العددية التي تؤول إلى عدد أصم.

- **الإحالات والمراجع:**

A., Bruckheimer, M & ,.Ben-Zvi, R. Arcavi .(1987) .History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers .*For the Learning of Mathematics ,7 (2), 18* .*23*–

Bodin, A. (2010). Mathématiques et socle commun : vers une opérationnalisation évaluative valide. *Actes du colloque « Les mathématiciens face a l'enseignement de leur discipline ». CIRM -Marseille, 17 mars 2010. Site du colloque*.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets "nombre réel" et "racine carrée". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17(3), 55–80*.

D Tall .(2013) .*irrational* .tel aviv: boston.

Durand-Guerrier, V., & Tanguay, D. (2016). Introduire les réels à la transition lycée-université: Questions épistémologiques et horizon didactique. *In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), Proceedings of the first conference of the international network for didactic research in university mathematics (INDRUM)*, (pp. 177–179).

Fischbein, E. J. (1995). The concept of irrational number in highschool students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29–44.

González-Martín, & al. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15(3), 230–248*, 123.

I Kidron .(2018) .*Students 'Conceptions of Irrational Numbers* .International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. 4, 94.118–

I. Kidron .(1985) .*High school students 'perceptions of rational and irrational numbers* . Hebrew University, Jerusalem :Unpublished master of science thesis.

i. v. s. mullis و ،m. o. martin .(2015) .timss 2015 assessment frameworks .*international association for the evaluation of educational achievement (IEA* .(

Irby-Massie, G. L., & Keyser, P. T. (2002). Greek Science of the Hellenistic Era: A Sourcebook. *Routledge.*

Kidron, I. &. (1983). Rational numbers and decimals at the senior high level: Density and comparison. *In R. Hershkowitz (Ed.), Proceedings of the 7th conference of the International Group for the Psychology of mathematics education*, 301–306.

Larguier, M. (2012). La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession de seconde. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 32(1), 101–144.*

Monaghan, J. (1986). Adolescent's understanding of limits and infinity. *Unpublished Ph. D. thesis, Warwick University, U.K.*

NCTM. (2026). *process*. Retrieved from nctm.org: https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Process/?utm

Rizos, I., & Adam. (2022). *Mathematics students' conceptions and reactions to questions concerning the nature of rational and irrational numbers.* International Electronic Journal of Mathematics Education, 17(3), em0686.

Robert A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, vol. 18, n° 2, La Pensée Sauvage*, 139-190.

Roditi, E., & Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête Pisa 2012 en mathématiques.Un autre regard sur les resultats. *Éducation & Formations, n°86-87.*

Salles, F. (2017). nouvelles analyse de l'étude TIMSS advanced 2015 en mathématiques. *Education et formation, 41-56.*

Schmidt, s., & Willium H. (1992). L'analyse de curriculum dans le cadre de la TIMSS : description longitudinale de l'enseignement des discipline. *Perspectives Vo XXII N°3 1992, UNESCO, bibliothèque numérique*.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics , 65 , 49–76. [64]*.

Vivier, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 13, 63 - 92.*

Voskoglou., & Michael , G. (2013). An Application of the APOS/ACE Approach in Teaching the irrational numbers. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education Vol. 8 No. 1 42.*

Zazkis, R., & Sirotic, N. . (2004). Making Sense of Irrational Numbers: Focusing on Representation. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. M. Johnsen-Hoines and A. B. Fuglestad (Eds.) 4,*.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining irrational numbers: Exposing the missing link. *Research in Collegiate Mathematics Education: VII, 71. [11] [4]*.

كيفية الاستشهاد بهذا المقال حسب أسلوب APA :

مفتاح، ياسين وحازي، محمد (2026). مدى فهم طلبة المدرسة العليا للأساتذة للسيرورات غير المنتهية الممثلة للعدد الأصم: حالة متتاليات هيرون. *مجلة العلوم النفسية والتربوية*. 12(3)، الجزائر: جامعة الوادي، الجزائر. 45-62.