

بين المثال والتخمين: أي ترابط وأي تفاعل؟

Between example and conjecture: which correlation? and which interaction?

سعداوي علال

دربال عبد الله

طالبي محمد الطاهر *

المركز الجامعي بأفلو

مخبر المعادلات التفاضلية،

مخبر تعليمية العلوم،

-الجزائر-

المدرسة العليا للأساتذة، القبة -الجزائر-

المدرسة العليا للأساتذة، القبة -الجزائر-

a.saadaoui@eu-aflou.dz

abdallah.dermal@g.ens-kouba.dz

Mohammed.talbi@g.ens-kouba.dz

تاريخ الاستلام: 2024/05/27

تاريخ القبول: 2024/06/15

تاريخ النشر: 2024/06/30

الكلمات المفتاحية: الأمثلة،

توليد أمثلة، نظرية الأعداد،

البرهان، الاستدلال،

الاستراتيجيات.

Keywords: Examples,
Generic examples, Number
theory, proof, Reasoning,
Strategies.

المخلص: الدراسة عبارة عن تلخيص قصير لأطروحة ماجستير بنفس العنوان ونفس المؤلفين. وهي تعالج استخدام طلبة الدكتوراه للأمثلة في إثبات وتقييم تخمينات. حيث تم تقديم ثلاث تخمينات لهم قصد دراسة مدى استخدامهم للأمثلة في إثبات وفهم ما هو مطلوب بناء على ما قالوه وكتبوه. تم إنجاز الأطروحة بالاعتماد على مقال بعنوان "استخدام طلبة الدكتوراه للأمثلة في إثبات وتقييم تخمينات" للباحثين لارا ألكوك وماثيو انجلز. تم فيه دراسة مدى استخدام طلبة الدكتوراه للأمثلة في إثبات وتقييم تخمينات، وكذلك صياغة تصور لاستراتيجيات الاستدلال الدلالي والقواعدي بالنسبة إلى نظام تمثيل برهان. تم ذلك من خلال اجراء حوار مع طالبي دكتوراه ناجحين وذلك بإعطائهما تخمينات حول

نظرية الأعداد (الأعداد التامة، الناقصة والزائدة). خلاصا الباحثان في الأخير إلى أن هناك فرقا شاسعا في درجة استخدام الأمثلة لدى الطالبين لمناصرة استدلالتهما.

Abstract: This study is a short summary of a thesis of Grand Master which it has the same name and the same authors. This thesis treats the doctoral students use of examples in evaluating and proving conjectures. We present in this thesis three conjectures to study the extent of their use of examples in the proof and understanding of what is required based on what they said and wrote. . This thesis depending on the paper entitled "doctoral students use of examples in evaluating and

* طالبي محمد الطاهر

proving conjectures” written by (Alcock.L&Ingليس.M, 2008). We examined the extent of doctoral students use of examples in evaluating and proving conjectures and the conceptualization of syntactic and semantic reasoning strategies relatively a representation system of proof, through dialogue with two successful research students by giving him conjectures about number theory (Abundant, Deficient and perfect numbers). The researchers found that there was a vast difference in the degree of using examples among the students to support their reasoning.

مقدمة

هذه الدراسة عبارة عن تلخيص لمذكرة الماجستير المسماة "بين المثال والتخمين: أي ترابط؟ وأي تفاعل؟ دراسة ابستمولوجية وتعليمية" [1]. يتعلق موضوعها بمدى استخدام طلاب الدكتوراه للأمثلة في الاستدلال على صحة تخمين من عدمه وتأثير ذلك على استراتيجي الاستدلال الدلالية والقواعدية المنتهجة من طرفهم معتمدين في ذلك على دراسة مقال للباحثة ألكوك والباحث أنقليس البريطانيين (Alcock & Ingليس, 2008) [2]. لقد قمنا بتوسيع بعض من أفكاره النظرية مع استثمارها في الجانب الميداني.

إن المثال والتخمين والاستدلال ثلاثة أعمدة أساسية لا غنى عنها في الرياضيات عموما والنشاط الرياضي خصوصاً. فالمثال يساهم بشكل فعال في الاستدلال عن طريق التجريب قصد تحديد الطريقة المتبعة. كما يمكن استخلاص تخمين عن طريق أمثلة وإثبات صحته بواسطة استدلال رياضي، وبالتالي اعتماده في الرياضيات أو دحضه بمثال مضاد. يعتبر المثال أداة لتوضيح مفهوم مجرد، وإعطاء معنى ودلالة له. وهو يغطي حقلاً واسعاً قد يشمل الكتب المدرسية والدروس بما فيها النشاطات التحضيرية والتطبيقات. إن دور الأمثلة في تعليم وتعلم الرياضيات كان محل دراسات عديدة تهدف إلى وضع إطار نظري حيوي وتطويري هو "فضاء الأمثلة" (Watson & Mason, 2005) [3]، ص 210. يمكن للأمثلة أن تلعب دوراً في تسهيل حل مشكل غير مألوف للمتعلم حيث تسمح له أثناء قيامه بالاستدلال باختيار التقنيات المناسبة والتي تؤدي إلى فهم أكثر للمطلوب [4]، ص 16.

يشغل مفهوم الاستدلال الرياضي مكانة هامة في تعليم وتعلم الرياضيات، لكن تدريسه يسبب عدة صعوبات للمتعلمين مرتبطة بمرورهم بمرحلتين دراسيتين مختلفتين: الأولى تمتد من بداية الحياة الدراسية إلى غاية المرحلة الثانوية، وتتميز بتطبيق معارف رياضية، والثانية هي المرحلة الجامعية التي يحظى فيها الجانب النظري بمكانة مرموقة ممثل بالخصوص بمجموعة من المبادئ تتعلق بالبداهيات والتعاريف والنظريات والبراهين على مختلف أنماطها وفي مختلف الفروع الرياضية. تستخدم هذه المبادئ في استخلاص استنتاجات وحل مشكلات ووضع وتقييم تخمينات وبناء براهين. لقد أجريت العديد من الأبحاث حول طبيعة الاستدلال الرياضي. لعل مراقبة سلوك الأفراد الناجحين يساهم في فهم التفكير الرياضي في المستويات العليا. لهذا قامت الكثير من الدراسات بتحليل تفكير الرياضياتيين المتمرسين قصد اكتساب نظرة حول مكونات هذا التفكير على سبيل المثال

(Antonini, [6] (Inglis, et al., 2007), [5] Weber & Alcock, 2009)

(2006[7]. تم استخلاص منها أفكار هامة منها توفير الوقت يساهم في تعدد طرق التفكير، وأن تحليل حجج رياضية يتم عبر دراسة محتواها أو بنيتها، كما أن خبراء الرياضيات لهم قدرة على تسيير الاستراتيجيات والتحقق من فعاليتها. كثيرا ما أسفرت هذه البحوث عن نتائج قيمة ومثيرة للإهتمام، لكن قيمتها البيداغوجية قد تكون محدودة [2].

1. موضوع الدراسة

نظرا لمكانة الأمثلة الهامة في الرياضيات، أتت هذه الدراسة لتسليط الضوء على مدى استخدام الأساتذة الجامعيين وطلبة الدكتوراه للأمثلة في توضيح وتقييم التخمينات ومعرفة سبب هذا الاستخدام وكذلك تأثيره على استراتيجية الاستدلال لديهم. كما أن التحكم في تقييم ووضع تخمينات ينعكس على نشاطهم وأبحاثهم المستقبلية. يتعلق موضوع الدراسة إذن بمدى استخدام

طلاب الدكتوراه للأمثلة في الاستدلال على صحة تخمين من عدمه، وتأثير ذلك على استراتيجي الاستدلال الدلالية والقواعدية المنتهجة من طرفهم. يكون التركيز بالخصوص على مدى استعمالهم للأمثلة في اختبار وتجريب تخمينات عامة علما أن هذا الاستعمال قد يمكن من الإدراك الجيد للمفهوم الرياضي المطروح في التخمين.

2. إشكالية الدراسة

ربط المقال المعتمد في الدراسة [2] بين استخدام الأمثلة في الاستراتيجيات الدلالية والقواعدية بالفهم الرياضي والاستدلال، وتم التركيز بصفة خاصة على إنتاج برهان. فإذا كانت الفرضية القائلة "بأن الاستراتيجيات الدلالية والقواعدية مختلفة على مستوى الخبراء"، فإن ذلك يثير تساؤلات حول الاختلاف في سلوك الرياضيين الناجحين بسبب وجود فرق كبير في درجة استعانتهم بالأمثلة لمناصرة استدلالاتهم. لا شك أن هذا الفرق له انعكاسات على فهمنا لممارسات خبراء الرياضيات وعلى تدريس الرياضيات والتي تكون أكثر وضوحا على مستوى التدرج. إذا كنا نعلم الطلبة المهارات التي يحتاجونها للنجاح في الدراسات الرياضية العليا، فإننا نحتاج إلى معرفة ما هي هذه المهارات وكيف يستخدمها الرياضياتيون بسلاسة بالخصوص المهارات المرتبطة باستخدام المثل.

من المعروف أن فضاء الأمثلة المنسوب إلى (Mechener, 1978, p.364) [8] هو مفتاح للأمثلة الناجحة التي تعتمد على الاستدلال الدلالي في الوضعيات التي تكون فيها العبارة العامة صحيحة، وبالتالي يكون المنتج القواعدي مطلوباً. هل استثمار هذا الفضاء يطور المهارات التي تستخدم بشكل روتيني من قبل بعض الرياضيين الناجحين؟ إن مراقبة سلوك الأفراد الناجحين قد يساهم في فهم التفكير الرياضي في المستويات العليا. وعليه، فإن تحليل تفكير الخبراء قصد اكتساب نظرة حول مكونات هذا التفكير قامت بها الكثير من

الدراسات (مثلاً: [9، ص432]) والتي تشير إلى أن المتخصصين في الرياضيات وكذلك معلمي الرياضيات غالباً ما يفتقرون إلى القدرة على تحديد ما إذا كانت الحجة تشكل إثباتاً مقبولاً. كما أن بناء برهان قد يتم عبر استراتيجية استدلال قواعدية أو دلالية [9]. على ضوء ما سبق، فإن الإشكال المطروح يتمثل في "مدى استخدام طلبة الدكتوراه للمثال في اختبار صحة تخمين، وتأثير ذلك على استراتيجية الاستدلال المتبعة". الأسئلة الموالية قد تؤثر إشكالية الدراسة:

1. إلى أي مدى يستخدم طلبة الدكتوراه الأمثلة في استدلال وتقييم تخمينات عامة؟ وما هي أهمية هذا الاستخدام؟

2. ما هو تأثير استخدام المثال على اختيار استراتيجيتي الاستدلال القواعدية والدلالية في إنتاج برهان رياضيّات؟

3. هل تحفيز الطالب لاستخدام الأمثلة أثناء البرهان يكسب وينمي لديه مهارة توليد المثال المضاد (باعتباره استدلال دلالي)؟

3. أهداف الدراسة

ترمي هذه الدراسة بشقها النظري والميداني وبالاعتماد على المقال الأصلي

[2] على تحقيق جملة من الأهداف أهمها:

- إبراز أهمية المثال في توضيح النص الرياضي الوارد في التخمين.
 - إظهار كيفية توظيف المثال بأنواعه واستعمال التجريب في بداية البرهان وتأثير ذلك على استراتيجية البرهان المستخدمة.
 - تسليط الضوء على استراتيجيتي الاستدلال القواعدية والدلالية المستخدمة من طرف طلبة الدكتوراه لإثبات صحة تخمين من عدمه.
- يمكن ملاحظة الترابط بين الأسئلة المؤطرة للإشكالية مع أهداف الدراسة وفرضياتها الأربعة المذكورة في الجانب الميداني.

4. . الخلفية النظرية

تشمل الخلفية النظرية على ثلاثة جوانب أساسية هي الأمثلة من حيث الاستخدام والبناء ودورها في الاستدلال والتعليم، والتخمين في الرياضيات وفي تعليمها، والاستدلال القواعدي والدلالي.

1.4 الأمثلة

يقول (Bills and all, 2006) [4] "إن المثال هو المادة الخام التي تساهم في وضع تصور للمفاهيم الجديدة، وهو أداة تسلط الضوء على طبيعة الرياضيات من خلال استخدامها في التفسير والبرهان". ويصفه (Vinner, 1991) [10] بأنه "واحد من أهم الأدوات المستخدمة في إيضاح المفاهيم وتبليغها من المعلم إلى المتعلم". ربما يعتقد البعض أن الأمثلة تعتبر كنموذج لفئة واسعة من الأشياء بينما يراها البعض وكأنها نموذج لحالات محددة. يمكن توضيح ذلك من خلال الشرح المأخوذ من (Mason and Pimm, 1984) [11، ص285]: غالبا ما تعتبر الدالة: $x \rightarrow |x|$ المثال المعطى عادة للمتعلمين عن الدالة المستمرة وغير القابلة للإشتقاق. ما يحدث هو أن المعلم ينظر إليه كمثال مولد باعتباره يعبر عن مجموعة من الدوال: $x \rightarrow k|x| + c$. لكن المتعلمون لا ينظرون إلى مجموعة الدوال بل يركزون على دالة واحدة. إن الفرق بين الأمثلة المولدة والخاصة لا يكاد يرى.

يعرف غلايزر [12] المثال المضاد بالشكل: "لإثبات نفي قضية تحتوي على مكيمات كلية، يجب أن نجد عنصرا من المجموعة لا يحقق الخاصية، هذا العنصر يعرف بالمثال المضاد". يكفي أن نجد مثلا واحدا لتفنيد صحة عبارة. تلعب الأمثلة المضادة دورا مهما في الرياضيات وفي ميادين أخرى، وتعتبر وسيلة جيدة وفعالة بالنسبة للباحثين والممارسين للرياضيات. وهي مؤشر جيد على خطأ فرضية مقترحة أو اتجاه البحث المسلوک. على الرغم من الأمثلة المضادة تبدو بسيطة، إلا أن الدراسات التجريبية أظهرت أن المتعلمين يمتلكون مفاهيم

خاطئة مرتبطة بالأمثلة المضادة فيما تعلق بتوليدها واستخدامها. ممارسة المتعلمين لإنشاء الأمثلة والأمثلة المضادة تمكنهم من تعزيز قدراتهم الابداعية وتطوير تفكيرهم الرياضي. كما يعزز إنشاء الأمثلة المضادة مهارات التفكير الناقد لديهم فهي تتناول التنفيذ والتبرير والحجة والاستدلال والتفكير الناقد وكلها تمثل جوهر التفكير الرياضي. هذه المهارات تفيد المتعلمين ليس فقط في دراستهم الرياضية، بل في مجالات أخرى.

يبحث الرياضياتيون عن علاقات عامة في الرياضيات، ويذكرونها في تعاريف ونظريات. وعلى الرغم من التركيز على هذه العلاقات العامة، فإن العديد من الرياضياتيين يعتبرون أنه من المهم العمل ضمن أمثلة نوعية. لقد وجدت ألكوك (Alcock, 2004) [13] أن هناك ثلاث طرق يستخدم فيها الخبير أمثلة نوعية مختارة بعناية: إنشاء أمثلة الغرض منها فهم القضية أو التعريف، إعطاء حجة للقضية العامة بمناقشة أو معالجة مثال مولد، التفكير في مثال مضاد ممكن لقضية أثناء البرهان. يرى (Bills and all, 2006) [4]، ص 126 "وجود اتفاق لدى الكثير على أن استخدام الأمثلة جزء لا يتجزأ من مادة الرياضيات ولا يقتصر فقط على التعليم والتعلم". كما أكدت الدراسة (Mechener, 1978) [8، ص 361] بأن الأمثلة تعتبر لبنة أساسية في الفهم الرياضي الصحيح عند بناء إطار مفاهيمي. لقد استخدمت [8، ص 364] مصطلح فضاء الأمثلة لوصف مجموعة الأمثلة التي قد يستخدمها شخص عند التفكير في مفهوم رياضي ما أو نتيجة رياضية. إن اختبار مدى ثراء فضاء الأمثلة الخاص بالمتعلم يساهم في تحفيزه على اكتساب وتبني مفهوم جديد وجعل تفكيره مرناً [4، ص 8].

إن دور الأمثلة في الاستدلال الرياضي وحل مشاكل وتدريس الرياضيات أساسي: لقد أكد الباحثان (Epstein & Levy, 1995) [14، ص 6] أن "أكثر الرياضياتيين يمضون معظم الوقت في التفكير في أمثلة خاصة وتحليلها"،

وأنه "على الأرجح أن التقدم الأكثر أهمية في الرياضيات نشأ من التجريب مع أمثلة". كما صنف بالاشاف (Balacheff, 1987) [15] البرهان إلى ثلاث مستويات: الاقتناع بصحة عبارة، وإقناع الغير بصحة عبارة، ومعرفة من يملك جانب نظري. المستوى الأخير هو المرغوب امتلاكه من طرف المتعلمين. إن أعمال المتعلمين حول البرهان يعطي فكرة جيدة حول نضجهم من جهة، ومستويات البرهان لديهم من جهة ثانية. ترتبط الأمثلة بالحجج والبراهين ارتباطاً وثيقاً. يمكن للأمثلة أن تلعب دوراً مهماً في توليد حجج على سبيل المثال [13]، وبرهان وتفنيد [15]. هناك أدلة تاريخية تفيد بأن الأمثلة تلعب دوراً محورياً في تطور الرياضيات كمادة وفي تدريسها. وليس غريباً أن تجد لها مكاناً في كثير من نظريات تعلم الرياضيات وكذلك هي جزء هام ليس فقط في تعليم وتعلم الرياضيات بل في الرياضيات نفسها [4، ص1]. قام الباحث (Antonini, 2006) [7، ص2] بتحديد ثلاث عمليات ذهنية التي يمكن أن تكون المكونات الأساسية للعمليات الأكثر تعقيداً في توليد الأمثلة وهي المحاولة والخطأ والتحويل والتحليل. كما أن الباحث (Gras, 1979) [16] صنف النشاط الرياضي المتعلق بتوليد الأمثلة ضمن النشاط الابتكاري وهو يحرك الخيال والقدرة على التفكير العميق. أما العمليات المرافقة له فهي الابتكار والاستحداث والتخيل والانشاء.

2.4 التخمين

التخمين هو عبارة بُنيت على وقائع تجريبية لم يتم التصديق عليها. يُمكن للتخمين أن يكون صحيحاً في بعض الحالات ولكننا لا ندري مدى صحته في بقية الحالات [17، ص402-403]. يعتبر التخمين من الأنشطة الرياضية البارزة التي يجب أن يمارسها المتعلمون لما لها من تأثير في تنمية التفكير الناقد لديهم واكتساب مفاهيم جديدة وذلك بمحاولة ربط ما يحاولون تعلمه

بمعارفهم وخبراتهم السابقة وكذلك إزالة ما علق بأذهانهم من تصورات خاطئة. يساهم التخمين مساهمة كبيرة لها أثر جيد في العملية التعليمية، فقد يساعد في ظهور خاصية أو يمكن من تقديم مهارة رياضية للمتعلمين. للتخمين عدة أدوار في تعليم الرياضيات فهو يؤهل المتعلم لتطوير معارفه وتعزيزها ويوفر له وسيلة لبناء معرفة رياضية أو اكتشاف خوارزمية وتعزيز التواصل بينه وبين المتعلمين من خلال المناقشة. لقد صنفه الباحث [16] ضمن نشاط التنبؤ، وهو نشاط موجه خارج نطاق التصور والذي يوظف القدرات الاستقرائية لدى المتعلم. إن العمليات الذهنية المرافقة له هي الاستقراء والتكهن والتخمين والتقدير. على سبيل المثال: يُطلب من المتعلم إيجاد ثلاثة أمثلة حول مجموع عدد طبيعي ومربعه وحساب هذا المجموع، ثم كتابة النواتج على شكل جداء عددين أحدهما ذلك العدد الذي جمع مع مربعه. باستخدام الاستقراء، يطلب إيجاد تخميننا.

تكون إحدى الاجابات مثلا: $3^2 + 3 = 12, 2^2 + 2 = 6, 1^2 + 1 = 2$

$3^2 + 3 = 12 = 3 \times 4, 2^2 + 2 = 6 = 2 \times 3, 1^2 + 1 = 2 = 1 \times 2$

فالتخمين المفروض استنتاجه هو: $n^2 + n = n(n+1)$

في هذا النشاط استخدم المتعلم الاستقراء من خلال ملاحظة حالات خاصة ومن خلال عملية التنبؤ استنتج التخمين الذي يتم تقديره باستخدام الاستقراء الرياضي.

يمكن التخمين المتعلمين من اكتشاف وبناء معرفة رياضية جديدة من خلال ربط ما يحاولون تعلمه بالخبرة والمعرفة السابقة. على سبيل المثال أعطي النشاط الموالي لقسم السنة الثانية من التعليم الثانوي، شعبة رياضيات بعد درس الاشتقاق:

$f(x) = \frac{1}{x}$ دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة:

أحسب المشتقات الأولى والثانية والثالثة للدالة f . ماذا تخمن حول المشتقة النونية لـ f .

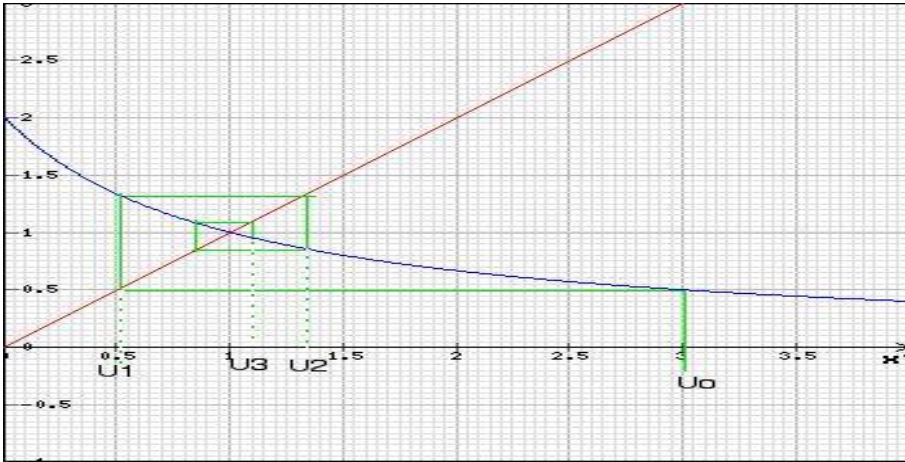
كانت الإجابة: $f^{(1)}(x) = \frac{-1}{x^2}$ ، $f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$ ، $f^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4}$.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

استنتج المتعلم المشتقة النونية للدالة f بالملاحظة الدقيقة للعبارات الناتجة عن تغير قيم n واستخدم الاستقراء للحصول على تخمين. أدى ذلك إلى اكتشافه لمعرفة جديدة هي المشتق النوني من خلال ربط المعرفة القديمة بالمعرفة الجديدة. كما يمكن مثلا للتخمين أن يساهم في توضيح مفهوم تقارب متتالية: من خلال نشاط قدمناه لنفس القسم السابق: المطلوب هو تمثيل الحدود الأربعة الأولى وتقديم تخمين حول نهاية المتتالية لعددية (u_n) المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

لقد تحصلوا على التمثيل الموالي (شكل 1) حيث كان تخمين التلاميذ أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 1 الشيء الذي مكّنهم من رؤية شيء ملموس حول تقارب متتالية بعد أن كانت شيئا مجردا لديهم. لقد مكن هذا النشاط التلاميذ من تكوين صورة ذهنية حول تقارب متتالية.



شكل 1: تمثيل تقارب متتالية عددية

يستخلص بأن التخمينات تلعب دورا أساسيا في تعليم الرياضيات يتمثل بالخصوص: جعل المتعلم يمارس نشاطات ذهنية مصاحبة للتخمينات مما يؤدي إلى تعميق قدرات الفهم والاستدلال لديه. تحفيز المتعلم على المشاركة الإيجابية في العملية التعليمية. تمكين المتعلم من مواجهة المفاهيم والأفكار الخاطئة وبالتالي تعديلها. تعزيز الثقة لدى المتعلم أثناء عملية البرهان على التخمينات (بالصحة أو التفنيد).

من المفيد ذكر بعض التخمينات الشهيرة تاريخيا [17]: لقد واجه الرياضياتيون اليونانيون العديد من المشكلات الصعبة ففي المجال الهندسي مثلا، حاولوا الحصول على إنشاءات هندسية دقيقة لبعض الأشكال اعتمادا على وسائل معروفة لديهم كالمدرور والمسطرة غير المدرجة. لقد نجحوا في حالات صعبة مثل إنشاء مضلع خماسي منتظم، إلا أنهم فشلوا في ثلاث مسائل شهيرة وهي تربيعة الدائرة وتضعيف المكعب وتثليث الزاوية. تعتبر بديهيات أقليدس تخمينات يونانية بامتياز خاصة المصادرة المتعلقة بالتوازي حيث الإشكال فيها أنه لا يمكن إثباتها باستخدام البديهيات الأخرى. لقد تم استبدالها بالمصادرة النافية لها مما سمح بظهور الهندسة اللاأقليدية (هندستا ريمان

ولوباتشفسكي). في مجال الحساب ونظرية الأعداد والطبولوجيا والتحليل، ظهرت مشكلات ذات نصوص بسيطة ولكنها تتميز بصعوبة كبيرة في إيجاد حل لها. أقدم تخمين مفتوح، منذ زمن أولر، هو تعريف الأعداد التامة كأعداد زوجية مع عدم وجود أعداد تامة فردية. من بين أشهر التخمينات الحديثة نجد تخمين أولر (1769) الذي نص على عدم وجود أعداد تحقق: $a^4 + b^4 = c^4$ أو $e^5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5$. لقد أثبت كل من لاندر وباركين خطأه في سنة 1966 وذلك بإعطاء مثال مضاد هو:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

كما أعطى نعوم ألكيس في سنة 1988 مثالا مضادا آخر هو:

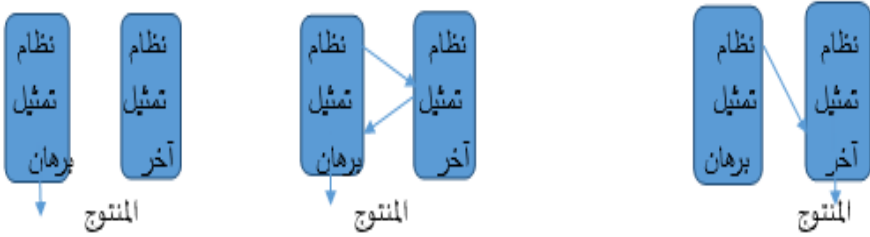
$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

إن تخمين فيرما الذي ينص على أنه لا توجد ثلاثة أعداد طبيعية غير معدومة x, y, z تحقق: $x^n + y^n = z^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 تم برهانه من طرف أندرو وايلز سنة 1994 وذلك بعد مرور 300 سنة من ظهوره. أما تخمين غولدمباخ فقد ظهر للوجود سنة 1742 ويعتبر كواحد من أقدم المعضلات غير المحلولة في نظرية الأعداد وفي الرياضيات ككل. ينص التخمين على أنه يمكن كتابة كل عدد طبيعي زوجي أكبر من 2 على شكل مجموع عددين أوليين. وهو لم يبرهن ولم يوجد له مثال مضاد لحد الآن. آخر تخمين نذكره هو تخمين ريمان سنة 1859 الذي صاغه بالشكل التالي: إن الجزء الحقيقي لجذور غير البديهية لدالة زيتا هو $\frac{1}{2}$. يمثل هذا التخمين أحد المسائل الأكثر أهمية في الرياضيات الحالية، كما أنه أحد مسائل هيلبرت المشهورة التي ظهرت سنة 1900، وأنه إحدى المسائل التي اختارتها مؤسسة كلاي سنة 2000 والتي حددت جائزة مالية لحلها. الفائدة المرجوة من التخمين أنه يساهم في فهم توزيع الأعداد الأولية.

3.4 الاستدلال القواعدي والدلالي

1.3.4 نظام تمثيل برهان

في نظرية غولدن (Golden, 1998) [18]، يتكون نظام تمثيل برهان من علامات ابتدائية وصيغ. يمكن أن تشمل العلامات الحروف أو الكلمات أو الأرقام. كما يمكن أن تشمل أيضا المنحنيات والأشياء المادية. يملك هذا النظام قواعد للربط بين العلامات تظهر في صيغ مقبولة. لعل الأهم هو كون أنظمة تمثيل برهان غالبا ما تملك قواعد للانتقال من صيغة مقبولة إلى أخرى، أو من مجموعة من صيغ إلى أخرى (أنظر الشكل 2 المعدل) الموالى [2].



الشكل 2: استراتيجيات الانتقال من نظام تمثيل برهان إلى آخر ومنتجاتها. تتكون ميزات نظام تمثيل برهان رياضياتي [2] من رموز رياضية ورموز منطقية وجزء من اللغة. الكلمات المستخدمة في برهان، وخاصة الأسماء، لها معنى رياضياتي دقيق لا غموض فيه. الصيغ المقبولة تحتوي على قوالب معروفة من المنطق وجمل صحيحة من حيث القواعد اللغوية وجمل تربط الكلمات بالرموز المنطقية. تعتبر الصيغ الأخرى (كالمنحنيات واليدويات والمخططات البيانية) غير مقبولة كبرهان رياضياتي لأنه يجب أن يُوظف فيه أطر مقبولة (Selden and Selden, 1995) [19]. يقصد بإطار البرهان تحديد ما يمكن افتراضه في بداية البرهان وما يجب الوصول إليه في نهايته.

يعتمد الاستدلال حول مفهوم رياضياتي على تعريف المفهوم أو على نظريات مبرهنة مستنتجة من هذا التعريف. لا يجب أن تستند الحجج على تمثيلات غير شكلية لهذا المفهوم، وأن تكون العبارات الواردة في البرهان إما

فرضيات يسمح بها إطار البرهان، أو تكون متفق عليها اجتماعيا أو مستنتجة من عبارات سابقة في البرهان. يرى المجتمع الرياضي أن صياغة الحجج الرياضية ضمن نظام التمثيل الموصوف، يعزز مصداقية البرهان، كما يضمن بقاء العبارات مبرهنة أقصى ما يمكن [20، ص327].

2.3.4 الاستدلال القواعدي

يستخدم الاستدلال القواعدي أنظمة تمثيل تساهم بفعالة في محاولات بناء الطلبة للبراهين الرياضية [21]. عند إنشاء برهان رياضي، يمكن لشخص أن يبدأ بتعاريف وفرضيات مقبولة، ثم يستخدم استدلالات منطقية وإجراء حسابات للحصول على النتيجة المطلوبة دون النظر إلى تمثيلات غير شكلية لهذا المفهوم (مثل المنحنيات والمخططات البيانية أو أمثلة محددة). يسمي الباحثان (Weber and Alcock, 2008) [20] هذا النوع من الاستدلال بالاستدلال القواعدي. كمثال عليه، يطلب من متعلمين إنجاز المهمة التالية: T مصفوفة غير قابلة للقلب. أثبت أنه توجد مصفوفة غير صفرية S بحيث تكون TS صفرية (Mejia-Ramos et al., 2015) [21]: إحدى الطرق المستخدمة من طرف متعلمين هي تمثيل المصفوفة T بالرموز: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، ثم ذكر أن مصفوفة تكون غير قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان محددها غير معدوم، أي:

$\text{Det}(T)=ad-bc \neq 0$ بعد ذلك، تم تمثيل المصفوفة S بالرموز: $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ثم

حساب الجداء: $TS = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$ يكون هذا الجداء مصفوفة

صفرية إذا كان: $ae+bg=0, af+bh=0, ce+dg=0, cf+dh=0$ باستخدام الفرض $\text{Det}(T) = ad-bc \neq 0$ تم الحصول على معاملات المصفوفة S: $e=f=d, g=h=-c$ في الأخير تم استنتاج أنه من أجل أي مصفوفة مربعة 2×2 غير قابلة للقلب

$$S = \begin{pmatrix} d & d \\ -c & -c \end{pmatrix} \text{، فإن لمصفوفة التالية: } T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

تحقق المطلوب. نشير هنا إلى أن الإجابة ليست دقيقة لأن المصفوفة S قد تكون صفيرية في حالة: $c=d=0$. تمت الإشارة إلى مشاركة المتعلمين بفعالية في توظيف الاستدلال القواعدي [21]: فقد استخدموا تمثيلات رمزية للمصفوفات وجدائها وكذلك في المحدد، كما استخدموا خاصية المصفوفة غير القابلة للقلب للحصول على معاملات المصفوفة المطلوبة.

3.3.4 الاستدلال الدلالي

يستخدم الاستدلال الدلالي أيضا أنظمة تمثيل تساهم بفعالية في محاولات بناء الطلبة للبراهين الرياضياتية [21]. يمكن أن يفسر مفهوم رياضياتي باستخدام أنظمة تمثيل كالأمثلة النموذجية، والإشارات والمنحنيات، والمخططات البيانية. فيمكن لشخص، وهو يحاول استيعاب هذا المفهوم، أن يبني روابط بين تعريف المفهوم وهذه التمثيلات اللأشكالية، وربما يطور فهمه اللأشكلي إذا لزم الأمر (Pinto and Tall, 1999) [22]. في بناء مثل هذا الاستدلال، تترجم القضية المراد برهانها إلى أحد أنظمة التمثيل اللأشكالية، ويتم تبرير ذلك من خلال الحجج اللأشكالية التي تستخدم هذه التمثيلات، ثم يتم استخدام هذه الحجج كقاعدة لا نشاء برهان شكلي (Weber and Alcock, 2008) [20]. يعرف هذا النوع من الاستدلال بالاستدلال الدلالي. على سبيل المثال، يطلب من الطلبة إنجاز المهمة التالية في إنشاء برهان (Mejia-Ramos et al., 2015) [21]: T مصفوفة غير قابلة للقلب للقلب. أثبت أنه توجد مصفوفة غير

صفيرية S حيث تكون TS صفيرية. بدأ الطلبة العمل بمثال خاص: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ثم إنشاء المصفوفة S التي تحقق الشرط المطلوب. وأخيرا الوصول إلى مصفوفة

مثل $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. يرى بعض الطلبة، كتفسير لهذا العمل الإنشائي الخاص، أن أعمدة المصفوفات غير القابلة للقلب تشكل مجموعة مرتبطة خطياً، أي أن أحد الأعمدة مضاعف للآخرين. تم ترميز المصفوفة T بالشكل:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ca_{11} \\ a_{21} & ca_{21} \end{pmatrix}, \text{ واعتماداً على المثال الخاص، تم كتابة:}$$

$$S = \begin{pmatrix} c & c \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ نشير إلى أن هذه الإجابة ليست دقيقة: لأن الحالتين:}$$

$$a_{11} = a_{21} = 0 \text{ و } a_{12} \neq 0 \text{ أو } a_{22} \neq 0 \text{ لم تؤخذ بعين الاعتبار.}$$

لم يستخدم الطلبة في البداية استدلال قواعدي، بدلاً من ذلك، قرروا تمثيل مصفوفة غير قابلة للقلب بأخذ مثال خاص، ثم الشروع في حل المشكلة المتعلقة بهذه المصفوفة الخاصة في نظام التمثيل المختار. زود هذا الإنشاء الخاص بعضاً من الطلبة بفكرة التعميم، وبالتالي الرجوع إلى نظام تمثيل برهان رياضياتي. من طرق الاستدلال الدلالي الإشارات والتي هي نوع من الحركة حيث يستعرض فيه المتكلم مباشرة مواضيع أو أفكار وذلك باستخدام جسده. فالإشارة تقدم عناصر فعالة تساعد الطلاب في استدلالاتهم. كما يقول (McNeill, 1992) المأخوذ من المرجع [23] "الإشارات والكلام المصاحب لها يقدمان جنباً إلى جنب عرضاً متميّزاً من الفكر. فهما أدق تعبير عن أفكار شخص ما من تلك التي قد يصل إليها الملاحظ".

يقدم المرجع [2] تمييزاً بين الاستدلالات الدلالية والقواعدي بالشكل: يستخدم الاستدلال الدلالي أمثلة (مولدة، تجارب، مضادة) أو إشارات أو إعادة صياغة لإشكالية بينما يستخدم الاستدلال القواعدي عبارات صحيحة أو إطارات البرهان النموذجي (التناقض، الاستنتاج) أو قاعدة العزل (modus ponens) أو قاعدة القياس (modus tollens).

5. العمل الميداني

بدأنا دراستنا الميدانية التي تهدف إلى "مدى استخدام طلاب الدكتوراه للأمثلة في الاستدلال على صحة تخمين من عدمه، وتأثير ذلك على استراتيجي الاستدلال الدلالية والقواعدية المنتهجة من طرفهم". لهذا الغرض اخترنا ثلاثة تخمينات من بين التخمينات الستة الواردة في المقال المعتمد في الدراسة [2]، وهي تتعلق بنظرية الأعداد وموضوعها الأعداد التامة والزائدة والناقصة. بالنسبة للعينّة التي شملتها الدراسة، فهي مكونة من 6 طلبة دكتوراه إثنان منهما مختصان في الجبر (نظرية الأعداد التحليلية)، وإثنان مختصان في التحليل (التحليل العددي والنمذجة، المعادلات التفاضلية العادية) وآخران مختصان في تعليمية الرياضيات. واضح أن الطلاب الأربعة الأخيرين ليس لديهم تجربة سابقة مع مفهوم الأعداد التامة والزائدة والناقصة. ونظرا للحجم المحدد لهذه الدراسة، فقد اقتصرنا على ثلاثة طلبة دكتوراه في الاختصاصات الثلاثة المذكورة أعلاه. كان الغرض من هذا العمل الميداني، تحقيق أهداف الدراسة ومحاولة الإجابة على التساؤلات المؤطرة للإشكالية وذلك باختبار فرضيات الدراسة الموالية.

1.5 فرضيات الدراسة

بعد تفحص ما جاء به المقال المعتمد [2]، وكذلك مراجع أخرى، ظهر لنا تفاوت في استخدام الأمثلة الرياضية من طرف طلبة الدكتوراه. قد يرجع ذلك إلى تكوينهم وقناعاتهم الشخصية الناتجة عن خبراتهم السابقة. فهناك من يستخدم الأمثلة لتوضيح وجهة نظره للغير، أو محاولة زيادة استيعابه لمفهوم رياضياتي ثم توظيفه في تخمين ما، أو في نظرية ما طلب منه إثبات صحتها، أو محاولة إيجاد مثال مضاد لفحص مدى صحة تخمين معطى. وهناك البعض الآخر الذي يستخدم الأمثلة لينير طريق بحثه عن استدلال يمكنه من تذليل الصعاب التي تصادفه أثناء بناء البرهان. وهناك صنف ثالث لا يستعمل

الأمثلة، وبالتالي ينتهج استراتيجية الاستدلال القواعدية. ووفقا لما سبق، نهدف من خلال عملنا هذا إلى اختبار الفرضيات الأربعة الموالية:

الفرضية 1 : يعتمد على الأقل أحد طلبة الدكتوراه على الاستدلال القواعدي أكثر من اعتماده على الاستدلال الدلالي.

قد تكون شرعية هذه الفرضية مستمدة من عدة أبحاث منها مثلا: الدراسة الخاصة بالمقال المعتمد [2، ص118]، كذلك الدراستان الخاصتان بفحص تفكير الطلاب في التحليل الحقيقي: (Pinto & Tall, 2002) [24] و (Alcock & Simpson, 2005) [25] حيث لاحظت كل منهما أن بعض الطلبة يستخدمون بانتظام التمثيلات البصرية لتساعدهم على الفهم، في حين أن البقية نادرا ما يستخدمونها.

الفرضية 2 : هناك تفاوت في استخدام الأمثلة أثناء عملية الاستدلال (بنوعيه) لدى طلبة الدكتوراه

قد تكون شرعية هذه الفرضية مستمدة من دراسة المقال المعتمد [2، ص126].
الفرضية 3: يشترك طلبة الدكتوراه في البحث عن المثال المضاد، لكن هناك اختلاف في الكفاءة والتوقيت.

قد تكون شرعية هذه الفرضية مستمدة من المقال المعتمد [2]: إنَّ البحث عن المثال المضاد أثناء البرهان (والذي يعتبره المقال استدلالا دلاليا) قد يكون في الغالب صفة مشتركة بين طلاب الدكتوراه، لكن هناك اختلاف في توقيت وكفاءة البحث عنه.

الفرضية 4 : يعتمد طلبة الدكتوراه في استراتيجياتهم الاستدلالية على درجة ألفة الموضوع لديهم.

قد تكون شرعية هذه الفرضية مستمدة من الدراسة الخاصة بالمقال المعتمد [2، ص126].

2.5 منهجية الدراسة

1.2.5 طريقة وأدوات الدراسة

اعتمدنا على المنهجية المتبعة في المقال المعتمد [2] (التحليل النوعي واستعمال المقابلة التي صممت على شكل حوار إكلينيكي)، كما استثمرنا من الجزء النظري بعض الأفكار الأساسية التي استعملناها كأدوات تحليلية في العمل الميداني من بينها: يعتبر استعمال الأمثلة في فحص تخمينات استدلالا دلاليا [2]. كما أن مستويات البرهان لبلاشاف [15] (تجربة ساذجة، تجربة حاسمة، مثال مولد) تدخل ضمن هذا الاستدلال. وعليه يمكننا تصنيف أجوبة المشاركين في العمل الميداني حسب هذه المستويات. يعتبر المستوى الأخير من هذا التصنيف بداية للتعميم، وبالتالي يتوجب الانتقال إلى مستوى أعلى إما عن طريق استدلال دلالي بمثال مضاد أو استدلال قواعدي [2]. كما أن استخلاص النشاط الذهني الناتج عن إعطاء أمثلة من طرف المشاركين وذلك بالاعتماد على [7] الذي يصنف هذا النشاط إلى ثلاث عمليات ذهنية هي المحاولة والخطأ والتحويل والتحليل. كما عمقنا التحليل باستخدام تصنيف [16] الذي يعتبر توليد الأمثلة نشاطا ابتكاريا يتولد عنه عمليات فعل مرافقة له هي: الابتكار والتخيل والإنشاء. يمكننا تحليل أجوبة المشاركين أثناء التحقق من التخمينات اعتمادا على استعمالهم لأحد الاستدلالات الدلالي أو القواعدي [2]. كما أن استخلاص النشاط الذهني الناتج عن التحقق من التخمينات المعطاة للمشاركين تم اعتمادا على [16] الذي صنف التخمين ضمن نشاط التنبؤ وهو نشاط موجه خارج نطاق التصور، ويوظف القدرات الاستقرائية لدى المتعلم. إن العمليات الذهنية المرافقة له هي الاستقراء والتكهن والتقدير.

2.2.5 تحضير الدراسة

تمّ انجاز هذا العمل خلال شهر مارس 2016، بنفس الطريقة المتبعة في المقال المعتمد [2]، قمنا بدراسة ومقارنة سلوك ستة (6) طلبة دكتوراه في

الرياضيات والذين قاموا بتقييم ثلاث تخمينات حول نظرية الأعداد (الأعداد التامة والناقصة والزائدة) نصوصها وملخص لحلولها واردة في الملحق. نريد اختبار مدى تطابق نتائج المقال مع نتائجنا مع الإشارة إلى أن بعض أفكاره (مثل الاستدلال الدلالي والقواعدي، النشاط الذهني المرافق للأمثلة والتخمين) قد تم توسيعها، وكذلك قد تم التأكد من بعضها داخل القسم. كما قمنا أيضا بتوسيع عينة الدراسة للمقال. أثناء مقابلة مع أفراد العينة، تم الاستعانة بالتحليل الكلينيكي لجينسبرغ الوارد في المقال [2] والذي تم توضيحه في [26]. صممت المقابلة على شكل حوار إكلينيكي شبه بنائي وهي طريقة مستخدمة في الأبحاث البسيكولوجية حول التفكير الرياضي، وهدفها اكتشاف ووصف العمليات الثلاثة التالية: المعرفة (تظهر في تذكر تعريف أو إنجاز عمليات إجرائية). التطبيق: (يظهر في اختيار مناسب لاستراتيجية المستخدمة، تمثيل معطيات، تنفيذ خطوات). الاستدلال (يظهر في التعميم، وتبرير صحة أو خطأ تخمين). على الرغم من شهرة هذه الطريقة، فإن كيفية طرح الأسئلة من طرف الباحثين ليست واحدة. لكن الدراسة [26] أكدت على أن منهجيات البحث النوعي أصبحت مقبولة، وأن قيمة الحوار التحليلي كوسيلة "للولوج إلى عقول المتعلمين" يتم من خلال أنماط متنوعة من أسئلة. منها: أسئلة الأداء (استراتيجيات، مفاهيم)، وأسئلة لماذا (شرح وتوضيح الإجابات) وأسئلة هات مثلا (لتوضيح خاصية أو مفهوم...) وأسئلة رد الفعل (حول قضية ما).

نشير إلى أن معظم أنواع الأسئلة السابقة استخدمت في الحوار مع أفراد العينة. جرت المقابلة على شكل حوار دام حوالي 50 دقيقة مع كل واحد من المشاركين. أعطيت في البداية وثيقة للطالب فيها التخمينات (تقدم لهم التخمين تلو الآخر)، وأخرى فيها تعريف كل من العدد الزائد والناقص والتام مع مثال عن كل واحد منها. لما يستعد الطالب يشرع في الحوار. تقدم للطالب وثيقة

ثالثة فيها أمثلة لكل من العدد الزائد والناقص والتام لما يرى المحاور أن ذلك ضروري لربح الوقت.

3.5 النتائج والتحليل

تم تقديم نتائج الدراسة (المتثلة في حوارات مع المشاركين) بالتالي: التخمين الأول يعقبه تعليق، ثم التخمين الثاني فالثالث. يركز تحليل النتائج على مدى استخدام المشاركين للأمثلة في اختبار صحة التخمين وتأثير ذلك على استراتيجية الاستدلال لديهم، وكذلك النشاط الذهني الناتج عن استخدامهم للأمثلة في تقييمهم للتخمينات. نظرا لحجم هذه الدراسة، نكتفي في هذه الدراسة بتقديم ثلاث حوارات فقط على سبيل المثال.

الحوار الأول مع الطالب محمد (تخصص جبر) حول التخمين الأول

يكون العدد الطبيعي a زائدا إذا وفقط إذا كان مضاعفا للعدد 6.

محمد: سأبدأ بالاستلزام "إذا كان العدد a مضاعفا للعدد 6 فهو عدد زائد"، كل مضاعف للعدد 6 يكتب على الشكل $6k$ ، حيث k عدد طبيعي، قواسمه هي: $6, 3, 2, 1, k, 2k, 3k, 6k$ مجموعها....

المحاور: بعد مرور مدة هل فكرت في حالة $k=1$ ؟ وقدم له ورقة الأمثلة.

محمد: من أجل $k=1$ نحصل على العدد 6 هو مضاعف لـ 6 وليس زائدا (6 حسب ورقة الأمثلة هو عدد تام)، يضحك إنه مثال مضاد يفني بالغرض.

محمد: فيما يخص الاستلزام الأول في هذا التخمين، أي "إذا كان العدد زائدا فهو مضاعف لـ 6" أرى أنه علي التفكير في إيجاد مثال مضاد، ليكون العدد 12 إنه عدد زائد أليس كذلك، لأن قواسمه هي: $1, 2, 3, 4, 6, 12$ ومجموعها 28 الذي هو أكبر من 24، وهو مضاعف للعدد 12 المحاور: هل ترى فعلا أنه مثال مضاد جيد؟

محمد: حسنا، لقد أخطأت التقدير، المثال الذي قدمته ليس جيدا كمثال مضاد. سأجرب مثلا العدد 12 لا هو مضاعف لـ 6. هنا يتدخل المحاور ويطلب منه النظر في ورقة الأمثلة. محمد: جيد، حسب ما لدينا العدد 20 عدد زائد ولكنه ليس مضاعفا للعدد 6، وعليه فالتخمين خاطئ في الاتجاهين.

جدول 1: المقابلة مع محمد حول التخمين الأول

تعليق: فكر محمد في البداية في استخدام استراتيجية استدلال قواعدية مباشرة، ولم يفكر في إيجاد مثال مضاد منذ البداية. يبدو من سلوكه المتبع في هذا التخمين، أنه يميل إلى استخدام استراتيجية استدلال قواعدية مما أدى إلى استهلاكه وقتاً أكبر في معالجة هذا التخمين. وهذا يعني أنه من الصنف الذي ينتهج هذه الاستراتيجية دون المرور بالأمثلة. قد يرجع ذلك إلى مألوفية الموضوع لديه أو مساره التكويني. لكن عند تدخل المحاور، قدم، بسرعة، مثالين مضادين باستخدام ثلاثة أمثلة كان غرضها البحث عن مثال مضاد (استدلال دلالي) [2]. يتمثل نشاطه الذهني في استخدامه لعمليات إجرائية ومحاولة تطبيق استراتيجية وكذلك استدلال تبريري [4]. كما استخدم المحاولة والخطأ أثناء بحثه عن المثال المضاد [7]، وقام بتقدير التخمين حيث قال "أن التخمين خاطئ في الاتجاهين" [16].

الحوار الثاني مع الطالب علي (تخصص تحليل) حول التخمين الثاني

إذا كان n تاماً فإن kn زائد من أجل كل عدد طبيعي k

المحاور: إذا كنت جاهزاً فلنشرع في العمل.

علي: أحاول أن أستخدم عكس النقيض، أي إذا كان kn ليس زائداً فإن n ليس تاماً. Kn ليس زائداً فهو إما تام أو ناقص، وأريد أن أصل، إن أمكن، إلى أن n زائد أو ناقص. لا أدري هل سأصل إلى نتيجة؟ (يعمل الآن في المسودة) ليكن العدد التام 28، العدد 7 هو عدد ناقص من ورقة الأمثلة.

المحاور: لماذا اخترت العدد 7؟

علي: لأنني اعتبرت $7 \times 4 = 28$ ، أي 28 يمثل kn و 7 يمثل n . كما يمكنني أيضاً استخدام العدد 14 وذلك باعتبار $14 \times 2 = 28$ ، حيث العدد 14 ناقص، وأيضاً العدد 1 باعتبار $28 \times 1 = 28$ ، إذ أن العدد 1 عدد ناقص.

المحاور: ماذا عن مدى صحة التخمين في حالة: $k=1$ ؟

علي: نعم، لم أفكر في ذلك. صحيح، من أجل $k=1$ ، سنجد أن n تام وزائد في نفس الوقت الشيء الذي يبرر خطأ التخمين.

جدول 2: المقابلة مع علي حول التخمين الثاني

تعليق: استخدم الطالب علي في البداية استراتيجية استدلال قواعدية، ثم انتقل إلى استراتيجية استدلال دلالية وذلك باستخدامه ثلاثة أمثلة، مثالان غرضهما فحص ما إذا كانت العبارة الناتجة من استخدامه للبرهان بعكس النقيض (أي إذا كان kn ليس زائدا فإن n ليس تاما) تؤدي إلى نتيجة. أما المثال الثالث فكان هو المثال المضاد (لما $k=1$). هذا يعني أنه يميل إلى استخدام استراتيجية استدلال دلالية تليها استراتيجية استدلال قواعدية [2]. فيما يتعلق بالنشاط الذهني للطالب، فهو قد استخدم المحاولة والخطأ [7]، وطبق عمليات إجرائية، واختار استراتيجية، وبرر ما توصل إليه باستدلال تبريري [13]. كما قام بتقدير التخمين حيث قدر "أن التخمين خاطئ عندما يكون $k=1$ " [16].

الحوار الثالث مع الطالب سعيد (تخصص تعليمية الرياضيات) حول

التخمين الثالث

إذا كان n و m عددين زائدين فإن nm عدد زائد

سعيد: لتكن $P_1, \dots, P_n$ قواسم n و $Q_1, \dots, Q_m$ قواسم m

المحاور: ما الذي تريد القيام به؟

سعيد: أريد كتابة قواسم جداء العددين حتى أثبت أن الجداء عدد زائد، لكن ...

المحاور: في ماذا تفكر؟

سعيد: أريد أن أجرب 12 عدد تام، جداء نفسه هو 144، قواسمه هي:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144 مجموعها يساوي 342 وهو أكبر من 288،

وبالتالي الجداء الناتج 144 هو عدد زائد.

المحاور: لماذا هذا المثال؟

سعيد: أريد أن أتأكد من البرهان بالاستلزام العكسي (يقصد عكس النقيض)

المحاور: كيف ذلك؟

سعيد: إذا كان جداءهما ليس زائدا فإن أحدهما على الأقل زائد

انتهى وقت المقابلة.

جدول 3: المقابلة مع المشارك سعيد حول التخمين الثالث

تعليق: بدأ الطالب سعيد بالاستدلال حالة عامة (أي استدلال قواعدي)، ثم انتقل إلى استراتيجيته دلالية حيث استخدم مثالا (تجربة ساذجة [15]). يبدو أنه يزاوج بين الاستراتيجيتين القواعدية والدلالية [2]. يتمثل نشاطه الذهني في تطبيقه لعمليات إجرائية، واختار استراتيجية [2]. كما قام بالتحويل (تحويل التخمين إلى عكس نقيضه) [7].

ركزنا في تحليل نتائج العمل الميداني على مدى استخدام المشاركين للأمثلة في اختبار صحة التخمين وتأثير ذلك على استراتيجية الاستدلال لديهم، وكذلك النشاط الذهني الناتج عن استخدامهم للأمثلة في تقييمهم للتخمينات. يقدم الجدول 4 الموالي احصائيات حول استخدام المشاركين الستة للأمثلة أثناء استدلالاتهم.

التخمين	محمد	أحمد	علي	عبد الوهاب	سعيد	كمال	المجموع
الأول (خاطئ)	3	3	4	1	2	2	15
الثاني (خاطئ)	2	1	3	0	3	2	11
الثالث (صحيح)	0	0	2	0	1	1	4
المجموع	5	4	9	1	6	5	

جدول 4: يظهر عدد الأمثلة المستخدمة من طرف المشاركين في التخمينات الثلاثة.

لاحظنا من خلال الجدول أعلاه، أن عدد الأمثلة المستخدمة في التخمين الأول هو 15 مثالا وهذا يوافق طبيعة الاستدلال الدلالية للتخمين. أما في التخمين الثاني فكان عددها 11 مثالا وهذا ما يوافق طبيعة الاستدلال الذي تناسبه المزاوجة بين الاستدلاليين للتخمين. في حين أنه كان عددها 4 أمثلة في

التخمين الثالث وهو ما يلائم طبيعة الاستدلال فيه (القواعدية). هناك ثلاث فئات من الطلبة المشاركين في الدراسة متفاوتة من ناحية استخدامها للأمثلة: فالفئة الأولى استخدمت الأمثلة بكثرة لأجل زيادة استيعاب المفهوم الوارد في التخمين، أو لتساعدها في اختيار استراتيجية الاستدلال، أو لايجاد مثال مضاد. كمثال على ذلك الطالب (علي) الذي استخدم أكبر عدد من الأمثلة (9 أمثلة). قد يرجع ذلك إلى عدم مألوفية الموضوع لديه، أو إلى طبيعة اختصاصه (تحليل عددي) الذي يستخدم خوارزميات حسابية. أما الفئة الثانية فكان استخدامها للأمثلة نادر. كمثال على ذلك الطالب (عبد الوهاب) الذي استخدم أقل عدد من الأمثلة (مثال واحد). قد يرجع ذلك إلى كون التكوين الذي تلقاه لا يثمن استخدام الاستدلال الدلالي كما أن طبيعة اختصاصه (معادلات تفاضلية جزئية) تذهب في نفس التوجه. هناك توازن في استخدام الأمثلة لدى الفئة الثالثة مقارنة بالفئتين السابقتين. يمكن أن يرجع توازن أفراد اثنين منها (سعيد وكمال) في استخدام الأمثلة إلى اختصاصهما الذي زودهما بالوعي لهذا الاستخدام (تعليمية الرياضيات). أما بالنسبة للإثنين الآخرين (محمد وأحمد) فإن سببه قد يكون مألوفية الموضوع لدهما (نظرية الأعداد) مما يجعلهما يبحثان عن مثال مضاد لدحض التخمين أو اعتمادهما على استراتيجية استدلال قواعدية لإثباته.

يقدم الجدول 5 الموالي إحصائيات حول نوع الاستدلال المستخدم من طرف المشاركين. لقد انقسم المشاركون في استخدامهم لاستراتيجي الاستدلال القواعدية والدلالية إلى ثلاث فئات: تتكون الفئة الأولى من مشارك واحد الذي استخدم استراتيجية استدلال قواعدية وهو (عبد الوهاب). قد يرجع ذلك إلى تكوينه الأكاديمي وطبيعة تخصصه. تتكون الفئة الثانية من مشاركين الذين استخدموا استراتيجية المزاوجة (علي وسعيد). قد يرجع ذلك إلى طبيعة تخصصهما. تتكون الفئة الثالثة من بقية الطلبة (محمد وأحمد وكمال) التي

زاوجت بين الاستدلاليين بنسب متفاوتة. قد يرجع ذلك لاستخدامهم المتوازن للأمثلة. بالنسبة للنشاط الذهني الناتج عن المهام المعطاة للمشاركين، فإنه يتمثل في العمليات الثلاثة التالية: استخدام عمليات واختيار استراتيجية واستخدام استدلال تبريري [2]. الاستخدام المحاولة والخطأ، والتحويل [7]. تقدير التخمين [16]. لاحظنا أن هناك تفاوت في ظهور هذه العمليات لدى المشاركين والذي يتطلب دراسة مستقبلية حول علاقة ذلك باستخدام الأمثلة أثناء الاستدلال حول التخمينات.

التخمين الأسماء	التخمين 1	التخمين 2	التخمين 3
محمد	المزاوجة	المزاوجة	استدلال قواعدي
أحمد	استدلال دلالي	المزاوجة	استدلال قواعدي
علي	المزاوجة	المزاوجة	المزاوجة
عبد الوهاب	استدلال قواعدي	استدلال قواعدي	استدلال قواعدي
سعيد	المزاوجة	المزاوجة	المزاوجة
كمال	استدلال دلالي	المزاوجة	استدلال دلالي

جدول 5: يظهر نوع الاستدلال المستخدم من طرف المشاركين في التخمينات الثلاثة.

4.5 مدى تحقق فرضيات الدراسة

في ضوء ما جاء في تحليل النتائج، وما ورد في المقال المعتمد في الدراسة [2، ص 118]، فإن الفرضية الأولى محققة: "يعتمد على الأقل أحد طلبة الدكتوراه على الاستدلال القواعدي أكثر من اعتماده على الاستدلال الدلالي". ذلك أن الطالب عبد الوهاب اتبع في كل التخمينات الثلاثة استراتيجية استدلال قواعدية.

كما أظهرت الدراسات النظرية [2، ص126] أن هناك تفاوت في استخدام طلاب الدكتوراه للأمثلة خلال استدلالاتهم. هذا ما يؤكد الجدول 4 الذي يحصي الأمثلة المستخدمة من طرف الطلبة لمناصرة استدلالاتهم: فالتالب عبد الوهاب استخدم مثالا واحدا أثناء معالجته للتخمينات الثلاثة، في حين استخدم الطالب علي 9 أمثلة. وهذا يؤيد تحقق الفرضية الثانية.

بناء على ما جاء في المقال المعتمد [2، ص122]، وما ورد في تحليل نتائجنا فإن الفرضية الثالثة محققة: "يشترك طلبة الدكتوراه في البحث عن المثال المضاد، لكن هناك اختلاف في الكفاءة والتوقيت." لقد قدّم كلّ الطلبة مثالا مضادا على الأقل، ماعدا عبد الوهاب، لدحض صحة تخمين، منهم من استغرق وقتا أكبر لإعطاء مثال مضاد. قد يرجع ذلك إلى ميلهم لاستخدام استراتيجية قواعدية مما أثر سلبا على وقت التقديم. عل عكس الطالب علي الذي كان أكثر استخداما للأمثلة حيث أدى ذلك إلى تقديمه أمثلة مضادة في وقت أقل رغم عدم توفيقه في ذلك في بداية الأمر. دون أن نغفل أيضا العاملين الواردين في المقال وهما عامل الكفاءة واختلاف توجهات تطوير الفهم لكل طالب. ورد في المقال المعتمد [2، ص126] بأن الفرضية الرابعة: "يعتمد طلبة الدكتوراه في استراتيجياتهم الاستدلالية على درجة ألفة الموضوع لديهم." محققة. لكن نتائجنا تخالف ذلك: فالتالبان محمد وأحمد لهما ألفة بالموضوع (بسبب تخصصهما في نظرية الأعداد)، لكنهما استخدمتا الأمثلة بشكل معقول في استدلالتهما. على العكس من ذلك، لم يستخدم الطالب عبد الوهاب أي مثال رغم أن الموضوع غير مألوف لديه (تخصصه تحليل). هذا ما يجعل مألوفية الموضوع، في نظرنا، ليست العامل الوحيد الحاسم في استخدام الأمثلة.

من خلال نتائج الدراسة الميدانية، نجد الفرضيات الثلاث الأولى تنسجم مع ما ورد في المقال المعتمد، بينما الفرضية الرابعة تخالف ذلك. تحققت

أهداف الدراسة إلى حد ما، فتوضيح مفهوم يحتاج إلى مثال، والتجريب يساعد على وضع استراتيجية للاستدلال تمكن المبرهن من الوصول أو الاقتراب أكثر نحو الحل، كما ظهر تنوع في استراتيجية الاستدلال لدى الطلبة من خلال استخدام استراتيجيتي الاستدلال الدلالي والقواعدي، أو المزاوجة بينهما.

خاتمة

لا يُنكر أحد الدور المحوري الذي تلعبه الأمثلة في تعليم وتعلم الرياضيات حيث ظهر ذلك جليا من خلال الدراسات والبحوث المنشورة حولها، أو من خلال ممارسة التدريس [13].. كما أن الخبراء رغم أنهم يبحثون في علاقات رياضية عامة، فإن العديد منهم يعتبرون أنه من المهم العمل ضمن أمثلة نوعية وخاصة بمفهوم [2]. إن الأمثلة تساعد المتعلم في اكتساب المفاهيم الرياضية، وإيضاح ما هو مهم سواء عند تقديمها من طرف المعلم أو استخراجها ذاتيا من طرف المتعلم. وأن لها فائدة لا يستهان بها في الاستدلال الرياضي (كالمثال المولد الذي هو بداية التعميم [15] أو المثال المضاد الذي يدحض التخمين [27]) بشرط استخدامها وفق شروط معينة لتؤدي دورها كرافد لهذا الاستدلال خصوصا وللعملية التعليمية عموما.

شرعنا في إنجاز هذا العمل بالاعتماد على المقال "استخدام طلبة الدكتوراه للأمثلة في تقييم واثبات تخمينات" للباحثين انجلز وألكوك [2]. فقد حاولنا قدر المستطاع التوسع في الأفكار الأساسية التي وردت في المقال بالخصوص ما تعلق بالمثل والتخمين والاستدلال القواعدي والدلالي، كذلك تجريب أفكار المقال الخاصة بالمثل والتخمين والاستدلال داخل أقسام التعليم الثانوي، وأيضا تشخيص بعض القدرات الذهنية التي تنمي لدى طلبة العينة في وضعية نشاط رياضي يَشْمَل على توليد مثال أو استخلاص تخمين.. حاولنا جاهدين تطبيق ذلك في الدراسة الميدانية حيث حاولنا أن نُمِيط اللثام فيها عن سلوك ورد فعل بعض طلبة الدكتوراه ذوي الصلة باستخدامهم للأمثلة

في الاستدلال قصد فحص تخمين. لقد استخلصنا من دراستنا أهمية المثال في توضيح المفهوم الوارد في التخمين وأهميته في الاستدلال، وبالتالي نقترح مايلي:

- أن يتم تحسيس التلاميذ والطلاب بأهمية المثال من خلال نوعية الأنشطة التي تقدم في المسار الدراسي تعود بالفائدة على تعليم وتعلم الرياضيات.

- أن يثمن المعلمون الاستدلال الدلالي لدى المتعلمين ويحفزونهم على استخدامه.

- تنظيم أنشطة حول تبرير صحة أو خطأ تخمينات في الأقسام للمتعلمين من خلال العمل الفوجي أو الفردي.

اعترضت طريقنا صعوبات أثناء إنجاز هذا العمل، بالأخص في الحصول على المراجع الملائمة لهذا الموضوع، وفي توسيع عينة الدراسة، والتحكم في المنهج النوعي لتحليل النتائج كل ذلك تطلب وقتا وجهدا كبيرين. نرجو أن تساهم دراستنا في تسليط بعض الضوء على هذا الموضوع، وتسهيل مهمة من يبحث فيه وتوسيعه مستقبلا من حيث توسيع عينة الدراسة، وكذلك زيادة عدد التخمينات المعطاة وتنوع مجالاتها الرياضية وفق معايير مضبوطة تؤدي إلى ترقية العمل إلى الأفضل وإعطاء أكثر مصداقية للنتائج.

المراجع

[1] سعداوي علال (2017)، بين المثال والتخمين: أي ترابط؟ وأي تفاعل؟ مذكرة ماجستير تخصص تعليمية وتاريخ الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر.

[2] Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students 'use examples in evaluating and proving conjectures. Educational Studies in Mathematics, 69,111,129.

[3] Watson, A., & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples. Published by Lawrence Erlbaum Associates 2005, 248 pp., paperback, ISBN 0805843442 \$58.95.

- [4] Bills, et al. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.
- [5] Weber, K. & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: semantic and syntactic reasoning in the representation system of the proof. In Stylianou, D.A., Blanton M.L. & Knuth, E.J. (Eds.) *the Teaching and Learning of Proof across the K-16 Curriculum*, pp. 323- 338. New York, NY: Routledge.
- [6] Inglis et al. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3–21. .doi: 10.1007/s10649-006-9059-8.
- [7] Antonini, S. (2006). Graduate students' processes in generating examples of mathematical objects, in *Proc. of PME 30* (Prague), v. 2, 57-64.
- [8] Michener, E.R. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science*, 2, 361–383
- [9] Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal of research in Mathematics Education*, 39, 431–459.
- [10] Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In D.O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.
- [11] Mason, J. & Pimm D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277–289. doi: 10.1007/BF00312078.
- [12] Segouat, G. (2001-2002). Exemples, contre-exemples et preuve. I.U.F.M académie de Montpellier. France.
- [13] Alcock, L. (2004). Uses of examples objects in proving, in *Proceedings of the 28th PME Conference*, Bergen, Norway, vol. 2, 17-24.
- [14] Epstein, D., & Levy, S. (1995). Experimentation and proof in mathematics. *Notice of the AMS*, 42(6), 670–674..
- [15] Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147–176. doi: 10.1007/BF00314724.
- [16] Gras R.: 1979, Contributions à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques - Thèse- université de RENNES

- [17] Cañadas MC, Deulofeu J, Figueiras L, Reid DA, Yevdokimov O (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *J. Teach. Learn.* 5(1):55-72.
- [18] Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 137–165. doi: [10.1016/S0364-0213\(99\)80056-1](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1).
- [19] Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 123–151. Doi: [10.1007/BF01274210](https://doi.org/10.1007/BF01274210).
- [20] Weber, K. & Alcock, L. (2008). Syntactic and semantic reasoning processes in advanced mathematics. In M .Blanton, D. Stylianou, and E. Knuth (Eds.) *A proof story across the grades* (inpress). *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209–234. doi:10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1.
- [21] Mejia-Ramos, J. P. Weber, K & Fuller, E. (2015). Factors Influencing Students' Propensity for Semantic and Syntactic Reasoning in Proof Writing: a Case Study. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.* (2015) 1: 187. doi:10.1007/s40753-015-0014-x..
- [22] Pinto, M. & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theories: Givinga extracting meaning. In O.Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol1, pp.281–288), Israel, Haifa.
- [23] Cook, S.W., Mitchell, Z., & Goldin-Meadow, S. (2008). Gesturing makes learning last. *Cognition*, 106, 1047–1058. doi:10.1016/j.cognition.2007.04.010.
- [24] Pinto M. & Tall D. O. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, 22, 2–10.
- [25] Alcock, L. & Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about the irownrole. *Educational Studies in Mathematics*, 58,77 –100. doi: [10.1007/s10649-005-2813-5](https://doi.org/10.1007/s10649-005-2813-5).
- [26] Zazkis, R. & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429–239.
- [27] Balacheff, N. (1982). Construction des connaissances mathématiques, l'approche de Imre Lakatos. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, Tome (1982) no. 2, p. 1-12.

الملحق: نصوص التخمينات وملخص لحلولها

التخمين الأول تناسبه استراتيجية دلالية، والثاني تناسبه المزاجية بين الاستراتيجية الدلالية والقواعدية، والثالث يتوافق مع الاستراتيجية القواعدية. التخمينات الثلاثة هي:

التخمين الأول وملخص حله: "يكون العدد الطبيعي a زائدا إذا وفقط إذا كان مضاعفا للعدد 6".

التخمين خاطئ: الاستلزام الشرطي: هناك مثال مضاد فالعدد 20 زائد ولكنه ليس مضاعف للعدد 6. الاستلزام الكافي: لدينا مثال مضاد هو أن العدد 6 مضاعف لنفسه ولكنه تام.

التخمين الثاني وملخص حله: "إذا كان n تاما فإن kn زائد من أجل كل عدد طبيعي k ".

التخمين خاطئ لما $k=1$ (مثال مضاد). لما $k \neq 1$ نفرض أن n تام قواسمه هي: $d_1, d_2, \dots, d_r$.

أي أن $(d_1 + d_2 + \dots + d_r = 2n)$ ، ولتكن قواسم kn :

$1, kd_1, kd_2, \dots, kd_r$ مجموعها هو $2kn + 1 > 2kn$ ، ومنه kn عدد زائد

التخمين الثالث وملخص حله: "إذا كان n و m عددين زائدين فان nm عدد زائد".

التخمين صحيح نفرض أن n عدد زائد قواسمه هي: $d_1, d_2, \dots, d_r$ و.

$$d_1 + d_2 + \dots + d_r > 2n$$

و m عدد زائد قواسمه هي: $d'_1, d'_2, \dots, d'_r$ و

$d'_1 + d'_2 + \dots + d'_r > 2m$. ستكون بعض قواسم العدد nm هي:

$d_1, d_2, \dots, d_r$ و $d'_1, d'_2, \dots, d'_r$ و $md_1, md_2, \dots, md_r$ و

$nd'_1 + nd'_2 + \dots + nd'_r$. نجد أن:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_r + d'_1 + d'_2 + \dots + d'_r + md_1 + md_2 + \dots + md_r + nd'_1 + nd'_2 + \dots + nd'_r = 2n + 2m + 4nm > 2nm$$