

تأثير فهم المتعلم بالمعارف والصور الذهنية المكتسبة - حالة نهاية
متتالية عددية: دراسة إبستمولوجية وتعليمية

**The influence of mental images and the knowledge
acquired on the comprehension of the learner - The case
of the limit of a sequence: Epistemological and didactic
study**

عبد الهادي و اقيد

جامعة سعد دحلب،

البليدة. الجزائر

hadiouakid@univ-blida.dz

محمد حازي

المدرسة العليا للأساتذة

الشيخ محمد البشير الابراهيمي

بالقبة. الجزائر

mohammed.hazi@g.ens-kouba.dz

محمد الطاهر طالبي *

المدرسة العليا للأساتذة

الشيخ محمد البشير الابراهيمي

بالقبة. الجزائر

mohammed.talbi@g.ens-kouba.dz

الملخص:

تاريخ الاستلام: 2022/10/30
تاريخ القبول: 2023/02/02
تاريخ النشر: 2023/06/30
الكلمات المفتاحية: صور ذهنية؛
تصورات خاطئة؛ متتالية،
تعريف نهاية متتالية؛ خط
مقارب؛ قيمة ملاصقة لمتتالية.

Keywords: Mental images;
Misconceptions; Sequence;
Definition of a sequence
limit; Asymptote; Value
adjacent to a sequence.

يرتكز هذا العمل على تلخيص مركز لمذكرة ماجستير تحمل
نفس العنوان. هذه المذكرة تستند أساسا على المقال المعنون بـ
"الصور الذهنية للطلبة وفهمهم لتعريف نهاية متتالية" لصاحبه
كيونغ هاه رو. عالج المقال فكرة نهاية متتالية، وبالضبط مدى فهم
المتعلمين لتعريفها، وكذلك فحص تأثير صورهم الذهنية على فهم
واستعمال هذا التعريف. اقترح المؤلف نشاط رياضي سمي
"شريط-ع" كأداة تعليمية لمساعدة التلاميذ على فهم تعريف نهاية
متتالية، ودحض التصورات الخاطئة التي لديهم حوله من أجل
بناء تصور صحيح لهذا التعريف. ختمنا هذا العمل بخلاصة
ضمنناها زبدة ما اكتسبناه من المنابع المتعددة التي قذف بنا إليها
هذا العمل وذكرنا حدوده وآفاق توسيعه.

* المؤلف المرسِل

Abstract:

This work is essentially based on mastery memory that revolves around the notion of limit in mathematics. It focuses more specifically on the limits of suites. Its content is based on an article published by Kyeong Hah Roh under the title: "The mental images of students and their understanding of the definitions of the limit of a suite". This article discusses the idea of the limit of a sequence and examines in particular the effect of mental images on understanding and using definition. The author suggests a mathematical activity called the "-tape" activity as a didactic tool to help students understand the definition of the limit of a sequence and refute misconceptions they have about the subject. A general conclusion summarizing the fruits of this work crowns and closes this work. Keywords: Mental images, misconceptions, suites, defining the limit of a suite, adhesion value of a suite.

مقدمة:

أهم دوافع البحث في هذا الموضوع هي: أهميته في الرياضيات والتصورات الخاطئة التي تحيط به والصعوبات التي يواجهها الطلبة والتلاميذ أثناء التعامل مع النهايات. إن النهاية موضوع بحث مهم بالنسبة لكثير من المعلمين الرياضياتيين لكونه يلعب دورا محوريا في الرياضيات. فمنذ نيوتن ولينينز وصياغتهم للتحليل في القرن السابع عشر، لازل يُنظر للنهاية على أنها من أهم المواضيع الأساسية في التحليل. (K. H. Roh, 2005) كما يعد مهما في دراسة التحليل الحقيقي والتابعي. (Liang, 2016) فكل من مفاهيم المشتق والاستمرار والتكامل والتقارب التي تعتبر مهمة في الرياضيات، تُقدّم عن طريق النهاية. (Jordaan, 2005) لا يقتصر التعامل مع مفهوم النهاية على الرياضيات فقط، بل هو ظاهرة موجودة في الحياة اليومية حيث تجارب المتعلمين قد تكون في وقت مبكر لا نتوقعه. (Roh, 2005)

هناك إجماع في كون المتعلمين تعترضهم عدة صعوبات في فهم النهاية، هذه الصعوبات قد تكون رمزية (Jordaan, 2005) أو لغوية (Tall, 1993) مع وجود تعارض بين الصور الذهنية للمتعلمين والمعنى الرياضي للنهاية (Roh, 2005)، إضافة إلى ضعف وعدم تناسب الروابط العقلية بين هذه المواضيع، فالبناء الجيد للحقل المفاهيمي لمفاهيم التحليل يعتبر ضروريا (Jordaan, 2005)

(2005). وعليه تحاول هذه الدراسة إيجاد التصورات الخاطئة مع محاولة تعديلها ووصف لكيفية تعليم وتعلم مفهوم النهاية. إشكالية الدراسة:

يبتدئ المتعلمون دراستهم للتحليل بتعلم مواضيع التوابع والنهايات، غير أن موضوع النهاية يبقى مهماً خاصة في الكتب المدرسية التي لا تولي إلا القليل من الاهتمام للجوانب النظرية لهذا المفهوم. فحسب الباحث (Liang, 1916) فإن معالجة الكتب المدرسية على وجه الخصوص لمفهوم النهاية له تأثيره من خلال استعمال نوع واحد من الأمثلة أو التركيز على إجراءات الحساب مع إهمال دور التعريف. كما يؤكد (Cornu, 2002) بأن معظم التمارين لا تركز على مفهوم النهاية بل على المتراجحات أو روتين الحسابات، نظراً لذلك، فليس من المستغرب أن يلتقط المتعلمون بعض المعتقدات الضمنية الخاطئة. أما المدرسون فيركزون على حساب النهاية وعلى التمثيل البياني ويهملون التعريف (Liang, 2016). كنتيجة لذلك، فإن المتعلم يتصور نهاية متتالية كقيمة معينة بحيث كلما "يؤول" الدليل n إلى ما لا نهاية، فإن المتتالية "تؤول" إلى تلك القيمة. هذا التفكير قد يؤدي إلى التعارض مع التعريف الرياضي حيث الانطلاق يتم من قيمة النهاية ثم البحث عما إذا كانت كل الحدود بعد دليل معين n تقع في جوار النهاية، فلا عجب إذن أن يتولد لدى بعض المتعلمين نوعاً من الصراع بين ما تم التوصل إليه بالحساب الجبري وما يتصورونه حدسياً. (Roh, 2005) إن العديد من التصورات الخاطئة تكون حاضرة أثناء التفكير الحدسي للطلبة حول مفهوم النهاية. (Mamona-Downs, 2001) يأتي المتعلم للقسم ومعه مجموعة من الأفكار الحدسية والصور الذهنية والمعارف حول النهاية التي تكونت من حياته اليومية أو نتجت عن سوء فهم في مراحل

تعليمية سابقة. إن هذه الأفكار لا تزول، بل تتداخل مع المعرفة الجديدة ثم تُعدل وتتأقلم لتشكل التصور الخاص به. (Cornu, 2002)

إن مواجهة المتعلم بتعريف نهاية متتالية، وتكوين معنى سليم له من خلال التوفيق بينه وبين الصور الذهنية التي يملكها حول النهاية هو إشكال حقيقي تحاول هذه الدراسة علاجه، وعليه يكون سؤال البحث: "كيف يتأثر فهم المتعلم لتعريف نهاية متتالية بأنواع الصور الذهنية المكتسبة حول النهايات خلال تعلمهم السابق؟

الأسئلة التالية قد تساهم في تأطير هذا الإشكال:

ما هي أنواع الصور الذهنية الخاطئة لدى المتعلم حول نهاية متتالية؟ وما هي مصادر صعوباتها التي تواجهه لفهمها؟ هل هناك طريقة بيداغوجية تساعد التلاميذ والطلبة على تشكيل صور ذهنية تتناسب مع تعريف نهاية متتالية؟

أهداف الدراسة:

يصبو هذا العمل إلى تحقيق مجموعة من الأهداف المعرفية منها بالخصوص:

- تحديد الصور الذهنية الخاطئة للمتعلم وكذلك مصادر صعوباتها والتركيز سيكون على نهاية متتالية. يتم تحقيق ذلك بجمع وتحليل معلومات حول فهم المتعلم للنهية من خلال تجارب الباحثين في المجال.
- الكشف عن مدى تأثير الصور الذهنية المكتسبة في التعلم السابق على فهم تعريف نهاية متتالية. يتم تحقيق ذلك بعمل تحليلي للتعريف عن طريق تحديد دور كل رمز فيه، ووصف كيفية تطوير واستخدام الصور الذهنية حول الموضوع، وتحسين بعض المعتقدات الحدسية.

- تقديم اقتراحات يمكن أن تعين على التقليل من تأثير هذه العوائق بالخصوص اقتراح نشاط يدوي يسمى "شريط E" كطريقة عملية بيداغوجية للمساعدة على فهم تعريف النهاية.

1. الخلقية النظرية

1.1. مقدمة:

كان المطوّرون الأوائل للتحليل قادرين على صقل أفكارهم الحدسية حول عمليات النهاية في منهجية ذات قدر كبير من الكفاءة والدقة. إذن من المفيد تقديم مناقشة من شأنها أن تعزّز أفكار الطلاب البديهية حول المتتاليات والنهايات من حيث الصحة الرياضية. لكن دون أن نتوقع من الطلبة أن يقدّروا تمامًا الدوافع التي قادت الرياضياتيين عبر التاريخ لهذا الصقل، فحدسهم يبقى غامضًا ومتناقضًا ومشتتًا لتكوين أي صورة ذهنية ملائمة. ومن هنا يجب أن ننظر إلى التعريف لاستخراج مثل هذه الصور الذهنية التي ترتبط مع الإدراك. كما أن الترميز الجبري كذلك له دور مهم في تطور الرياضيات، إذ أن التعبير المتناسق والموجز للخصائص الرياضية يُسهّل التواصل بين المجتمع الرياضي ويشكل أساسًا للبراهين. لكن تعريف نهاية متتالية يُعدُّ صعب الفهم والاستعمال نظرًا لتعقيد بنيته. بالنسبة للمتعلّم، فالمشكل يكمن في إيجاد الأسلوب البسيط للتعبير عن التعريف ثم محتوى التعريف. والعنصران معًا مؤثران جدًّا في تعريف نهاية متتالية. (Mamona-Downs, 2001)

1.2. جانب تاريخي إبستمولوجي لمفهوم النهاية:

يعد مفهوم النهاية موضوعًا مركزيًا في التحليل الرياضي وميزة أساسية له، إنه ولئن لم يعرف القولية الرياضية الصريحة إلا في منتصف القرن التاسع عشر، لكن تواجده الضمني ضارب في القدم حيث تمتد جذوره إلى قرون قبل الميلاد. (حازي، 2013) لعل بدايات هذا المفهوم في الظهور بصفة

جليّة، تعود إلى أعمال الفيلسوف اليوناني زينون حوالي 490 ق. م (Bedat & al, 2006) بمفارقاته الفلسفية التي تكشف عن تأمل عميق حول مفهوم المستمر وتنطوي على بذور مفهوم النهاية.

لقد تم تطوير مُصطلح النهاية كوسيلة لوضع الحساب التفاضلي والتكاملي على أساس دقيق، وبقي واحدا من أهم المفاهيم وأحيانا من أصعبها للطلبة نحو فهم الرياضيات. (Jordaan, 2005) العديد من الرياضياتيين بحثوا فيه في أوقات مختلفة وبمقاربات مختلفة وواجهوا عدة عقبات ولم يكن هناك تعريف جلي لها. لكن مجهودات المجتمع الرياضي توج بظهور طريقة تفكير جديدة حول نسب الكميات متناهية الصغر تم تقديمها من طرف دامبير وهي طريقة النهايات. (Hairer & Wanner, 2000) كما أن كوشي نشر ما سماه دروس التحليل تضمنت دقة غير عادية في وقته حيث عرّف المشتق والتكامل كنهايات لتتابع مما غير فهمنا للتحليل ودعم البنية الكليّة له. لقد فتح الباب لمرحلة غنية بالنمو والإبداع في الرياضيات. (Job & Schneider, 2014; Jordaan, 2005) لقد جمع الصيغة المضبوطة لمفهوم النهاية والتي جمعت كل التعارضات واستعمل في ذلك صياغة لغوية. (Bagni, 2005) كما تطرق إلى الرمز المعروف في النهاية $\lim$ (Hairer & Wanner, 2000). أخيرا، أعطى فيرشتراس التعريف الحديث للنهاية بعدما حسّن أعمال رياضياتيين سابقين من بينهم كوشي. لقد قادّه تصوّره للنهاية إلى تمثيل التعريف عن طريق الرموز. (Bagni, 2005)

هناك أربعة حواجز إبستمولوجية كبرى في تاريخ مفهوم النهاية وهي الفشل في ربط الهندسة بالأعداد، فكرة لا متناهي الكبر ولا متناهي الصغر، الجانب الفلسفي لفكرة النهاية، فكرة هل تُبلغ النهاية أم لا. (Elia et al., 2009) الطرائق التي استعملها الرياضياتيون جلبت تنويرا مهما لفهم النماذج التي ندرسها اليوم. كما سمح التطور التاريخي لمفهوم النهاية بتحديد الصعوبات

الحقيقية له، وبفهم أن التعريف الرياضي غير كافٍ لمحو هذه الصعوبات. (Tall & Vinner, 1981) لقد تم تقديم فكرة النهاية من أجل حل ثلاث أنواع من الصعوبات: صعوبات هندسية (مثلا حسابات المساحات/ طريقة إفناء الفرق)، مسألة مجموع ونسبة تقارب السلاسل، مسائل التفاضل المنبثقة من قضية العلاقة بين كميتين تقتربان نحو الصفر في نفس الوقت. (Elia et al., 2009)

3.1. جانب تعليمي لمفهوم النهاية:

إن أهم الجوانب التي تساهم في خلق صعوبات لفهم مفهومي النهاية ونهاية متتالية هي:

عدم توافق الصور الذهنية التي لدى المتعلمون مع التعريف (Liang, 2016)، كما أن حواجز المتعلمين في تعلم النهايات مرتبطة بمعتقداتهم ومنظورهم للمعرفة الرياضية. (Roh, 2005) إن معالجة الكتب المدرسية لمفهوم النهاية له تأثيره من خلال استعمال نوع واحد من الأمثلة، أو التركيز على إجراءات الحساب مع إهمال دور التعريف. (Liang, 2016) معظم التمارين تركز على روتين الحسابات، وعليه فالمتعلمون يلتقطون بعض المعتقدات الضمنية الخاطئة (Cornu, 2002). حسب العديد من الطلبة، فإن المتتالية الثابتة ليست لها نهاية لأنهم لا يجدون أي معنى للاقترب نحو قيمة معينة. بعض المتعلمين لا يفرقون بين معنى "التقارب" و "التراكم" وهذا يؤدي بهم للاعتقاد أنه يمكن لمتتالية أن تحظى بنهايتين (Roh, 2005). يعتقد بعض الأساتذة أن موضوع نهاية متتالية صعب جدا على الطلبة، وأحيانا يطلبون منهم حفظ التعريف وتطبيقه خوارزميا (Liang, 2016). إن تعقيد البنية المنطقية للتعريف الإيسيلوني هو مصدر مؤثر آخر على فهم التعريف. مثلا يصعب على الطلبة أن يستوعبوا كيف تُستخرج المساواة " $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ " من المتراجحات

" $\forall \varepsilon > 0 \dots |a_n - \ell| < \varepsilon$ ". فهم يظنون أنه ليس من الضروري فهم التعريف إن كان لا يُوضح كيفية إيجاد النهاية! (Liang, 2016; Pinto & Tall, 2002) وعليه فإن حاجة الطالب إلى التدرج في تعلم نهاية تجعله يكسب استعدادا للتحليل (Hight, 1963)، لذلك من المفيد تقديم مفهوم النهاية بشكل غير رسمي، ثم يُعطى التعريف الرسمي على النحو التالي:

- تعريف غير رسمي لنهاية متتالية (Roh, 2008): $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية. إذا كان a_n يقترب من عدد ℓ كلما كان n يؤول إلى ∞ ، نقول إن نهاية المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي ℓ .

- تعريف نهاية متتالية في الكتاب المدرسي رياضيات للسنتين الثانية والثالثة من التعليم الثانوي (2009): $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية، ℓ عدد حقيقي. قبل المتتالية ℓ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة. نكتب عندئذ: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$

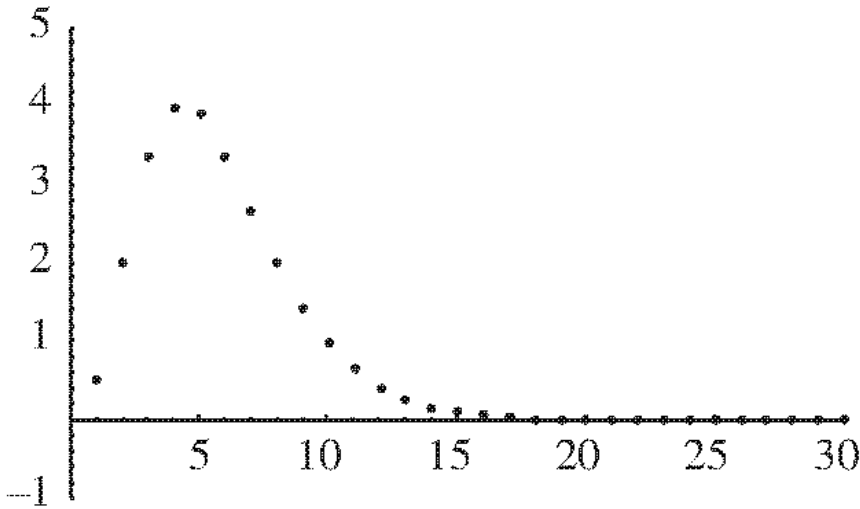
- تعريف نهاية متتالية (التعريف الإيسيلوني) (Roh, 2007; Roh, 2010b): نقول عن متتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد ε موجب تماما، يوجد عدد طبيعي N (متعلق بـ ε) بحيث من أجل كل n أكبر من N ، فإن $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

مثال 1: المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ $a_n = \frac{1}{n}$ نهايتها هي الصفر. نكتب $\varepsilon < \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = |a_n - \ell|$. هذا يؤدي إلى أن $n > \frac{1}{\varepsilon}$. إذن يكفي أن نختار $N > \frac{1}{\varepsilon}$ ، مثلا $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. وأي عدد طبيعي أكبر

من $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ صالح أن يكون قيمة لـ N لأنه بالضرورة يحقق التعريف. (واقيد، 2017)

مثال 2: يمثل الشكل 01 رسماً بيانياً توضيحياً لنهاية المتتالية الحقيقية

$$\left(\frac{n^3}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$



الشكل 01: تمثيل بياني يوضح نهاية المتتالية الحقيقية السابقة.

في السنة الثانية والثالثة من التعليم الثانوي، يمكن أن يتم التدريس بطريقة غير رسمية، لكن ذلك يعتمد على الطرائق الإجرائية بينما يتم التقليل من أهمية توضيح المفاهيم والنظريات التي بُنيت عليها هذه الطرائق. (Mamona-Downs, 2001) ينص المنهاج التعليمي: "نظرا لصعوبة تقديم مفهوم النهاية، في هذا المستوى، انطلاقا من التعريف الرياضي للمعتاد، نكتفي بمقاربة تجريبية وحدسية له." (اللجنة الوطنية للمناهج، 2005) لكن إذا أردنا من الطلبة أن يكونوا مرّنين أثناء حل المسائل، فيجب أولا أن يمتلكوا فكرة واضحة وثابتة حول المفاهيم المتضمنة. لذلك هناك حاجة للعمل بالتعاريف بشكل رسمي في السنة الأولى جامعي من أجل إزالة الضبابية الناجمة

عن الشك والمعتقدات الحدسية. (Mamona-Downs, 2001) إن فحص التعريف المتعلق بنهاية متتالية حقيقية يمكن من الحصول على صورة ذهنية تكون متماسكة بقوة معه. لذلك من المفيد تحليل التعريف الإبسيلوني (Mamona-Downs, 2001) كما يلي:

- تأثير التعريف

يبدو الترميز الوارد في التعريف شاقا على الفهم حيث معظم الطلبة بحاجة لوقت ليألفوه. كما أن العدد منهم يتفادونه. هناك سمة في التعريف تفرض انتقالا من التركيز على حساب حدود معينة للمتتالية إلى التركيز على المجالات $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ التي مركزها النهاية المحتملة l . بمجرد أن يتم هذا الانتقال، فالتعريف يأخذ شكلا أكثر وضوحا ويبقى التعبير عنه بمصطلح رياضي.

- فهم المتراجحة $|a_n - l| < \varepsilon$

نرى المتراجحة كعلاقة بين ثلاثة أعداد حقيقية هي a_n و l و ε (بفرض أن n ثابت هنا). يمكن ترجمتها لتكون أكثر حدسا مثل: "المسافة بين n و l أقل من ε "، أو استبدال العبارة $|a_n - l| < \varepsilon$ بالعبارة $a_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. إن l هو القيمة المقترحة للنهاية، فهو يملك صفة الثابت، a_n هو حد من حدود متتالية معطاة، وبما أننا نريد أن نرى إن كان a_n يقترب من l كلما كبر n ، فإن a_n يُنظر إليه كمتغير، وأخيرا ε هو أداة لقياس مدى اقتراب حدود المتتالية من l ، فهو يلعب دور الثابت.

- قيمة N وعلاقتها بـ ε

ما هي حدود المتتالية وما هي قيم ε التي يجب أن نأخذها عند العمل بهذه المتراجحة وهذا ما يجعل اتخاذ القرار يكون على أساسها a_n سيتغير في حين ε يجب أن يكون ثابتا. وهذا من أجل إيجاد الدليل N لحد من حدود المتتالية

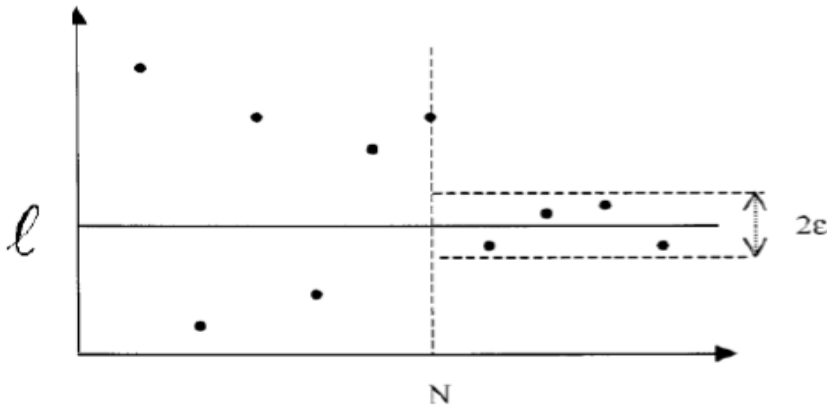
الذي يكون كل حدٍ بعده يحقق المتراجحة. إن N يدل على موضع في المتتالية. لنأمل في الوصف غير الرسمي التالي: "ليكن ε معطى، هناك موضع معين N بحيث تكون المسافة بين l وكل حدود المتتالية بعده ضمن المسافة ε ". مثل هذه العبارات اللفظية قد تساعد في الفهم لكنها لا يجب أن تعوّض التعريف.

- المعيار ε

إن الدور الذي يلعبه ε هو تزويدنا بطريقة لمعرفة أي الحدود للمتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقع ضمن المسافة الموصوفة في التعريف. إن تغيّر قيمة ε يسمح لنا بالقيام بذلك من أجل مسافات صغيرة عشوائية. إن التعريف يجعل ε يتناقص في قيمه بحيث يصبح أصغر فأصغر عشوائياً، فهذه الطريقة هي التي تجعلنا نفحص بها إن كانت كل حدود المتتالية تقترب من l .

- أهمية التمثيل البياني في تقديم تعريف نهاية متتالية

يفضل الطلبة توضيح التعريف برسم بياني (الشكل 02 أدناه) لأن التمثيل البياني يوفر بيئة ملائمة أكثر بكثير بالمقارنة مع العبارة المتضمنة للمتراجحات والمكتمات في التعريف. (Mamona-Downs, 2001)

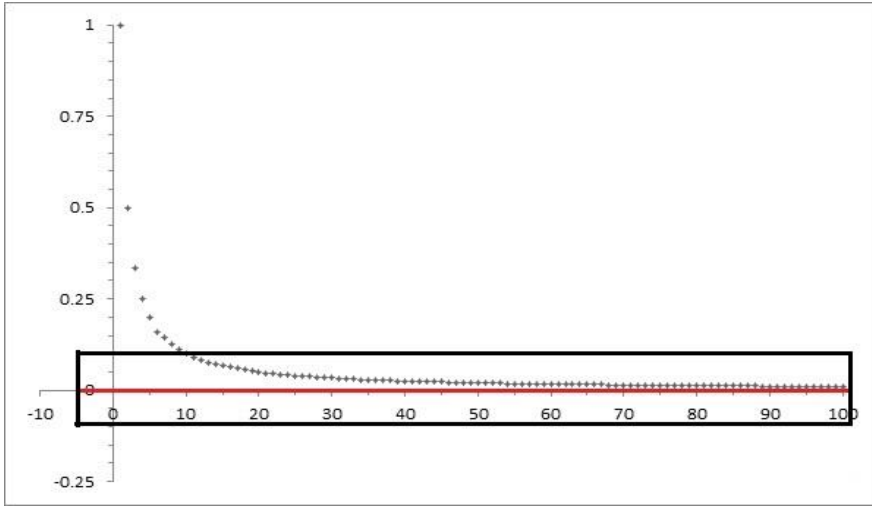


الشكل 02: تمثيل بياني لمتتالية نهايتها l .

إن المؤشر ε له مظهر ملموس باعتباره نصف عرض الشريط الذي يتوسطه المستقيم $y = l$. إن البيان يعطي وسيلة جيدة لتغيير ε بشكل مناسب حيث أن الصعوبة المحتملة للعبارة " $\forall \varepsilon > 0$ تبدو أقل إشكالية، فالنقاط التي تمثل عناصر المتتالية والخط $y = l$ هي عناصر ثابتة، في حين أن الشريط والخط $x = N$ هي عناصر متغيرة. إن كيفية تمثيل النهاية l على شكل مستقيم أفقي تجعل الطالب يتصور أن حدود المتتالية مختلفة عن النهاية. كما أن هذا التمثيل يساعد الطلبة على فهم أن l هو عدد له صلة بالمتتالية. وهكذا توجد حجج معقولة مبنية على التمثيل البياني قد تساعد الطلبة على إلغاء تصورات خاطئة مثل وجود حد أخير في متتالية غير منتهية، أو كون النهاية قيمة أو موضعا لهذا الحد الأخير أو أن المتتالية لا تبلغ نهايتها.

- نشاط "شريط ε " من أجل تصور صحيح للتعريف

نشاط "شريط ε " هو نشاط يدوي مع أداة ملموسة اقترحه المقال الذي اتخذناه أساسا لهذا العمل. يعتبر هذا النشاط طريقة تعليمية لمساعدة الطلبة على فهم نهاية متتالية من خلال التعريف، وكذا مساعدتهم على بناء تصور صحيح. أشرطة ε هي أشرطة مستطيلة مصنوعة من الورق الشفاف مرسوم في وسطها خط أحمر، توضع فوق المنحنى البياني لمتتالية. يمكن صنع عدة أشرطة بحيث يكون لكل شريط عرض معين حيث أن نصف عرض كل شريط هو قيمة ε المختارة. ففي الحالة التي يكون هذا الخط لشريط ما واقعا على عدد حقيقي l ، يكون هذا العدد هو قيمة النهاية التي نفحصها، وحدود المتتالية التي داخل الشريط هي التي تحقق المتراجحة $|a_n - l| < \varepsilon$ (Roh, 2008) (أنظر الشكل 3).



الشكل 03: تمثيل بياني للمتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ فوقه شريط $\mathcal{E}$ نصف عرضه $\mathcal{E} = 0.1$.

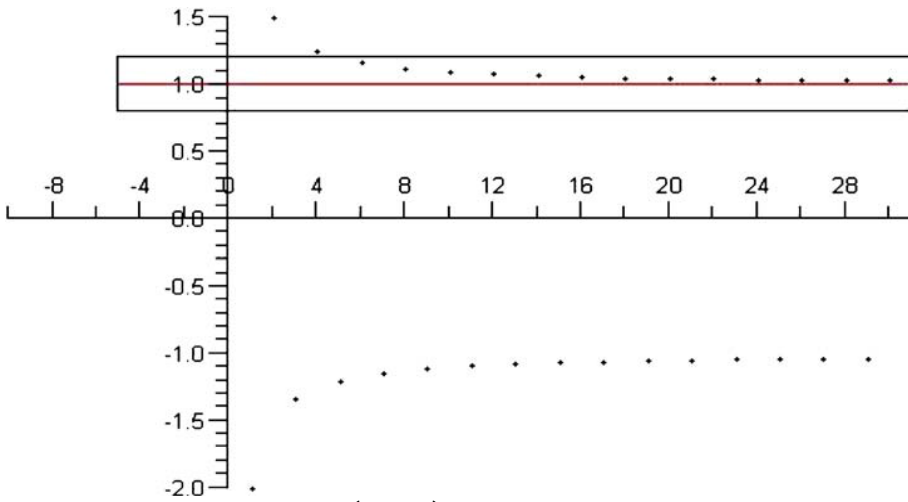
يُطلب من الطلبة وضع أشرطة لها عروض مختلفة فوق نفس المنحنى البياني لمتتالية من أجل تغطية النهاية المحتملة. خلال كل نشاط، تكون للطلبة فرصة من أجل أن يدرسوا ويراقبوا عيانا العلاقة بين $\mathcal{E}$ و N في تعريف نهاية متتالية من خلال تغيير الأشرطة. بعد أن يفهم الطلبة كيفية العمل بأشرطة $\mathcal{E}$ ، تقدم لهم العبارتان التاليتان:

(أ) عن طريق شريط $\mathcal{E}$ ، تعني العبارة "قيمة l هي نهاية لمتتالية" أن وضع أي شريط $\mathcal{E}$ فوق المنحنى متمركزا عند l يجعل عددا غير منتهٍ من نقاط المنحنى البياني للمتتالية مغطى بهذا الشريط.

(ب) عن طريق شريط $\mathcal{E}$ ، تعني العبارة "قيمة l هي نهاية لمتتالية" أن وضع أي شريط $\mathcal{E}$ فوق المنحنى متمركزا عند l ، يجعل عددا منتهيا من نقاط المنحنى البياني للمتتالية غير مغطى بالشريط.

صياغة العبارتين مألوفة وقابلة للفهم من طرف الطلبة. بعد استعمال عدة متتاليات متنوعة وحساب نهاياتها جبريا، يطلب من الطلبة مقارنة إجاباتهم مع الإجابات الناتجة باستعمال العبارتين (أ) و (ب). القصد من ذلك هو إيجاد أيهما

هو الأصح والأنسب لوصف نهاية متتالية (Roh, 2010b). لم يستطع بعض الطلبة أن يميزوا الفرق بينهما، إذ كان اعتقادهم أن كلا منهما يدل على الآخر. لكن هذا الاعتقاد غالبا ما يكون مؤقتا، إذ يتعرف الطلبة على الفرق بين العبارتين بعد رؤية مثال لمتتالية متباعدة مثل المتتالية ذات الحد العام $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ من خلال نشاط شريط ε (Monaghan et al., 1994) (أنظر الشكل 04).



الشكل 04: تمثيل بياني للمتتالية ذات الحد العام $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ فوقه شريط ε .

حسب تعريف نهاية متتالية: من أجل ε معطى يمكن إيجاد دليل N متعلق بـ ε بحيث تكون كل الحدود التي بعد a_N تحقق المتراجحة $|a_n - \ell| < \varepsilon$. هذا يعني أنه تبقى فقط حدود عددها منته قبل a_N لا تحقق المتراجحة. وهذا يكافئ منطقيا العبارة (ب).

إن الأهداف التعليمية من نشاط شريط ε هي تقديم معيار عام للطلبة لتحديد تقارب متتالية، مساعدة الطلبة على تطوير صور ذهنية صحيحة عن النهاية، مساعدة الطلبة على فهم التعريف (الإبسلوني) لنهاية متتالية وخاصة العلاقة بين ε و N ، التفريق بين مفهوم نهاية متتالية ومفاهيم أخرى كالنقاط

الملاصقة والمستقيمات المتقاربة (K. H. Roh, 2010b). طُبِّقَ نشاط شريط ع كأداة بحث وقد يكون استعماله مفيداً في القسم، لأنه يمكن أن يجعل الطلبة يواجهون حواجز إبستمولوجية، ويتعرفون على الفوارق غير الملحوظة بين مفهوم النهاية ومفاهيم أخرى مثل المستقيمات المقاربة ونقاط الملاصقة. في الأخير يتجاوزون هذه الحواجز مما يساعدهم على تعلم التعريف (K. H. Roh, 2008).

4.1. فرضيات الدراسة:

انطلاقاً من المقال المُقَعَّد لهذه الدراسة ومن بحوث أخرى، يمكن أن نصوغ فرضيات الدراسة كما يلي:

الفرضية (1): لدى المتعلم عدة أنواع من الصور الذهنية الخاطئة حول نهاية متتالية، مثل تصورها كمستقيم مقارب لا يمكن بلوغه، أو تصورها كقيمة ملاصقة، أو هي الحد الأعلى أو الأدنى. (Mamona-Downs, 2001; Roh, 2008)

الفرضية (2): الصور الذهنية التي لدى المتعلم حول نهاية متتالية والمكتسبة سابقاً، تؤثر بشكل مباشر على فهم تعريف نهاية متتالية. (Roh, 2008)

الفرضية (3): بالنسبة لكثير من المتعلمين، التعريف الإبسيلوني لنهاية متتالية ليس هو الوصف المناسب لنهاية متتالية، وبالتالي فهم لا يستعملونه إلا نادراً، أو لما يُفرض عليهم استعماله. (Roh, 2005, 2008)

الفرضية (4): يصعب على المتعلمين استيعاب واستعمال تعريف نهاية متتالية؛ لأنهم لا يجدون فيه معنى لـ "التقارب". كنتيجة لذلك، فالطلبة لا يفهمون العلاقة بين ϵ و N ، وبالتالي لا يهتم الترتيب الذي يظهر به ϵ و N في التعريف. (Roh, 2005, 2008)

2. العمل الميداني

1.2. مقدمة:

نجد موضوع المتتاليات ونهاياتها مُدرجا في برامج التعليم الثانوية الجزائرية للسنتين الثانية والثالثة في شعب العلوم التجريبية والتقني رياضي والرياضيات. ففي السنة الثانية ثانوي يقدم مفهوم النهاية عن طريق مقارنة تجريبية وحدسية له من خلال وضعيات ذات دلالة. لكن يقترح تعمقا أكثر في شعبي الرياضيات والرياضيات التقنية بتوظيف مكتسبات التلاميذ في السنة الأولى ثانوي حول المسافة والمجالات والحصص من خلال أمثلة (اللجنة الوطنية للمناهج، 2005) أما في السنة الثالثة ثانوي، فيدرس سلوك ونهاية متتالية وتُطبّق النتائج المُحصل عليها في دراسة نهايات المتتاليات في السنة الثانية ثانوي وتتم دراسة متتاليات معرفة باستعمال دالة f بعلاقة من الشكل $U_n = f(n)$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ وتُطبق المبرهنات المعروفة على الدوال عندما يؤول n إلى ما لانهاية (اللجنة الوطنية للمناهج، 2006).

من خلال هذه الدراسة، نريد معرفة لماذا نهاية المتتاليات العددية ليست مُستوعبة من طرف الطلبة. لا نظن أن الجواب يكمن فقط في عوامل عامة مثل التواصل غير الجيد بين الأستاذ والطلبة، أو عدم بذل الجهد الكافي من طرف الطلاب. بل هناك أسباب محدّدة موجودة في المفهوم نفسه تخلق عدة صعوبات تُعزّزها تلك العوامل العامة. من أجل جمع المعلومات حول الموضوع، كان لزاما علينا النزول إلى الميدان بغرض اختبار جملة من الفرضيات، ومحاولة الإجابة عن بعض التساؤلات. إننا نطمح من خلال هذا العمل الميداني إلى تحقيق عدة أهداف منها: فحص مدى فهم الطلبة والتلاميذ لمفهوم نهاية متتالية عموما، ومدى فهمهم للتعريف الرياضي خاصا. معرفة أنواع

الصور الذهنية التي لدى الطلبة والتلاميذ حول الموضوع، ومدى تأثيرها على الفهم الصحيح لنهاية متتالية.

2.2. منهجية الدراسة:

تشمل خارطة سير الدراسة وعينة الدراسة، والمشاكل المقترحة في الدراسة مع تبريرها،

- خارطة سير الدراسة:

نظرا لصعوبة إجراء المقابلات الشفهية مع المتعلمين، فقد تم تعويض ذلك بإخضاعهم لمشاكل مختارة بعناية تساهم في التحقق من فرضيات الدراسة وتحليلها نوعيا. تمّ بناء استبيانين يشملان على نفس المشاكل الستة مع اختلاف طفيف في الصياغة. الاستبيان الأول يخص السنة الثالثة ثانوي شعبة علوم تجريبية وتقني رياضي ورياضيات ومدة الإنجاز ساعة واحدة. الاستبيان الثاني يخص السنة الأولى جامعي علوم دقيقة ومدة الإنجاز 45 دقيقة. الاختلاف في المدة راجع إلى أن ساعة واحدة هي مدة حصة في مادة الرياضيات في التعليم الثانوي، و45 دقيقة تمثل نصف حصة في التوقيت الجامعي. وزع الاستبيانان من طرف مؤطرين هم أساتذة في التعليم الثانوي والتعليم الجامعي، تنبع مصداقيتهم في كونهم ذوو علاقة مباشرة بالموضوع المدروس ويهتمون بهذا المفهوم بقدر كاف يمنح للنتائج المتحصل عليها المصداقية اللازمة.

- عينة الدراسة:

تم القيام بهذا العمل الميداني خلال شهري أبريل وماي من سنة 2016 مع عينة تشمل فئتين مختلفتين هما فئة من تلاميذ السنة الثالثة ثانوي (174 تلميذا من ولايات الشلف والمسيلة وخنشلة) وفئة من طلبة السنة الأولى جامعي (37 طالبا من المدرسة العليا للأساتذة في القبة والأغواط). من أسباب الاهتمام بهاتين الفئتين نذكر إشكالية الانتقال من الجانب الحدسي إلى الجانب النظري

الرياضياتي للتحليل عموما ونهاية متتالية خصوصا والذي غالبا ما يحدث بين هاتين المرحلتين. سبب آخر وهو دراسة تأثير الصور الذهنية التي اكتسبها الطلبة في الثانوية على فهم التعريف الإبسيلوني.

- مشاكل الدراسة (مصادرها وتبرير اختيارها وتحليل منتوج المتعلمين)

بسبب الحيز المخصص للدراسة، تم اختيار ثلاثة مشاكل فقط من بين المشاكل الستة التي يشملها كل استبيان. مصادرها ناتجة من المقالات والبحوث المنشورة بالخصوص المقال المعتمد عليه في هذه الدراسة والمراجع الموجودة فيه. لقد حاولنا جعل أسئلة الاستبيان تسير نتائج الجانب النظري. هدفها هو فحص مدى فهم الطلبة والتلاميذ لموضوع نهاية متتالية ومعرفة أنواع الصور الذهنية التي لديهم وكيفية تأثيرها على فهم نهاية متتالية. قد يكون بعض هذه المشاكل صعبا وبعضها سهلا، غير أننا حاولنا أن ندرج فيها أسئلة غير روتينية علما أن أحد الأسباب المؤثرة في تكوين صور ذهنية غير متوافقة مع تعريف نهاية متتالية هو استعمال نوع واحد من الأمثلة في التدريس. لقد كانت معظم المتتاليات غير رتيبة وبعضها مكوّن من جزأين وأخرى مُقدّمة عن طريق تمثيل بياني. القصد من تنويع صيغ المتتاليات هو معرفة هل يفهم المتعلمون أن الحدود الأولى من متتالية لا تؤثر على نهايتها.

المشكل 1:

كل متتالية مما يلي معرفة بعدها العام حيث n عدد طبيعي.

(أ) أعط نهاية كل متتالية إن وُجدت وإلا اكتب غير موجودة:

الحالة الأولى: $a_n = \frac{1}{n}$, $t_n = 2$, $z_n = (-1)^n$, $k_n = \frac{n^3}{2n}$.

الحالة الثانية: $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}; n \neq 10^6, \\ 2; n = 10^6. \end{cases}$, $w_n = V_n = \begin{cases} 1; n \text{ زوجي}, \\ \frac{1}{n}; n \text{ فردي}. \end{cases}$

$\begin{cases} n, \text{ زوجي}; 0, \\ n, \text{ فردي}; \frac{1}{n}. \end{cases}$ (ب) المتتاليات التي ألفتها في دراستك تشبه متتاليات: الحالة الأولى الحالة الثانية الحالتان معا (ج) هل توجد قيمة لـ n تجعل المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تساوي 0؟ لا نعم
--

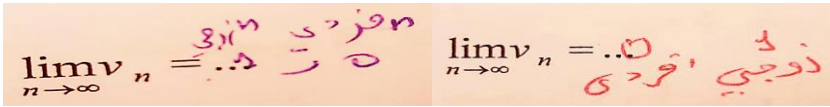
يمثل الجدول 01 سبب اختيار المتتاليات الواردة في المشكل 1.

جدول 01: سبب اختيار المتتاليات.

الحد العام للمتتالية	سبب اختيار المتتالية
$a_n = \frac{1}{n}$ $w_n = \begin{cases} 0, \text{ زوجي}; \\ \frac{1}{n}, \text{ فردي}; \end{cases}$	المتتالية الأولى رتيبة ولا تبلغ نهايتها، وهي متتالية مألوفة لدى المتعلمين، تجعل بعضهم يتصور أن كل متتالية لا يمكن أن تساوي قيمة نهايتها. بينما المتتالية الثانية فحدودها تساوي قيمة النهاية.
$t_n = 2$	متتالية ثابتة. لا يرى فيها بعض المتعلمين أي دليل أو معنى للاقتراب، فيتصور معظمهم أنه ليست لها نهاية.
$z_n = (-1)^n$ $V_n = \begin{cases} 1, \text{ زوجي}; \\ \frac{1}{n}, \text{ فردي}; \end{cases}$	تصور المتعلمين أن لكل من المتتاليتين نهايتان مختلفتان لأنها تقترب من قيمتين كلما كبر n.
$k_n = \frac{n^3}{2^n}$ $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}; n \neq 10^6, \\ 2; n = 10^6. \end{cases}$	المتتالية الأولى متزايدة بالنسبة للحدود الخمسة الأولى، ثم تتناقص انطلاقا من الحد السادس، نهايتها هي الصفر. أما المتتالية الثانية فكان اختيار الدليل $n = 10^6$ مقصودا، لمعرفة هل المتعلم يفهم بأن عددا منتهيا من الحدود لا يؤثر على نهاية متتالية؟

تحليل أجوبة المتعلمين:

إن معظمهم المتعلمين أجابوا بالصواب فيما يخص متتاليات الحالة الأولى وذلك راجع لتعودهم على التعامل مع هذا النوع من المتتاليات. لكن وجدنا نسبة معتبرة أجابوا بالخطأ عن باقي المتتاليات. مثلاً نهاية المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أخطأ في إيجادها 20 طالبا من بين 37 أي أكثر من 54%، وهذان مثالان عن الأجوبة:

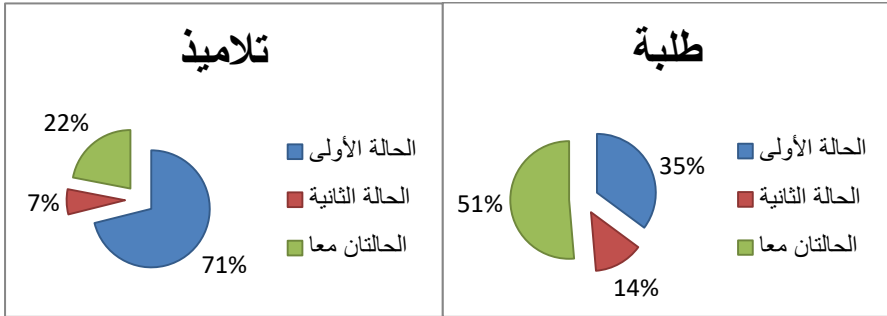


$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0.5 \quad \text{نصف}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{صفر}$$

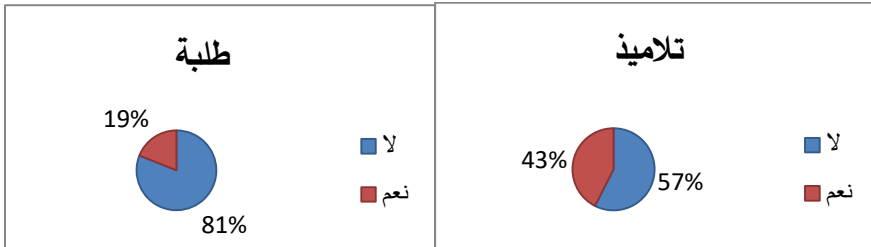
أما بالنسبة لتلاميذ الثالثة ثانوي فغالب دراستهم تكون مع متتاليات رتيبة لذلك كانت نسبة الخطأ مُعتبرة فيما يخص المتتاليات $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ التي تعد غير مألوفة لهم. من المثير للإنتباه أنّ المتتالية $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ التي تُعطى غالبا كمثال عن المتتاليات المتباعدة أخطأ في إيجاد نهايتها أكثر من 67% من التلاميذ. إن أهم ما يمكن ملاحظته من خلال السؤال (أ)، هو أن الطلبة والتلاميذ لا يرتاحون مع المتتاليات المعطاة على شكل جزئين، كما لاحظنا أن بعضهم يعطون لمتتالية واحدة نهايتين مختلفتين مثل 1 و -1. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو 1 و 0 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
منتوج الطلبة والتلاميذ بخصوص السؤال (ب)

كما يُظهر في المخطط أدناه، فإن التلاميذ أَلِفُوا العمل على المتتاليات مثل المذكورة في الحالة الأولى، وبشكل خاص تلك التي تتبع نمطا معيناً أو التي تكون رتيبة. الأمر يختلف بالنسبة للطلبة فقد يُجابهون الحالتين معا أثناء تعمقهم في دروس المتتاليات في الجامعة، لكن ذلك لا يمنع أن بعضهم يفَضُّون متتاليات الحالة الأولى، وما يؤكد أنه نسبة تفوق 35% ذكروا أنهم أَلِفُوا متتاليات الحالة الأولى.



مخطط 01: إجابات التلاميذ والطلبة عن السؤال (ب) من المشكلة 1.

منتج الطلبة والتلاميذ بخصوص السؤال (ج)



مخطط 02: إجابات التلاميذ والطلبة عن السؤال (ج) من المشكلة 1.

المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مألوفة لدى الطلبة والتلاميذ لأنها تُذكر كثيرا كمثال في الكتب، غير أنّ كثيرا من الطلبة والتلاميذ يتأكدون من أنّ نهايتها هي الصفر عن طريق تعويض n بعدد كبير فيجدون قيمة $\frac{1}{n}$ تساوي الصفر تقريبا، وبالتالي هذا ما يؤدي بهم إلى الظن أنّه توجد قيمة لـ n تجعل a_n يساوي الصفر. وهذا ما يؤكده الجواب بنعم بنسبة 43% للتلاميذ و19% للطلبة.

الصور الذهنية الممكن استخلاصها من المشكلة 1

تصور التلاميذ بالخصوص أنّ نهاية متتالية تتأثر باتجاه تغير الحدود الأولى. هذا ما تدل عليه نسبة الخطأ في إجابات التلاميذ عن المتتالية ذات الحد العام $n = \frac{3}{2^n}$ التي تكون حدودها الخمس الأولى متزايدة، لكن نهايتها هي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$$

الصفر. مثال على ذلك:

تصور الطلبة والتلاميذ أن المتتاليات المتذبذبة، مثل:

$$V_n = \begin{cases} 1; & n, \text{ زوجي} \\ \frac{1}{n}; & n, \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \begin{cases} 0 & n \text{ زوجي} \\ 1 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

الملاصقة لمتتالية. مثال على ذلك.

تصوّر بعض المتعلمين (التلاميذ بالخصوص) أن نهاية متتالية هي قيمة نجدها بعد تعويض n بعدد كبير. هذا ما يظهره المخطط 2.

المشكل الثاني:

(أ) اذكر صحة أو خطأ كل من الجمل التالية (بوضع دائرة على الجواب المناسب).

- النهاية هي قيمة من قيم متتالية، تجدها بعد تعويض n بعدد كبير. ص خ
- النهاية هي قيمة بحيث تتحرك المتتالية مقترية منها كلما كبر n . ص خ
- النهاية هي قيمة تقترب منها متتالية دون أن تساويها. ص خ
- النهاية هي القيمة التي تحد متتالية من الأعلى (أو من الأدنى). ص خ
- النهاية هي قيمة إذا شملها أي مجال مفتوح فهو يشمل كل حدود المتتالية ما عدا عدد منته. ص خ
- النهاية هي قيمة إذا شملها أي مجال مفتوح فهو يشمل عددا غير منته من حدود المتتالية. ص خ

(ب) من بين الجمل السابقة، ما هي الجملة التي تصف تقريبا أو تماما نهاية متتالية كما تفهمها أنت؟

1 2 3 4 5 6 ولا واحدة

طُلب من المتعلمين ذكر الجملة التي تصف نهاية متتالية كما يفهمها، حتى يتمكن من معرفة التصورات الخاطئة ثم حوصلتها ومعرفة التصور الطاعي لدى المتعلمين.

منتج المتعلمين عن السؤال (أ) من المشكل:

الجملة	1	2	3	4	5	6
الإجابة الفتة	ص	خ	ص	خ	ص	خ
تلاميذ	95	79	12	49	102	72
طلبة	9	28	18	19	25	12

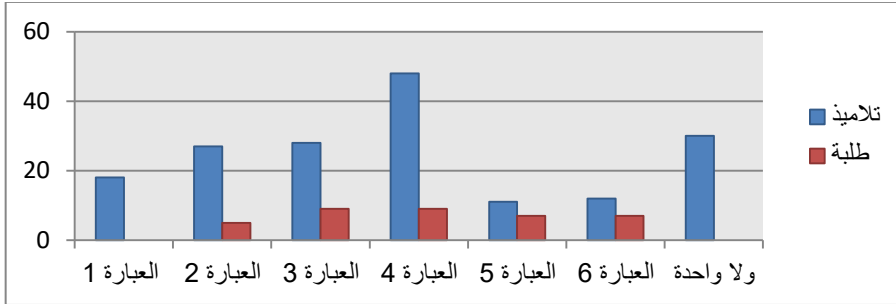
جدول 2 إجابات التلاميذ والطلبة عن السؤال (أ) من المشكل 2

لقد قدّمنا هذه العبارات المتعلقة بنهاية متتالية وهي كلّها تصورات خاطئة ماعدا الجملة رقم 5 التي هي تعريف نهاية متتالية بصيغة لغوية كما تمّ تقديمه في الثانوية. فيما يخص التلاميذ، فإنّ أول ما نلاحظه هو أنّ العبارات 1 و3 و4 و6 الخاطئة، كانت نسبة الذين قالوا بأنّها صحيحة هي الأكبر. أمّا العبارة 5، وهي صحيحة، فأغلبهم (أكثر من 62%) قالوا بأنّها خاطئة. نلاحظ أيضا أنّ التصور الخاطئ بأنّ نهاية متتالية هي القيمة التي تحدّها من الأعلى (أو من الأدنى) حصّد أكبر نسبة من التلاميذ الذين أجابوا بصحّته (حوالي 80%). أمّا بالنسبة للطلبة، فنلاحظ أنّ إجاباتهم عن كل عبارة لا تخلو من الخطأ. غير أنّ العبارة 3 التي تقول إنّ النهاية هي قيمة تقترب منها المتتالية دون أن تساويها، كانت نسبة الطلبة الذين أجابوا بأنّها صحيحة أكثر من 89%، أمّا فيما يخص العبارة 5 فإنّ حوالي 51% ذكروا أنّها صحيحة.

منتج الطلبة بخصوص السؤال (ب)

إنّ أكبر نسبة من التلاميذ يرون أنّ الجملة التي تصف نهاية متتالية هي العبارة 4 ونفس الشيء بالنسبة للطلبة. بصفة عامة، نستخلص من هذا

المشكل أنّ هناك نسبة معتبرة من الطلبة والتلاميذ يملكون تصورات خاطئة عن نهاية متتالية. ومن المثير للاهتمام أيضا ملاحظة أنّ التلاميذ لم يتذكروا تعريف نهاية متتالية المعطى لهم والذي هو نفسه العبارة 5 ولذا مُعظمهم أجابوا بأنها خاطئة.



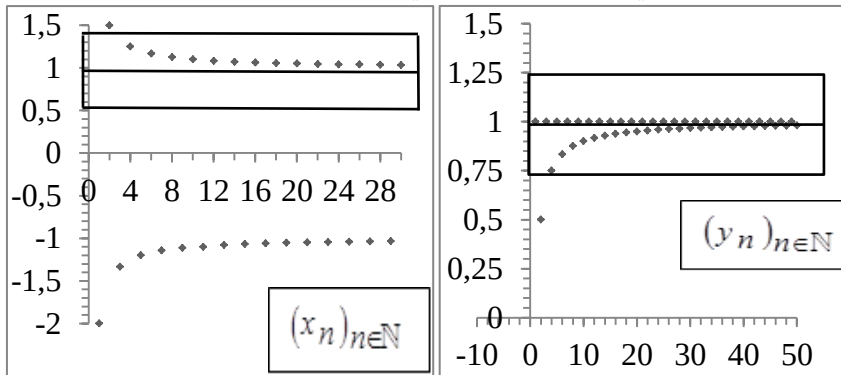
مخطط 03: إجابات التلاميذ والطلبة عن السؤال (ب) من المشكل 2.

الصور الذهنية الممكن استخلاصها من المشكل:

- النهاية هي قيمة من قيم متتالية، تجدها بعد تعويض n بعدد كبير.
 - النهاية هي قيمة بحيث تتحرك المتتالية مقترية منها كلما كُبر n .
 - النهاية هي قيمة تقترب منها متتالية دون أن تساويها.
 - النهاية هي القيمة التي تحد متتالية من الأعلى (أو من الأدنى).
- لقد أقر المتعلمون بأن هذه العبارة هي التي تصف نهاية متتالية كما يفهمونها، إن استجواب فئة منهم ضروري لمعرفة هذا الاقرار. لكن لم نتمكن من ذلك لظروف القاهرة.
- النهاية هي قيمة إذا شملها أي مجال مفتوح فهو يشمل كل حدود المتتالية ما عدا عدد منته.
 - النهاية هي قيمة إذا شملها أي مجال مفتوح فهو يشمل عددا غير منته من حدود المتتالية.

المشكل الثالث:

إليك منحنيان بيانيان لمتتاليتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. وضعنا فوق كل منحن شريطا مصنوعا من الورق الشفاف، كل شريط ذو عرض معين مرسوم في وسطه مستقيم كما في الشكل. نضع التعريف التالي: "تكون قيمة l نهاية لمتتالية إذا وفقط إذا شَمَلَ الشريط كل نقاط المنحنى ماعدا عدد منته طالما بقي هذا الشريط يغطي l ".



(أ) باستعمال التعريف أعلاه، أعط نهاية كل متتالية إن وُجدت:

(ب) مقارنة بالتعريف الرياضي، تجد التعريف أعلاه:

سهلا صعبا لا تدري

هذا المشكل مشابه لنشاط "شريط ε " وذلك من أجل البحث إن كان استعمال هذا النشاط يساعد على تبسيط فهم تعريف نهاية متتالية عن طريق استعمال التعريف المتعلق بـ "شريط ε " المَعطى في المشكل، ثمّ مقارنته بالتعريف الرياضي. المطلوب هو أن يستعمل التلاميذ والطلبة التعريف المتعلق بـ "شريط ε " لإيجاد نهاية المتتاليتين، الذي يُتوقع أن يكون بسيط الفهم لأنه يُجنّبهم المتراجحات والمكدمات والمجالات الموجودة في التعاريف. يُتوقع من الطلبة ملاحظة العلاقة الموجودة بين ε و N عيانا. الهدف الأساسي من هذا التمرين هو البحث عن إجابة للسؤال التالي: هل يجد الطلبة والتلاميذ روابط

بين معنى "تنتهي المتتالية إلى l " وبين هذا التعريف، الذي يتطلب نفس التفكير المستعمل في العمل بالتعريف الإيسلوني لكن في سياق بياني؟

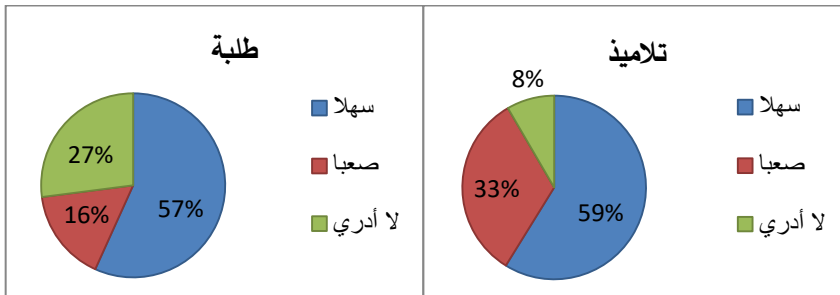
منتج التلاميذ والطلبة بخصوص السؤال (أ)

إنّ هذا السؤال تضمّن تعريفا متعلقا بـ "شريط ε " يشبه التعريف الرياضي لنهاية متتالية لكن في سياق بياني، ثمّ طُلب من أفراد العينة أن يستخدموا هذا التعريف لإيجاد نهايتي المتتاليتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. معظم الطلبة والتلاميذ كانت إجاباتهم صحيحة باستعمال هذا التعريف. مثال على ذلك الإجابة التالية:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{لا تتبلج}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

منتج التلاميذ والطلبة بخصوص السؤال (ب)



مخطط 04: إجابات التلاميذ والطلبة عن السؤال (ب) من المشكل 3.

نتائج إجابات الطلبة والتلاميذ الظاهرة في الجدول تُظهر أنّ أكبر نسبة منهم يرتاحون مع هذا التعريف ويجدونه أسهل من التعريف المُعطى لهم في القسم وذلك لسببين: أولاً، لأنّه أُعطي في سياق بياني يسمح لهم بمشاهدة سلوك المتتالية عياناً، ثانياً لأنّ التعريف بهذه الصيغة لا يتضمن تعقيد الرموز والمُكمّات كما في تعريف نهاية متتالية. لكن تجدر الإشارة أنّ التعريف المُقدّم في هذا التمرين لا يعوّض التعريف الرياضي، وإنّما قُدِّم كأداة من أجل تبسيط فهمه عن طريق استخدام التمثيل البياني وأشرطة ذات عرض معيّن

وكذلك من أجل مشاهدة العلاقة بين E الذي يُمثّل نصف عرض الشريط والرتبة N .

3. نتائج وملاحظات عامة:

لقد استخلصنا من هذا البحث العديد من الملاحظات الهامة، تتمثل بالخصوص في وجود الكثير من العوامل التي تؤثر بشكل سلبي على فهم الطالب والتلميذ لمفهوم نهاية متتالية، وتجعل من استيعابه صعبا. معظم هذه الملاحظات قد تم التوصل إليه في دراسات سابقة عديدة أهمها:

- فهم نهاية متتالية غير مكتمل في غالب الأحيان، ولا يتم إلا بصعوبات عديدة.

- لقد كشفت إجابات المتعلمين بشكل واضح عن عدم وجود استراتيجية معينة في استنتاجاتهم، وهذه النتيجة أكدتها عدة دراسات. العديد من التلاميذ والطلبة لهم صعوبات في تحديد نهاية متتالية غير مألوفة.

- وجود عدة أنواع مختلفة من التصورات الخاطئة لدى التلاميذ والطلبة منها تصورات غير ناتجة من التعريف الإبسيلاوني وتصورات ناتجة منه. وهذه الصور الذهنية تؤثر بشكل مباشر على فهم المعنى الرياضي لنهاية متتالية.

- تعامل المتعلمين مع متتاليات غير مألوفة بسبب عدم الثقة في الإجابة عن نهاياتها.

- استعمال نشاط شريط E والتنوع في تمثيل المتتاليات يساعد على فهم طبيعتها وحساب نهايتها.

منتج الطلبة والتلاميذ وإجاباتهم عن أسئلة الاستبيانين توضح، بما لا يدع مجالا للشك، أن الفرضيات التي وضعناها قد تحققت بنسب كبيرة. لقد كان هذا منتظرا، ذلك أنّ كل الدراسات السابقة، بما فيها المقال الذي اعتمدنا

عليه، كشفت ذلك. نعتبر هذه الدراسة والعديد من الدراسات الأخرى حول موضوع النهاية عموماً قابلة للتطبيق في التعليم، من المفيد للمُدَرِّسين الاستفادة من الصور الذهنية التي لدى المتعلمين بغرض تصحيحها إن كانت خاطئة أو تأكيدها وتعزيزها إن كانت صحيحة. إن من أهم عوامل النجاح في تدريس الرياضيات عموماً والنهاية خصوصاً هي تغيير نمط تفكير المتعلم من أسلوب الحياة اليومية إلى الأسلوب التقني، وهذا لا يمكن فعله في فترة قصيرة أو ضمان نجاحه مع أي كان.

خاتمة:

إن مفهوم النهاية صعب لأنه يستند على مفاهيم الدوال واللانهاية. نعتقد أن هذا العمل سلط بعض الضوء عليه مُركِّزاً على نهاية متتالية بالخصوص المشاكل التي تحدث أثناء الانتقال بين المستويين الثانوي والجامعي. لقد تبين من خلال نتائج البحث، وجود عدة تصورات خاطئة حول نهاية متتالية. كما ظهر جلياً أنه من الخطأ الاعتقاد أن تقديم التعريف الرياضي سيمحي كل تلك الصور الذهنية الخاطئة، ولا ندعي أن أزمة تعليم الرياضيات يرجع فقط إلى الصور الذهنية الخاطئة، بل يُضاف لها العديد من العوامل العامة مثل صعوبة التواصل الرياضي. إن تعليم وتعلم مفهوم النهاية يجب التخطيط له وتطبيقه بعناية كبيرة، فتحسين فهم الطلبة للنهايات يتطلب أدوات جيدة تأخذ في الحسبان ما يجلبه المتعلمون من نماذج في أذهانهم إلى القسم. (Williams, 1991)

نشاط شريط E المُقترح من طرف الباحثة كيونغ روه، صاحبة المقال المُرتكز عليه في هذه الدراسة، أثبت نجاحه كأداة تعليمية تقود الطلبة إلى دحض التصورات الخاطئة التي لديهم حول نهاية متتالية، كما كان طريقة مساعدة بشكل كبير على فهم التعريف. (Roh, 2007) بدورنا نقترح استعمال

هذا النشاط في القسم مع استعمال أنواع مختلفة من المتتاليات كأمثلة أثناء تدريس النهاية. هذا المفهوم سواء قُدِّم عن طريق المتتاليات أو التوابع أو المشتق أو التكامل فإن كل هذه المفاهيم مرتبطة مع بعضها ويمكن مناقشة ذلك في دراسات أخرى. كما يمكن دراسة تصورات أساتذة التعليم الثانوي لنهاية متتالية وممارساتهم في القسم والمصطلحات التي يستعملونها وأنواع الأمثلة التي يقدمونها بكثرة أثناء تدريسهم لمفهوم النهاية. في الختام، نرجو أن تكون هذه الدراسة عملاً نافعا مثمرا والله الموفق.

قائمة المراجع:

- حازي، محمد. 2013. من دفاتر التحليل. الدوال الحقيقية ذات متغير حقيقي: نهاياتها واستمرارها. بن عكنون، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- اللجنة الوطنية للمناهج. 2005. برنامج الرياضيات للسنة الثانية من التعليم الثانوي. وزارة التربية الوطنية. الجزائر.
- اللجنة الوطنية للمناهج. 2006. برنامج الرياضيات للسنة الثالثة من التعليم الثانوي. وزارة التربية الوطنية. الجزائر.
- واقيد، عبد الهادي. 2017. تأثر فهم المتعلم بالمعارف والصور الذهنية المكتسبة: حالة نهاية متتالية عددية. مذكرة ماجستير. المدرسة العليا للأساتذة-القبّة. الجزائر.
- وزارة التربية الوطنية. 2009. الكتاب المدرسي للسنة الثالثة ثانوي. العاشور. الجزائر: الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية.
- وزارة التربية الوطنية. 2009. الكتاب المدرسي للسنة الثانية ثانوي. العاشور. الجزائر: الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية.

Bagni, Giorgio. T. 2005. The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. October 2005. VOL 5 .N 4. Pp: 453–468. DOI:10.1080/14926150509556675

Bedat, J.M., & Capelier B., & Drouin C. et al. 2006. Aspect historique de quelques notions d'analyse. Équipe académique Mathématiques Bordeaux: <http://mathematiques.ac-bordeaux.fr>

Cornu, Bernard. 2002. Limits. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Pp: 153-166. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Iliada Elia & Athanasios Gagatsis & Areti Panaoura & Theodosios Zachariades & Fotini Zoulinaki. 2009. Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*. 20 February 2009. Vol7. N 4. Pp: 765–790.

Hairer, Ernst & Wanner, Gerhard. 2000. L'analyse au fil de l'histoire. Université de Genève. Section de Mathématiques.

Hight, Donald. W. 1963. The limit concept in the education of teachers. *The American Mathematical Monthly*. Feb 1963. Vol 70. N 2. Pp: 203–205.

Job, Pierre & Schneider, Maggy. 2014. Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM*. 06 August 2014. Vol 46. N 4. Pp: 635–646.

Jordaan, Terttia. 2005. Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students. University of South Africa. [PhD Thesis].

Liang, Senfeng. 2016. Teaching the Concept of Limit by Using Conceptual Conflict Strategy and Desmos Graphing Calculator. *International Journal of Research in Education and Science*. Vol 2. N 1. Pp: 35–48.

Mamona-Downs, Joanna. 2001. Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. November 2001. Vol 48. N. 2. Pp: 259–288. <https://doi.org/10.1023/A:1016004822476>

Monaghan, John & Sun, Shyashiow & Tall, David. 1994. Construction of the limit concept with a computer algebra system. *Proceedings of PME*. January 1994. Vol 18. N 1. Pp: 279–286.

Pinto, Marcia & Tall, David. 2002. Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*. Mar 2002. Vol 22. N 1. Pp: 2–10.

Roh, Hah Kyeong. 2007. An Activity for Development of the Understanding of the Concept of Limit. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4. Pp: 105-112.

Roh, Hah Kyeong. 2005. College students' intuitive understanding of the concept of limit and their level of reverse thinking.. The Ohio State University. Thesis for: PhD.

Roh, Hah Kyeong. 2008. Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. November 2008. Vol 69. N 3. Pp: 217–233. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2>

Roh, Hah Kyeong. 2010a. An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε -strip activity. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 73. N 3. Pp: 263–279.

Roh, Hah Kyeong. 2010b. How to help students conceptualize the rigorous definition of the limit of a sequence. *Primus*. Jul 2010. Vol 20. N 6. Pp: 473–487. <https://doi.org/10.1080/10511970802441704>

Tall, David. 1993. Students' difficulties in calculus. *Proceedings of Working Group* 3. Pp: 13–28.

Tall, David & Vinner, Shlomo. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. May 1981. Vol 12. N 2. Pp: 151–169. DOI:10.1007/BF00305619

Williams, Steven. R. 1991. Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. May 1991. Vol 22. N 3. Pp: 219–236.