

Enjeux épistémologiques et didactiques liés au développement de la pensée fonctionnelle *

Epistemological and didactic issues related to the development of functional thinking

Ben Nejma Sonia

Université de Carthage – Larina – Faculté des sciences de
Bizerte-Tunisie

sonia.bennejma@fsb.u-carthage.tn

Acceptation : 12/03/2022

Publication : 31/12/2022

Mots-clefs : Pensée
Fonctionnelle; Algèbre ;
Didactique ; Histoire ;
Epistémologie ;
institution.

Keywords: Functional
Thinking; Algebra;
Didactics; History;
Epistemology;
Institution.

Résumé :

Cette contribution porte sur le développement de la pensée fonctionnelle au début du cycle secondaire. Nous présentons un modèle épistémologique bidimensionnel permettant d'analyser les choix institutionnels préparant les élèves (14-15 ans) aux notions de variable, dépendance, correspondance, covariation, graphique. La première dimension d'analyse est de nature historico-épistémologique et vise à retracer l'histoire de ces notions en interrogeant les conditions de leur émergence et les obstacles conceptuels rencontrés. La seconde dimension

est de nature didactique et aborde le processus d'enseignement - apprentissage de ces notions dans le cadre algébrique élémentaire. Nous faisons référence au processus de transposition didactique externe pour analyser le savoir savant et le savoir à enseigner autour de ces objets de savoir algébrique-fonctionnels en prenant l'exemple du système éducatif tunisien à la transition collège/lycée.

* Cet article présenté au 2ème Colloque International de Didactique des Mathématiques, 12 Mars 2022 (2ème DIMA), organisé par la Commission nationale pour l'éducation, la science et la culture de l'UNESCO -Algérie-, l'Institut national de recherche en éducation (INRE) et l'Université de Tiaret (laboratoire LIM), le Centre d'enseignement en mathématiques et informatique de l'école Al Awael (CEMI).

Abstract:

This contribution focuses on the development of functional thinking at the beginning of secondary school. We present a two-dimensional epistemological model to analyse the institutional choices that prepare students (14-15 years old) for the notions of variable, dependence, correspondence, covariation, and graph. The first dimension of analysis is of a historical-epistemological nature and aims to trace the history of these notions by questioning the conditions of their emergence and the conceptual obstacles encountered. The second dimension is didactic and deals with the teaching-learning process of these notions in the elementary algebraic framework. We refer to the process of external didactic transposition to analyse the knowledge and the knowledge to be taught around these algebraic-functional knowledge objects by taking the example of the Tunisian educational system at the transition from junior high to high school.

Introduction :

Les approches d'enseignement de l'algèbre paraissent souvent différentes, plus ou moins fonctionnelles ou équationnelles, selon les pays, et pas toujours explicites. Dans un premier temps, les élèves découvrent un nouveau processus à travers des activités d'anticipation à la notion de variable par un travail sur les formules. Celles-ci, souvent considérées comme des abréviations de procédures à appliquer, permettent non seulement une première entrée dans le calcul littéral dès l'enseignement primaire, mais constitue souvent une assise pour développer certains aspects fonctionnels et le calcul associé. En effet, ce qui caractérise la pensée fonctionnelle, par opposition à la pensée arithmétique puis algébrique, est l'intégration d'une variation continue de la variable, par contraste avec les phénomènes « discrets » étudiés antérieurement dans le cursus scolaire des élèves. Dans cette transition, au sein du domaine algébrique, l'élève est amené à concevoir le nouveau statut de la lettre comme variable, à se détacher progressivement du calcul littéral et de la résolution d'équations et d'inéquations pour approcher les concepts de variable et de variation. L'analyse des programmes d'algèbre des réformes successives de l'enseignement secondaire tunisien (Ben Nejma, 2009, 2012, 2018, 2020, 2021) a permis de mettre en avant une évolution récente des savoirs algébriques enseignés au niveau du secondaire en Tunisie. Ces savoirs prendraient une forme plus dynamique (liée à la notion de fonction) au travers de la dernière

réforme du curriculum (2004), forme qui semble se rattacher intuitivement à la notion de « variable », par opposition à la notion « d'inconnue » caractérisant une forme plus statique des savoirs enseignés auparavant en algèbre, dans les périodes d'enseignement précédentes. Ces points de vue « dynamique » et « statique » de l'enseignement de l'algèbre se donnent notamment à voir à travers une imbrication des thèmes d'études développées autour des « équations » et des « fonctions linéaires et affines ». Cette imbrication semble possible grâce à, d'une part, l'articulation de différents registres sémiotiques (Duval, 1993) et, d'autre part, l'omniprésence du registre graphique et la prépondérance des situations issues du cadre des grandeurs. Ces constats nous ont conduits à approfondir l'étude et à affiner notre questionnement autour des formes plus ou moins « statique » ou « dynamique » du domaine algébrique en explorant la manière dont la notion de variable a émergé et s'est développée au fil de l'histoire, et le rapport qu'il pourrait y avoir avec l'enseignement tunisien.

I. Cadre Theorique

Ce travail (Ben Nejma, 2020) se situe ainsi dans la lignée des travaux en didactique des mathématiques qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique. Cette théorisation renforce l'importance de l'étude des lieux de transmission des savoirs et plus globalement, les dimensions sociale et culturelle de la production scientifique. (Dorier, 2015) Nous remontons ainsi aux origines du processus de transposition didactique, du savoir savant jusqu'à la production du savoir à enseigner. La TAD permet de modéliser toute pratique humaine ou sociale en termes de praxéologie (Chevallard, 1998). Celle-ci se décline en des organisations mathématiques qui permettent de décrire et d'analyser toute activité mathématique en la décomposant en un quadruplet (tâche, technique, technologie et théorie). Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie (Chevallard, 1998). Ce cadre est enrichi par

des travaux en didactique de l'algèbre qui se basent sur une revue de littérature autour de la construction historique des notions élémentaires qui caractérisent la pensée fonctionnelle (Charbonneau, 1987 ; Passaro, 2015 ; Radford, 2006, 2014 ; Serfati, 1997 ; Youschkevitch, 1981). Cela caractérisera le savoir savant du point de vue de la transposition didactique de ces notions. La seconde partie présente des résultats relatifs à une analyse institutionnelle conduite dans le système éducatif tunisien sur la base des ressources officielles (programme et manuel) pour le niveau de première année du cycle secondaire (élèves de 14-15 ans). Nous prenons appui sur des travaux de chercheurs (Assude et al., 2012 ; Coulangue et al., 2012 ; Robert, 2018 ; Ruiz-Munzón et al., 2012 ; Schliemann et al., 2012) qui présentent des proximités dans l'approche de l'enseignement de ces notions, au regard de la spécificité des savoirs algébriques en jeu.

II. Methodologie

Notre méthodologie est conduite selon deux dimensions d'analyse du processus de transposition didactique, une dimension historico-épistémologique qui conduit à identifier les conditions et les obstacles épistémologiques liés à l'avancée des connaissances autour du développement des aspects fonctionnels caractérisant ainsi le savoir savant. Le recours à l'histoire dans les recherches en didactique de l'algèbre a constitué un point d'entrée pour de nombreux travaux dans ce domaine (Kieran, 1992 ; Kieran et al., 2016 ; Radford, 2006 ; Sfard, 1997). Cette analyse peut être mise en rapport avec les obstacles didactiques rencontrés dans l'histoire permettant de produire des modèles didactiques de situations qui prennent en compte toutes les conditions pertinentes de la construction des savoirs. La dimension didactique aborde la dialectique algébrique/fonctionnel dans l'enseignement secondaire et les difficultés rencontrées par les élèves pour développer la pensée fonctionnelle. Certaines recherches ont tenté d'apporter une caractérisation dans l'objectif d'analyser certains choix curriculaires. Robert (2018) apporte une caractérisation de la pensée fonctionnelle sur la base de quelques approches Radford (1996, 2006, 2014), comme une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Quelles sont les caractéristiques des organisations mathématiques développées autour des notions de variable,

dépendance fonctionnelle, correspondance, variation et covariation dans le manuel tunisien de 1^{ère} année secondaire ? Quel rapprochement avec le modèle épistémologique de référence ?

III. Principaux résultats : du savoir savant au savoir à enseigner

Les aspects fonctionnels relatifs à la notion de variable, variation et covariation ont émergé dans une problématique modélisation de phénomènes physiques, mouvements, vitesse, cinématique. Progressivement, le caractère intuitif géométrique de cette notion laisse place au symbolisme analytique et algébrique. En effet, le dégagement des considérations physiques va permettre une introduction formelle du concept de fonction, basé sur la notion centrale de variable. Exprimée d'abord par une formule algébrique dans la première moitié du XVIII^e siècle, la définition de la notion de fonction se généralise à des expressions différentes dans la seconde moitié du XVIII^e siècle. L'analyse montre que c'est sur l'idée de dépendance qu'est basé le concept de fonction (variable), mais c'est également par l'idée de variation et la mathématisation du temps qu'il a pu se développer ; c'est l'adjonction de ces deux aspects qui a permis cette genèse. L'approche ensembliste de ce concept par une mise en correspondance, terme à terme, des éléments de deux ensembles évacue cette idée de variation et se rattache à la théorie des ensembles. L'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations constitue une étape importante dans le développement des mathématiques. Le lieu d'articulation entre équation et fonction fut le cadre des grandeurs, particulièrement « les courbes géométriques » retenues par Descartes à l'époque. C'est la première fois qu'une équation entre x et y (donc à deux inconnues) permet de faire émerger une relation de dépendance fonctionnelle entre quantités variables. L'obtention d'une longueur par l'intermédiaire d'une autre par des opérations algébriques est liée à la théorie des proportions exactes. Du point de vue du savoir à enseigner La notion de variable émerge de situations qui réfèrent en général au continu géométrique, par le biais d'une figure et d'un point variant sur un segment ou une courbe (côté, arête ou arc de cercle). La distance d'un point variable à un point fixe est modélisée par un réel x , et c'est à partir d'une formule entre grandeurs qu'une relation fonctionnelle implicite entre variables est établie. Dans ce cas, les activités proposées prêtent souvent à confusion entre les statuts d'inconnue et de variable. Toutefois l'usage

implicite du concept de variable est convoqué non pas à travers le concept de fonction, mais par le biais de celui de formule. L'appréhension globale du sens de variation d'une fonction est généralement amorcée par des situations de vitesse selon laquelle une trajectoire donnée est représentée dans un repère donné ou dans un champ quadrillé. Cela se rapproche de ce que l'on a pu observer à l'époque d'Oresme, motivant l'introduction des graphiques et des fonctions, chez Leibniz et Newton, associées systématiquement à des courbes parcourues en fonction du temps. Cependant, ce choix classique des situations proposées dans le manuel peut, selon certaines études, constituer un obstacle à la perception du concept de variation. En effet, Sierpiska (1992) évoque l'omniprésence du temps qui porte à penser que toute fonction est une fonction du temps, c'est-à-dire que la variable indépendante est forcément le temps. La plupart des formules en jeu dans les situations géométriques du manuel présentent des liens de proportionnalité entre grandeurs. Or, bien que cette approche permette de dépasser le réductionnisme du registre algébrique par des situations où interviennent simultanément plusieurs variables et plusieurs formes de dépendance, elle est susceptible de freiner l'appréhension d'un modèle non linéaire et présente le risque de généraliser certaines propriétés de linéarité à des fonctions usuelles quelconques. Au-delà de la notion de formule, on doit penser le passage du mode de pensée algébrique à un mode de pensée fonctionnelle en termes de variation. Or, dans la plupart des problèmes proposés à l'entrée au lycée, l'élève est amené à accomplir des transformations algébriques dépourvues de sens, sans un contrôle des résultats. Dans le contexte de grandeurs physiques, il est possible d'y remédier au moyen de formules de types affine ou polynomiale. Les activités fondées sur l'étude des relations de dépendances entre grandeurs ou mesures mettent en avant une modélisation fonctionnelle qui permet de relier implicitement un domaine initial d'existence des grandeurs (le système physique) et le modèle mathématique (les fonctions mathématiques). Les activités suggérées par l'expression de la valeur d'une grandeur et par l'exploration de la variation entre grandeurs permettent de conceptualiser certains aspects de la pensée, mais laissent peu de choix à l'élève pour quantifier des dépendances fonctionnelles.

IV. Conclusions

Cette recherche (Ben Nejma, 2020, 2022 à paraître) propose un modèle épistémologique permettant d'analyser les pratiques institutionnelles développées autour de la pensée fonctionnelle au début du secondaire. Cette analyse bidimensionnelle permet d'aborder la problématique des choix transpositifs des institutions scolaires autour d'objets fonctionnels au regard de leur développement historique. Du point de vue du développement du curriculum, se posent, à notre avis, une question importante, le « comment » débiter un enseignement favorisant une entrée dans la pensée fonctionnelle. En effet, l'algèbre est un levier pour développer une approche « dynamique » des objets algébriques. Toutefois, si l'on s'appuie uniquement sur le symbolisme algébrique et les notions souvent abordées (proportionnalité, formule, linéarité) avec les calculs associés, on pourrait venir bloquer le développement conceptuel de certains aspects du cadre analytique. Il nous semble qu'une approche interdisciplinaire entre mathématique et sciences physiques pourrait favoriser l'émergence de cette approche dans un contexte de modélisation plus active.

Reference :

ASSUDE, Teresa & Coppé, Sylvie & Pressiat, André. 2012. Tendances de l'enseignement de L'algèbre élémentaire au collège : Atomisation et réduction. Recherches en didactique des mathématiques. Hors-série. 41–62.

BEN NEJMA, Sonia. 2004. La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire tunisien : transition collège/lycée. Tunis : Université de Tunis. Mémoire de DEA.

BEN NEJMA, Sonia. 2009. D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien. Université Paris VII et université de Tunis. Thèse de doctorat.

BEN NEJMA, Sonia. 2010. Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques enseignantes ? Étude de cas dans le contexte tunisien. *Revue Petit x*. N 82. Pp 5-30.

BEN NEJMA, Sonia. 2012. Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. In : J. L. Dorier et S. Coutat (dir.). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{ème} siècle*. Actes du colloque EMF. Genève: Université de Genève. 2012. Pp. 1133-1142.

BEN NEJMA, Sonia. 2020. Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue Québécoise de didactique des mathématiques*. 2020. Vol 01. 2020. Pp 38-69.

BOSCH, Marianna & Chevallard, Yves. 1999. Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 1999. Vol 19. N 1. Pp 77-124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>

BOSCH, Marianna & Gascón, J. 2005. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In : Alain, Mercier & Claire, Margolinas (dir.). *Balises pour la didactique des Mathématiques*. Actes de la XII^e école d'été de didactique de mathématiques. Grenoble : Éditions la Pensée sauvage. 2005. Pp. 107-122. Collection : Recherches en didactique des mathématiques. ISBN: 2-85919-210-7

BOURBAKI, Nicolas. 1960. Éléments d'histoire des mathématiques. France : Éditions Hermann.

CHEVALLARD, Yves. 1991. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné (2^{ème} édition). France : Éditions la Pensée sauvage.

COULANGE. L & Ben Nejma Sonia & Constantin C & Lenfant-Corbin A. 2012. Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques*. Hors-série. Pp 57-79.

DORIER, Jean. Luc. 2015. Dimension épistémologique de la didactique des mathématiques. In : Alger : Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene. Theis L. (dir.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015. Alger. 10-14 Octobre 2015. Pp. 108-118.

DUVAL, Raymond. 1993. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*. Vol 5. Pp. 37-65.

KIERAN, Carolyn & Pang, Jeongsuk & Schifter, Deborah & Fong Ng, Swee. 2016. Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching. Springer open. ISBN: 9783319322582.

RADFORD, Luis. 2006. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In : S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.) Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Universidad Pedagógica Nacional. Pp. 2-21.

RADFORD, Luis. 2014. The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*. Vol 26. Issue 02. Pp 257-277.

ROBERT, Virginie. 2018. Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : Une analyse praxéologique. Canada : Université de Sherbrooke. mémoire de maitrise.

RUIZ-MUNZON, N & Matheron, Y & Bosch, M & Gascón, J. 2012. Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2012. Hors-série. Pp 81-101.

SFARD, Anna. 1997. On metaphorical roots of conceptual growth. In: L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Lawrence Erlbaum Associates. Pp. 339-371.

SIERPINSKA, Anna. 1992. On understanding the notion of function. In: E. Dubinsky et G. Harel (dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. mathematical Association of America. Pp. 25-58.